EULER: Jurnal Matematika, Sains dan Teknologi, ISSN: 2087-9393
Juni 2019, Vol. 7, No. 1, Hal. 1-5

BILANGAN TERHUBUNG PELANGI PADA AMALGAMASI GRAF BERLIAN

Cindy Aisa Putri Noor[1]*, Karina Ansyelia Mamonto[2], Widya Eka Pranata[3]

[1,2,3]Jurusan Matematika, Universitas Negeri Gorontalo, Bone Bolango 96119, Indonesia

Penulis Korespondensi. Email: cindy.aisa2010@gmail.com

Abstrak

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung tak trivial. Graf G dikatakan terhubung pelangi jika untuk setiap dua titik x dan y terdapat lintasan pelagi dari x dan y. Bilangan terhubung pelangi didefinisikan sebagai minimum k dari pewarnaan$-k$ pelangi sehingga menghasilkan sebuah lintasan pelangi dengan dua sisi bertetangga memiliki warna yang berbeda dan dinotasikan sebagai $rc(G)$. Misalkan t adalah bilangan asli dengan $t \geq 2$ dan misalkan $\{G_i | i \in [1, t]\}$ adalah graf terhubung tak trivial dengan setiap G_i mempunyai titik tetap v_{0i}, maka amalgamasi untuk graf G dinotasikan dengan $Amal(G_i, v_{0i}, t)$. Amalgamasi merupakan salah satu operasi matematika yang terbentuk dengan merekatkan semua graf G_i pada titik v_{0i} dengan titik v_{0i} merupakan titik terminal. Dalam penelitian ini operan yang digunakan pada operasi amalgamasi adalah graf berlian dengan notasi $Amal(Br_n, v, t)$ dengan $t \geq 2$.

Kata Kunci: Bilangan Terhubung; Pelangi; Amalgamasi; Graf Berlian

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan cabang ilmu matematika yang mempelajari tentang sifat-sifat graf. Graf merupakan himpunan tak trivial dari pasangan himpunan *(V,E)*, dengan *V* merupakan himpunan tidak kosong dari titik (*vertex*) dan *E* merupakan himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan sepasang titik dimana *E* mungkin saja kosong. Pasangan himpunan tersebut dinotasikan dengan *G = (V,E)* [1].

Seiring berjalannya waktu, teori graf mengalami perkembangan pesat dengan lahirnya cabang-cabang ilmu baru seperti pelabelan graf, penjodohan, bilangan terhubung pelangi, hingga amalgamasi. Amalgamasi merupakan sebuah operasi graf dengan pasangan titik graf *(G,u)* dan *(H,v)* yang diperoleh dengan menggabungkan titik *u* dan *v* menjadi satu titik [2].

Salah satu cabang ilmu baru dari teori graf adalah bilangan terhubung pelangi yang pertama kali diperkenalkan oleh Chatrand [3]. Bilangan terhubung pelangi merupakan minimum k dari pewarnaan$-k$ pelangi sehingga menghasilkan sebuah lintasan pelangi dengan dua sisi bertetangga memiliki warna yang berbeda. Jika graf G memiliki diameter yang berupa jarak terdekat antara v_1 dan v_2 yang dinotasikan dengan $diam(G)$ dan juga memiliki sisi sebanyak m, maka :

$$diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m \tag{1}$$

Dari penjelasan diatas maka muncullah gagasan untuk melakukan penelitian bilangan terhubung pelangi dengan menggunakan operasi amalgamasi. Adapun operan yang digunakan dalam operasi amalgamasi ini adalah graf berlian dengan titik yang diambil adalah titik *v* pada graf berlian. Graf berlian merupakan graf dengan $2n$ titik yang diperoleh dari graf tangga segitiga dengan $2n - 1$ titik dan ditambahkan satu titik dan beberapa sisi tertentu dengan notasi Br_n [4].

2. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode penelitian studi literatur (library research). Pada penelitian ini dilakukan kajian terhadap buku, textbook, jurnal, dan artikel-artikel ilmiah mengenai amalgamasi dan graf berlian. Adapun langkah-langkah yang dilakukan adalah

1. Mempelajari literatur,

Submit: 10 April 2019, Diterima: 9 Juni 2019, Online: 30 Juni 2019 .

Diterbitkan oleh: Jurusan Matematika Universitas Negeri Gorontalo

2. Menggambar bentuk amalgamasi graf berlian,
3. Menentukan pola pewarnaan amalgamasi graf berlian, dan
4. Membuktikan teorema.

