EULER: Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi
Journal Homepage: http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/Euler
DOI: https://doi.org/10.34312/euler.v8i1.10326
Juni 2020, Vol. 8, No. 1, Hal. 9-15

MODEL DINAMIKA PENYEBARAN PENYAKIT CAMPAK DENGAN PENGARUH MIGRASI DAN PENAMBAHAN IMUNISASI

Ainun Fatmawati[1]*, Lisnawati R. Aju[2], Ristina Malango[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika, Universitas Negeri Gorontalo, Bone Bolango 96119, Indonesia
**Penulis Korespondensi. Email: ainunfatmawatii@gmail.com*

Abstrak

Artikel ini membahas dinamika penyebaran penyakit campak dengan pengaruh migrasi dan penambahan imunisasi. Untuk menganalisis hasil dilakukan penentuan titik tetap bebas penyakit dan endemik. Analisis dilakukan dengan memperhatikan bilangan reproduksi dasar (R_0). Pada analisis hasil didapat kondisi $R_0 < 1$ yang menunjukkan bahwa penyebaran penyakit campak dapat dicegah. Dengan melakukan migrasi dan menambahkan imunisasi maka nilai dari bilangan reproduksi dasar akan semakin kecil yang menunjukkan berkurangnya epidemi dalam populasi.

Kata Kunci: Campak; Model Matematika; Migrasi; Imunisasi; Kestabilan

Abstract

This article discusses the dynamics of the spread of measles with the effect of giving and adding immunization. To analyze the results, a fixed point was determined to be disease-free and endemic. The analysis was carried out by considering the basic reproduction number (R_0). In the analysis of the results obtained conditions $R_0 < 1$ which indicates that the spread of measles can be prevented. By practicing and adding immunizations, the value of the numerals will be smaller, which indicates the reduction in the population.

Keywords: *Measles; Mathematical Model; Migration; Immunization; Stability*

1. Pendahuluan

Penyakit campak dikenal juga sebagai Morbili atau Measles merupakan infeksi virus yang sangat menular. Penyakit ini disebabkan oleh virus campak golongan Paramixovirus, yang ditandai dengan demam, batuk, ruam kulit dan ditularkan melalui percikan ludah dari hidung, mulut maupun tenggorokan penderita campak. Penyakit ini dapat menyerang siapa saja tanpa mengenal usia dan jenis kelamin.

Model matematika dapat digunakan untuk memperlajari penyebaran penyakit, seperti HIV/AIDS [1], Kanker [2], dan termasuk diantaranya adalah campak. Pemodelan terhadap campak telah banyak dilakukan diantaranya model dasar tentang penyebaran penyakit yang dirumuskan oleh Kermack pada tahun 1927. Model penyebaran yang telah diteliti sebelumnya yaitu model SIR. Model tersebut berupa *susceptible, infected,* dan *recovered* (*SIR*). Pada model lain dibahas penyebaran peyakit campak yang dibagi menjadi 4 populasi yaitu model *SEIR*. Dimana disini ditambahkan populasi *Exposed* (E) [3]. Penelitian yang dilakukan Ulfa dkk, [4] berupa model yang melibatkan faktor pengontrolan campak dengan menambahkan vaksinasi. Khosiloh [5] juga melakukan kajian model matematika penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi. Selanjutnya Suandi [6] mempertimbangkan model penyebaran penyakit campak dengan vaksin permanen. Lebih lanjut, Soleh [7] meneliti model SEIR penyakit campak dengan vaksinasi dan migrasi. Analisis yang dilakukan menghasilkan jumlah individu yang harus divaksinasi agar tidak terjadi endemik pada penyakit campak adalah $p_c > 1 - \frac{1}{R_0}$.

Submit: 25 April 2020, Diterima: 23 Mei 2020, Online: 29 Juni 2020

Artikel ini memperkenalkan model baru tentang penyakit campak dengan mempertimbangkan pengaruh migrasi dan imunisasi. Seperti pada yang dilakukan oleh Beay [8] pada kasus dinamika penyebaran Campak dengan pangaruh migrasi, yang menunjukkan semakin besar nilai parameter imigrasi maka semakin besar peluang terjadi penyabaran penyakit pada suatu populasi. Selanjutnya, semakin besar nilai parameter emigrasi maka semakin kecil peluang terjadinya penyebaran penyakit di dalam populasi.