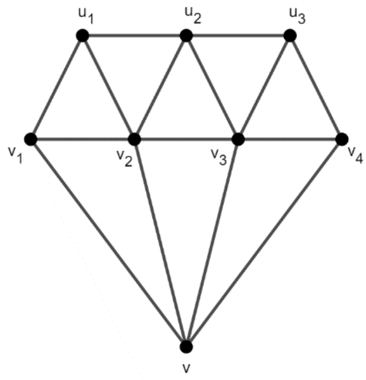
3. Pembahasan

Graf berlian dinotasikan dengan Br_n dengan definisi sisi dan titik sebagai berikut :

$V(Br_n) = \{v\} \cup \{v_i | i \in \{1,2, \dots, n\}\} \cup \{u_i | i \in \{1,2, \dots n-1\}\}$

$E(Br_n) = \{vv_i | i \in \{1,2, \dots, n\}\} \cup \{v_i v_{i+1} | i \in \{1,2, \dots, n-1\}\} \cup \{u_i u_{i+1} | i \in \{1,2, \dots, n-2\}\}$
$\cup \{u_i v_i | i \in \{1,2, \dots, n-1\}\} \cup \{u_i v_{i-1} | i \in \{1,2, \dots, n-1\}\}$

Gambar graf berlian Br_4 dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf Berlian Br_4

Amalgamasi graf berlian (Br_n) sebanyak t dengan v adalah titik terminal dinotasikan dengan $Amal(Br_n, v, t)$ dengan $4 \leq n \leq 6$. $Amal(Br_n, v, t)$ memiliki diameter 4 dan didefinisikan sebagai berikut :

$$V\big(Amal(Br_n, v, t)\big) = \begin{cases} u_{i,j}, & i \in [1,t] \quad j \in [1, n-1] \\ v_{i,j}, & i \in \{1,t] \qquad j \in [1,n] \\ v & \end{cases}$$

$$E\big(Amal(Br_n, v, t)\big) = \begin{cases} u_{i,j}u_{i,j+1}; & i \in [1,t], \quad j \in [1, n-2] \\ v_{i,j}v_{i,j+1}; & i \in [1,t], \quad j \in [1, n-1] \\ u_{i,j}v_{i,j}; & i \in [1,t], \quad j \in [1, n-1] \\ u_{i,j}v_{i,j+1}; & i \in [1,t], \quad j \in [1, n-1] \\ v_{i,j}v; & i \in [1,t], \quad j \in [1, n] \end{cases}$$

Teorema 1

Misalkan $G \cong Amal(Br_n, v, t)$ dengan bilangan bulat $4 \leq n \leq 6$ dan $t \geq 2$, maka bilangan terhubung pelangi pada G adalah :

$$rc\,\big(Amal(Br_n, v, t)\big) = 2t.$$

Bukti

Untuk $Amal(Br_n, v, t)$ dengan bilangan bulat $4 \leq n \leq 6$ dan $t \geq 2$ memiliki diameter 4 dan bilangan terhubung pelangi 2t. Karena $rc(Amal(Br_n, v, t)) = 2$ dan $t \geq 2$ maka $rc\big(Amal(Br_n, v, t)\big) \geq 4$, sehingga

$diam(Amal(Br_n,v,t)) \leq rc(Amal(Br_n,v,t))$. Definisikan pewarnaan $c: E(G) \to \{1,2,3,..\}$ sebagai berikut:

$c(u_{i,j}u_{i,j+1}) = j$, untuk $i \in [1,t],\ j \in [1,n-2]$

$c(v_{i,j}v_{i,j+1}) = (j+1) mod\ 2 + 2i - 3$, untuk $i \in [2,t],\ j \in [1,n-1]$

$c(v_{1,j}v_{1,j+1}) = 2t - (j\ mod\ 2)$, untuk $j \in [1,n-1]$

$c(vv_{i,j}) = 2i - 1 + \left\lfloor \frac{j}{4} \right\rfloor$, untuk $i \in [1,t],\ j \in [1,n]$

$$c(u_{i,j}v_{i,j}) = \begin{cases} 2i, & untuk\ i \in [1,t], \quad j \in [1,3] \\ 2i-1, & untuk\ i \in [1,t], \quad j \in [4,5] \end{cases}$$

$c(u_{i,j}v_{i,j+1}) = 2i + 1$, untuk $i \in [1,t],\ j \in [1,n],\ 2t+1 = 1$

Pewarnaan pelangi untuk amalgamasi graf berlian $Amal(Br_4,v,2), Amal(Br_5,v,3)$, dan $Amal(Br_6,v,4)$ berturut-turut dapat dilihat pada gambar 3.2, gambar 3.2, dan gambar 3.4. Untuk menunjukan bahwa terdapat lintasan dari titik x ke titik y di $V(Amal(Br_n,v,t))$ dengan $diam(Amal(Br_n,v,t)) = 4$, maka diperoleh lintasan pelangi :

Kasus 1. Untuk $n = 4$

Subkasus 1.1. Lintasan berjarak 2

Misalkan $x = u_{i,j}$ dan $y = v_{i,j+2}$ dengan $i \in [1,t]$, dan $j \in [1,2]$. Terdapat lintasan pelangi x ke y yaitu $u_{i,j}, u_{i,j+1}, v_{i,j+2}$.

Kasus 2. Untuk $4 \leq n \leq 6$

Subkasus 2.1. Lintasan berjarak 2

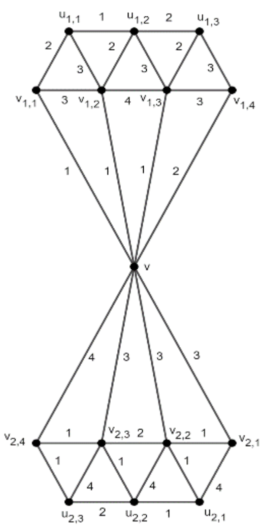
1. Misalkan $x = u_{i,j}$ dan $y = v$ dengan $i \in [1,t]$ dan $j \in [1,n-1]$. Terdapat lintasan pelangi x ke y yaitu $u_{i,j}, v_{i,j}, v$.
2. Misalkan $x = u_{i,j}$ dan $y = u_{i,j+2}$ dengan $i \in [1,t]$ dan $j \in [1,n-3]$. Terdapat lintasan pelangi x ke y yaitu $u_{i,j}, u_{i,j+1}, u_{i,j+2}$.
3. Misalkan $x = v_{i,j}$ dan $y = v_{i,j+2}$ dengan $i \in [1,t]$ dan $j \in [1,n-2]$. Terdapat lintasan pelangi x ke y yaitu $v_{i,j}, v_{i,j+1}, v_{i,j+2}$.
4. Misalkan $x = v_{i,j}$ dan $y = v_{i,l}$ dengan $i \in [1,t],\ j \in [1,n-3]$ dan $l \in [4,n]$. Terdapat lintasan pelangi x ke y yaitu $v_{i,j}, v, v_{i,l}$.
5. Misalkan $x = v_{i,j}$ dan $y = v_{k,l}$ dengan $i \in [1,t-1],\ j,l \in [1,n]$ dan $k \in [i+1,t]$. Terdapat lintasan pelangi x ke y yaitu $v_{i,j}, v, v_{k,l}$.
6. Misalkan $x = v_{i,j}$ dan $y = u_{i,j+1}$ dengan $i \in [1,t]$, dan $j \in [1,n-2]$. Terdapat lintasan pelangi x ke y yaitu $v_{i,j}, v_{i,j+1}, u_{i,j+1}$.

Subkasus 2.2. Lintasan berjarak 3

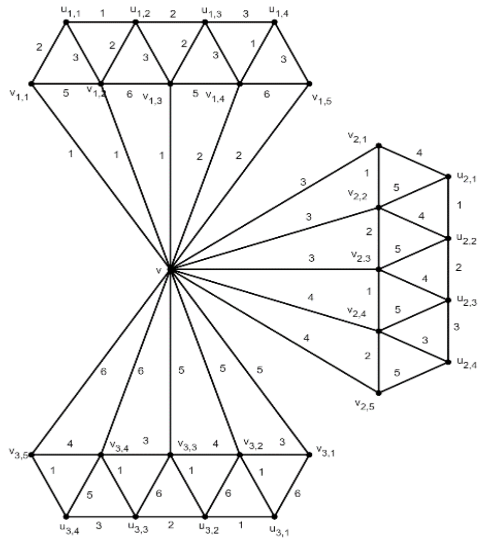
1. Misalkan $x = u_{i,j}$ dan $y = v_{i,l}$ dengan $i \in [1,t],\ j \in [1,n-3]$, dan $l \in [4,n]$. Terdapat lintasan pelangi x ke y yaitu $u_{i,j}, v_{i,j+1}, v, v_{i,l}$.
2. Misalkan $x = v_{i,j}$ dan $y = u_{i,l}$ dengan $i \in [1,t],\ j \in [1,n-3]$, dan $l \in [3,n-1]$. Terdapat lintasan pelangi x ke y yaitu $v_{i,j}, v, v_{i,l+1}, u_{i,l}$.
3. Misalkan $x = u_{i,j}$ dan $y = v_{k,l}$ dengan $i \in [1,t-1],\ j \in [1,n-1]$, $k \in [i+1,t]$, dan $l \in [1,n]$. Terdapat lintasan pelangi x ke y yaitu $u_{i,j}, v_{i,j}, v, v_{k,l}$.
4. Misalkan $x = v_{i,j}$ dan $y = u_{k,l}$ dengan $i \in [1,t-1],\ j \in [1,n]$, $k \in [i+1,t]$, dan $l \in [1,n-1]$. Terdapat lintasan pelangi x ke y yaitu $v_{i,j}, v, v_{k,l}, u_{k,l}$.