Sihotang [9] meneliti analisis kestabilan model SEIR penyebaran penyakit campak dengan pengaruh imunisasi dan vaksin MR. Analisis yang dilakukan menghasilkan simulasi numerik saat ditambahkan vaksin MR dan imunisasi sangat berpengaruh terhadap berkurangnya populasi penyakit campak. Kami akan mengembangkan model dengan meninjau faktor-faktor yang ada pada penelitian sebelumnya. Penelitian ini populasi dibagi menjadi 4 kelas, Susceptible (S) menyatakan populasi kelas rentan, Infected (I) menyatkan populasi kelas infeksi, Quarantined (Q) menyatakan populasi kelas karantina, dan Recorvered (R) menyatakan populasi kelas sembuh. Maka dari itu penelitian ini berjudul "Analisis Kestabilan Dinamika Penyebaran Penyakit Campak dengan Pengaruh Migrasi dan Penambahan Imunisasi" .

Model yang diperoleh selanjutnya dilakukan analisis kestabilan dinamika penyebaran penyakit campak dengan titik tetap bebas penyakit dan titik tetap endemik. Simulasi numerik yang diperoleh menunjukkan kondisi saat $R_0 < 1$, penyebaran penyakit campak dapat dicegah. Dengan melakukan migrasi dan menambahkan imunisasi maka nilai dari bilangan reproduksi dasar akan semakin kecil yang menunjukkan berkurangnya epidemi dalam populasi.

2. Metode Penelitian

Metode yang digunakan pada metode penelitian ini yaitu:

a. Menetukan asumsi dan mendefinisikan parameter yang digunakan pada model SIQR dengan asumsi adanya vaksinasi.

b. Menggambar diagram transfer untuk membentuk model matematika. Diagram transfer berfungsi untuk membentuk sistem persamaan diferensialnya.

c. Menyelesaikan sistem persamaan diferensial.

d. Mencari titik ekuilibrium model. Titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit.

e. Menganalisa sifat kestabilan titik ekuilibrium. Setelah titik ekuilibrium diperoleh, maka diselidiki kestabilan dari titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemic penyakit. untuk menganalisa sifat kestabilan titik ekuilibrium dilakukan linearisasi pada sistem dengan menentukan matriks Jacobian di titik ekuilibrium [4]. Kemudian dengan menggunakan definisi polynomial karakteristik diperoleh nilai eigen dan matriks dan ditentukan sifat kestabilannyaberdasarkan Teorema [5]. salah satu alternative menentukan nilai eigen dari polynomial karakteristik adalah dengan menggunakan criteria Routh-Hurwitz.

f. Menginterprestasikan hasil yang diperoleh untuk mengetahui jumlah individu yang harus divaksinasi agar tidak terjadi endemic penyakit.

g. Mensimulasikan model dengan mendefinisikan nilai parameter dan digambarkan dengan menggunakan softwere Wolfram Mathematica 11.3

3. Hasil dan Pembahasan

3.1.Model Matematika

Pada model ini digunakan beberapa variabel yaitu S jumlah individu pada kelas rentan, I jumlah individu pada kelas infeksi, Q jumlah individu pada kelas karantina, R jumlah individu pada kelas sembuh. Adapun parameter yang digunakan adalah:

Λ = Laju kelahiran

δ_1 = Laju imigrasi

δ_2 = Laju emigrasi

α = Peluang laju transfer rendah ke infeksi

β= Peluang laju transfer infeksi ke karantina

η= Peluang laju kesembuhan tiap individu pada kelas

γ= Peluang laju kesembuhan tiap individu pada kelas karantina

φ= Lajukematian karena penyakit

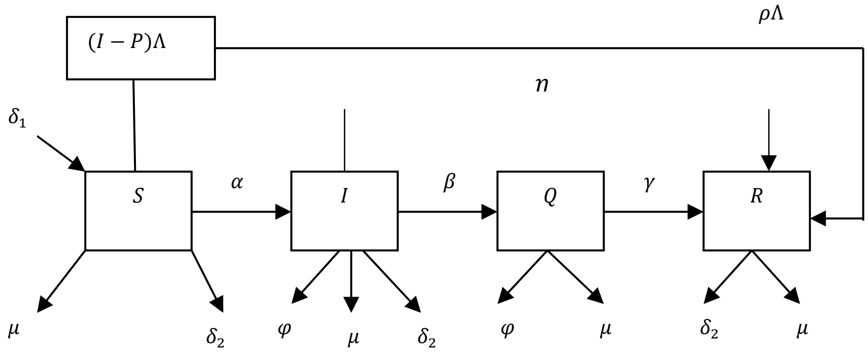
μ= Laju kematian yang terjadi secara alami

p= Proporsi imunisasi

Asumsi yang digunakan sebagai berikut:

1) Jumlah individu pada kelas rentan (susceptible) akal bertambah karena laju kelahiran Λ dan laju migrasi δ_1.
2) Ketika terjadi infeksi maka jumlah individu pada kelas terinfeksi (infected) akan bertambah dengan laju α.
3) Untuk mengurangi efek kontak dengan penderita maka dilakukan karantina laju β.
4) Jumlah individu kelas sembuh (recorvered) akan bertambah karena penyembuhan yang terjadi pada kelas infeksi (infected) dengan laju η dan yang terjadi pada kelas karantina dengan laju γ.
5) Jumlah individu pada kelas infeksi (infected) dankarantina (quarantined) akan berkurang disebabkan kematian karena penyakit dan laju φ.
6) Jumlah individu kelas rentan (susceptible), infeksi (infected), karantina dan sembuh (recorvered) akan berkurang karena kematian yang terjadi secara alami dengan laju μ.
7) Jumlah individu pada kelas rentan (susceptible), infeksi (infected), dan sembuh (recorvered) akan berkurang karena proses emigrasi dengan laju δ_2.
8) Penambahan imunisasi pada kelas rentan

Dengan adanya variabel, parameter dan asumsi di atas, maka dinamika penyebaran penyakit campak dengan pengaruh migrasi dan penambahan imunisasi dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Skema penularan penyakit campak

Berdasarkan gambar diatas, diperoleh model matematika penularan penyakit campak dengan pengaruh migrasi dan penambahan imunisasi sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = (\mathrm{I} - p)\Lambda + \delta_1 - \alpha S\mathrm{I} - (\mu + \delta_2)S$$

$$\frac{d\mathrm{I}}{dt} = \alpha S\mathrm{I} - \eta\mathrm{I} - \beta I - (\varphi + \mu + \delta_2)\mathrm{I}$$

$$\frac{d\mathrm{Q}}{dt} = \beta\mathrm{I} - \gamma Q - (\varphi + \mu)Q$$

$$\frac{d\mathrm{R}}{dt} = \eta\mathrm{I} + \gamma Q - (\mu + \delta_2)R + p\Lambda$$

Tabel dibuat rata tengah dengan font times new roman ukuran 10. Gunakan style yang telah disediakan.

3.2. Penentuan Titik Tetap

1) Titik tetap bebas penyakit

Titik tetap bebas penyakit terjadi jika $I = 0$,dan $Q = 0$ yang menunjukkan tidak terdapat populasi penyakit. Titik tetap bebas penyakit dapat dinyatakan dalam bentuk $E_0 = (S, I, Q, R)$

$$E_0 = (S, I, Q, R) = \left(S = \frac{\delta_1 + \Lambda - p\Lambda}{\delta_2 + \mu}, 0,0, \frac{p\Lambda}{(\mu + \delta_2)}\right)$$

2) Titik tetap penyakit

Titik tetap penyakit dapat dinyatakan dalam bentuk $E_1 = (S, I, Q, R)$. Berdasarkan dengan sistem persamaan pada model tersebut diperoleh:

$$S = \frac{\varphi + \mu + \delta_2 + \eta + \beta}{\alpha}, \qquad I = \frac{\delta_1 + \Lambda - p\Lambda}{[\varphi + \mu + \delta_2 + \eta + \beta]} - \frac{(\mu + \delta_2)}{\alpha}$$

$$Q = \frac{\beta\left(-\frac{\delta_2 + \mu}{\alpha} + \frac{\delta_1 + \Lambda - p\Lambda}{\varphi + \mu + \delta_2 + \eta + \beta}\right)}{\gamma + \mu + \varphi}$$

$$R = \frac{\frac{\beta\gamma - \eta(\gamma + \mu + \varphi)}{\alpha} + \frac{\beta\big(-\gamma(\delta_1 + \Lambda - 2p\Lambda) + p\Lambda(\mu + \varphi)\big) + (\gamma + \mu + \varphi)(\delta_1\eta + \Lambda(\eta + p(\delta_2 + \mu + \varphi)))}{(\delta_2 + \mu)(\beta + \delta_2 + \eta + \mu + \varphi)}}{\gamma + \mu + \varphi}$$