Subkasus 2.3. Lintasan berjarak 4

Misalkan $x = u_{i,j}$ dan $y = u_{k,l}$ dengan $i \in [1, t-1]$, $j, l \in [1, n-1]$, dan $k \in [i+1, t]$. Terdapat lintasan pelangi x ke y yaitu $u_{i,j}, v_{i,j}, v, v_{k,l}, u_{k,l}$.



Gambar 2. Pewarnaan Pelangi $Amal(Br_4, v, 2)$



Gambar 3. Pewarnaan Pelangi $Amal(Br_5, v, 3)$

Kasus 3. Untuk $n = 5$ dan $n = 6$

Subkasus 3.1. Lintasan berjarak 2

Subkasus 3.1. Lintasan berjarak 2

Misalkan $x = u_{i,j}$ dan $y = v_{i,j+2}$ dengan $i \in [1, t]$, dan $j \in [1, n-2]$. Terdapat lintasan pelangi x ke y yaitu $u_{i,j}, v_{i,j+1}, v_{i,j+2}$.

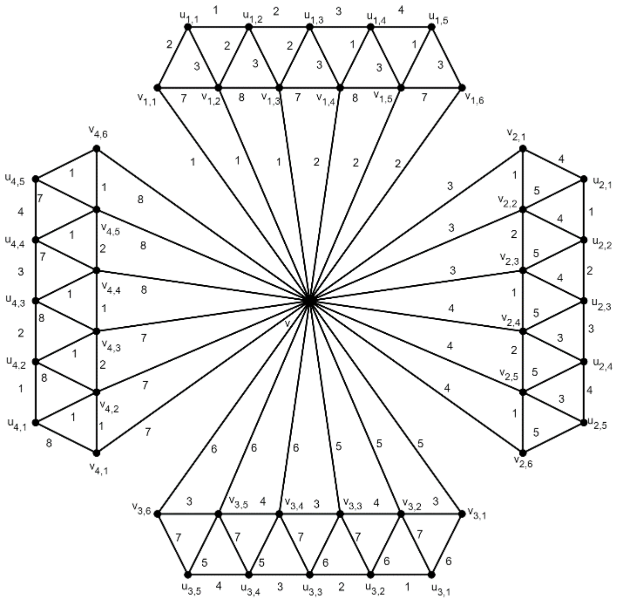
Subkasus 3.1. Lintasan berjarak 3

Misalkan $x = u_{i,j}$ dan $y = u_{i,j+3}$ dengan $i \in [1, t]$ dan $j \in [1, n-4]$. Terdapat lintasan pelangi x ke y yaitu $u_{i,j}, u_{i,j+1}, u_{i,j+2}, u_{i,j+3}$.

Kasus 4. Untuk $n = 6$

Subkasus 4.1. Lintasan berjarak 4

Misalkan $x = u_{i,1}$ dan $y = u_{i,5}$ dengan $i \in [1, t]$. Terdapat lintasan pelangi x ke y yaitu $u_{i,1}, u_{i,2}, u_{i,3}, u_{i,4}, u_{i,5}$.



Gambar 4. Pewarnaan Pelangi $Amal(Br_6, v, 4)$

4. Kesimpulan

Dari pembahasan diatas maka diperoleh bilangan terhubung pelangi pada amalgamasi graf berlian adalah :

$$rc\left(Amal(Br_n, v, t)\right) = 2t.$$

Penelitian selanjutnya dapat dilanjutkan untuk $n \geq 6$.

Referensi

[1] R. Munir, *Matematika Disktrit*, 3rd ed. Bandung: Informatika Bandung, 2010.

[2] J. L. Gross, "Genus distribution of graph amalgamations: Self-pasting at root-vertices," *Australas. J. Comb.*, vol. 49, pp. 19–38, 2011.

[3] G. Chartrand, D. Erwin, P. Zhang, and M. Bohemica, "Mathematica Bohemica Terms of use:," vol. 127, no. 1, 2008.

[4] M. A. Shulhany and A. N. M. Salman, "Bilangan Terhubung Pelangi Graf Berlian," 2015.