3.3.Analisis Kestabilan Titik Tetap

Untuk menganalisis kestabilan titik tetap suatu sistem persamaan diferensial nonlinear, dapat dilakukan dengan melinearkan persamaan diferensialnya. Analisis kestabilan titik tetap dapat ditentukan dengan cara menentukan nilai eigen dari matriks Jacobian sistem. Matriks Jacobian dari sistem adalah:

$$\begin{bmatrix} \alpha I - (\mu + \delta_2) & -\alpha S & 0 & 0 \\ \alpha I & \alpha S - \eta - \beta - (\varphi + \mu + \delta_2) & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\gamma - \varphi - \mu & 0 \\ 0 & \eta & -\gamma & -\delta_2 - \mu \end{bmatrix}$$

Untuk memperoleh kestabilan sistem dititik E_0 terlebih dahulu dilakukan pelinearan disekitar titik tetap E_0 sehingga diperoleh matriks Jacobi untuk titik tetap bebas penyakit

$$J = \begin{bmatrix} -\delta_2-\mu & -\frac{\alpha(\delta_1+\Lambda-p\Lambda}{\delta_2+\mu} & 0 & 0 \\ 0 & -\beta-\delta_2-\eta-\mu+\frac{\alpha(\delta_1+\Lambda+p\Lambda)}{\delta_2+\mu}-\varphi & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\gamma-\varphi-\mu & 0 \\ 0 & \eta & -\gamma & -\delta_2-\mu \end{bmatrix}$$

(1)

Dari persamaan (1) diperoleh persamaan karakteristik

$$det(\lambda I - J) = 0$$

Dari persamaan karakteristik diperoleh nilai-nilai eigen dari matriks J, yaitu:

$$\lambda_1 = -\delta_2 - \mu$$
$$\lambda_2 = -\beta - \delta_2 - \eta - \mu + \frac{\alpha(\delta_1+\Lambda+p\Lambda)}{\delta_2+\mu} - \varphi$$
$$\lambda_3 = -\gamma - \varphi - \mu$$
$$\lambda_4 = -\delta_2 - \mu$$

Tabel 1. Nilai-nilai parameter

Parameter	Keterangan	Nilai Parameter
Λ	Laju kelahiran	6
δ_1	Laju migrasi	0.3
δ_2	Laju Emigrasi	0.3
α	Peluang laju transfer rendah ke infeksi	0.02
β	Peluang laju transfer infeksi ke karantina	0.17
η	Peluang laju kesembuhan tiap individu pada kelas infeksi	0.04
γ	Peluang laju kesembuhan tiap individu pada kelas karantina	0.06
φ	Laju kematian karena penyakit	0.001
μ	Laju kematian yang terjadi secara alami	0.1
p	Proporsi Imunisasi	0.1

3.4.Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi yang dinotasikan dengan R_0 adalah nilai harapan banyaknya infeksi tiap satuan waktu. Infeksi ini terjadi pada suatu populasi rentan yang dihasilkan oleh satu individu terinfeksi [10][11]. Dari model yang telah dibentuk diperoleh bilangan reproduksi dasar sebagai berikut:

$$R_0 = \frac{\alpha(\delta 1 + \Lambda - p\Lambda)}{(\delta 2 + \mu)(\beta + \delta 2 + \eta + \mu + \varphi)}$$

R_0 merupakan nilai ambang batas epidemik yang akan menjadi tolak ukur tingkat penyebaran Tuberkulosis dalam populasi. Kondisi yang memungkinkan dari bilangan reproduksi menurut van den Driessche & Watmough [10] adalah:

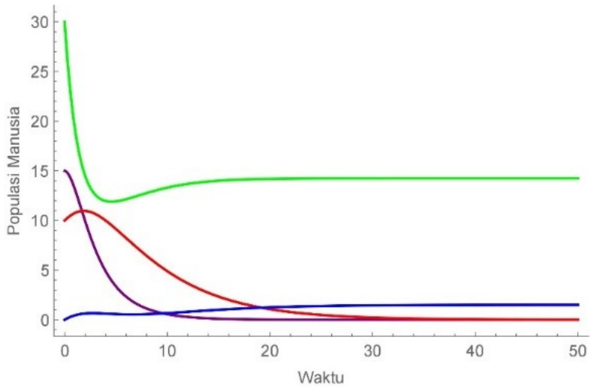
1) Jika $R_0 < 1$, maka jumlah individu yang terinfeksi akan menurun pada setiap generasi, sehingga penyakit akan menghilang.

2) Jika $R_0 > 1$, maka jumlah individu yang terinfeksi akan meningkat pada setiap generasi, sehingga penyakit akan meningkat dan mewabah.

3.5.Simulasi Numerik

Simulasi dilakukan dengan menggunakan nilai parameter yang terdapat pada Tabel 1. Nilai-nilai tersebut diperoleh berdasarkan data sekunder dan beberapa nilai parameter digunakan berdasarkan asumsi. Untuk melihat dinamika populasi berdasarkan nilai-nilai parameter yang telah ditentukan dapat menggunakan software Wolfarm Mathematica dengan nilai awal $s(0) = 30, i(0) = 15, q(0) = 10, r(0) = 0$.

Berdasarkan nilai-nilai parameter pada Tabel 1, diperoleh yaitu $R_0 < 1$. Dinamika penyebaran penyakit campak dengan pengaruh migrasi dan penambahan imunisasi tersebut disajikan dalam gambar berikut



Gambar 2. Dinamika populasi pada kondisi $R_0 < 1$

Simulasi model untuk nilai-nilai parameter pada Tabel 1 memberikan bilangan reproduksi dasar (R_0) sebesar 0.466448. Dilihat dari Gambar 2, pada kondisi $R_0 < 1$ grafiknya akan menuju disekitar titik tetap bebas penyakit $E_0 = (14.25, 0, 0, 1.5)$. Hal ini dapat dikatakan bahwa penyebaran penyakit campak tidak terjadi atau penyebaran penyakit campak akan menghilang.

4. Kesimpulan

Dengan melakukan migrasi pada kelas infeksi dan penambahan imunisasi pada kelas rentan maka R_0 akan semakin kecil yang menunjukkan berkurangnya epidemi dalam populasi sehingga penyebaran penyakit campak dapat dicegah.

Referensi

[1] M. F. Lamusu, D. Mamula, and F. Muhsana, "Analisis Kestabilan Titik Tetap pada Model Matematika Penyebaran HIV/AIDS," *EULER J. Ilm. Mat. Sains dan Teknol.*, vol. 7, no. 1, pp. 15–24, 2019.

[2] K. Humolungo, R. Paudi, and M. Penelitian, "Model Matematika SIUC pada Kasus Kanker Serviks," *EULER J. Ilm. Mat. Sains dan Teknol.,* vol. 7, no. 1, pp. 32–36, 2019.

[3] Jeffrey, C. R., "Introduction to Differential Equations and Boundary Value Problems. JohnWiley and Sons" The Hongkong University of Sience and Technology, New York, 2009.

[4] U. Maesaroh, Sugiyanto., "Model Matematika Untuk Kontrol Campak Menggunakan Vaksinasi" Fourier, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga, Yogyakarta., Vol. 2, hal. 97-110, 2013.

[5] S. Kholisoh dkk., "Model Epidemi SEIR Pada Penyebaran Penyakit Campak dengan Pengaruh

Vaksinasi" Unnes Journal of Mathematics., Vol. 1, No 2, hal. 110-117, 2012.
[6] Suandi Dhani, "Analisis Dinamik pada Model Penyebaran Penyakit Campak dengan Pengaruh Vaksin Permanen" Jurnal Kubik., Vol. 2, No. 2, hal. 1-10, 2018.
[7] M. Soleh, M. Yulsen, Wartono, Rahmawati, "Model SEIR Penyakit Campak Dengan Laju Penularan Nonlinier Incidence Rate" Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 11., Pekanbaru, November 2019.
[8] L. K. Baey, "Dinamika Penyebaran Campak Dengan Pengaruh Migrasi" Jurnal Sainsmat., Vol.VII, No.2, September 2018.
[9] W. D. Sihotang, C. C. Simbolon, J. Hartiny, D. Tindaon, L. P. Sinaga, "Analisis Kestabilan Model SEIR Penyebaran Penyakit Campak dengan Pengaruh Imunisasi dan Vaksin MR" Jurnal Matematika, Statistika & Komputasi., Vol. 16, No. 1, 107-113, July 2019.
[10] P. van den Driessche and J. Watmough, "Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission," *Math. Biosci.*, vol. 180, no. 1–2, pp. 29–48, Nov. 2002, doi: 10.1016/S0025-5564(02)00108-6.
[11] R. Resmawan and N. Nurwan, "Konstruksi Bilangan Reproduksi Dasar pada Model Epidemik SEIRS-SEI Penyebaran Malaria dengan Vaksinasi dan Pengobatan," *J. Mat. Integr.*, vol. 13, no. 2, p. 105-114, Sep. 2017.