EULER: Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi
Journal Homepage: http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/Euler
DOI:https://doi.org/10.34312/euler.v9i1.10486
Juni 2021, Vol. 9, No. 1, Hal. 17-23

APLIKASI INTEGRAL UNTUK MEMBUKTIKAN RUMUS KELILING LINGKARAN

Ayyidatul Imaniyah[1], Keto Susanto[2*], Andika Setyo Budi Lestari[3]

[1,2,3] Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas PGRI Wiranegara, Pasuruan, Indonesia
*Penulis Korespondensi. Email: ketosusanto@uniwara.ac.id

Abstrak

Integral dapat digunakan untuk menentukan beberapa besaran, salah satunya adalah menentukan panjang kurva pada bidang. Hal ini dapat diaplikasikan untuk membuktikan rumus keliling lingkaran. Penelitian ini bertujuan untuk menjelaskan cara membuktikan rumus keliling lingkaran dengan menggunakan integral tunggal yang dinyatakan dalam koordinat kartesius maupun koordinat polar. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pembuktian rumus keliling lingkaran dapat dilakukan dengan menentukan turunan implisit dari persamaan lingkaran. Selanjutnya, persamaan lingkaran dan turunan implisit tersebut disubstitusikan ke dalam rumus integral untuk menentukan panjang kurva yang dinyatakan dalam koordinat kartesius maupun koordinat polar sehingga diperoleh rumus keliling lingkaran.

Kata Kunci: Integral; Keliling Lingkaran; Koordinat Kartesius, Koordinat Polar

Abstract

Integral can be used to determine several quantities, one of them is to determine the length of a curve in the plane. It can be applied to prove the circumference formula of a circle. This research aims to explain how to prove the circumference formula of a circle using a single integral expressed in both cartesian and polar coordinates. The method used in this research is a study of literature. The result of this research shows that proving the circumference of a circle can be done by determining the implicit derivative of the circle equation. Then, the circle equation and its implicit derivative are substituted into the integral formula for determining the length of the curve in both cartesian and polar coordinates so that the circumference formula of a circle is obtained.

Keywords: *Integral; Circumference of a Circle; Cartesian Coordinates; Polar Coordinates*

1. Pendahuluan

Integral merupakan salah satu teori dalam matematika yang penting dan tetap berkembang, baik secara teoritis maupun penerapan. Oleh karena itu, integral menjadi materi yang dianggap perlu untuk dipelajari [1] [2]. Secara umum, terdapat dua konsep integral, yaitu integral tertentu dan integral tak tentu [3]. Dalam aplikasinya, integral tertentu banyak digunakan untuk menentukan beberapa besaran, di antaranya ialah luas daerah bidang datar, volume dan luas permukaan benda putar, serta panjang kurva pada bidang [4].

Penerapan integral dalam menentukan panjang kurva pada bidang dapat digunakan untuk membuktikan rumus keliling lingkaran. Lingkaran merupakan himpunan titik-titik pada suatu bidang yang berjarak tetap dari titik tertentu yang disebut sebagai pusat lingkaran [5]. Negoro [6] menyatakan lingkaran sebagai kurva tertutup sederhana, panjang kurva tersebut dinamakan keliling lingkaran.

Penentuan panjang kurva yang memiliki batasan melengkung seperti lingkaran adalah dengan menggunakan pendekatan poligon, yakni melalui aproksimasi kurva melalui ruas-ruas garis

Submit: 14 Mei 2021, Diterima: 27 Mei 2021, Online: 27 Mei 2021

poligon. Akan tetapi, metode ini hanya akan menghasilkan bilangan pendekatan. Oleh karena itu, untuk memperoleh hasil yang akurat, maka aproksimasi tersebut dilanjutkan dengan menjumlahkan panjang totalnya, kemudian menghitung limit seiring bertambahnya ruas garis poligon tersebut. Dengan demikian, keliling lingkaran dapat diartikan sebagai limit dari panjang poligon yang membentuknya [7] [8]. Prosedur ini secara matematis dapat ditulis sebagai metode integral tertentu [9]. Sehingga, dalam penelitian ini rumus keliling lingkaran akan dibuktikan dengan menggunakan integral tertentu, baik dalam koordinat kartesius maupun koordinat polar.

Pada studi awal yang telah dilakukan peneliti untuk menentukan keliling lingkaran, diperoleh hasil bahwa bekerja dalam koordinat polar dinilai lebih mudah bila dibandingkan dalam koordinat kartesius. Hidayati [10] dalam penelitiannya menentukan rumus keliling dan luas lingkaran dengan menggunakan integral tunggal. Akan tetapi, penelitian yang dilakukan oleh Imaniyah [11] dan Hidayati [10] hanya melibatkan lingkaran yang berpusat di titik $(0,0)$. Oleh karena itu, perlu dilakukan penelitian lebih lanjut terkait pembuktian rumus keliling lingkaran pada pusat (a, b) dalam koordinat kartesius serta lingkaran pada pusat (r, θ) dalam koordinat polar dengan menggunakan integral tunggal. Berdasarkan uraian tersebut, maka penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana cara membuktikan rumus keliling lingkaran dengan menggunakan integral baik dalam koordinat kartesius maupun koordinat polar.

2. Metode Penelitian

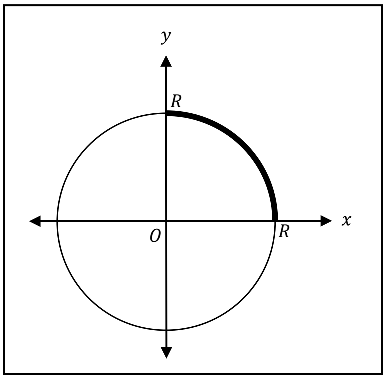
Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif yang mendeskripsikan cara membuktikan rumus keliling lingkaran dengan menggunakan integral. Adapun metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka, di mana data diperoleh berdasarkan analisis sumber pustaka yang relevan. Data yang dikumpulkan berupa definisi dan hasil-hasil yang telah dibuktikan sebelumnya untuk selanjutnya digunakan dalam pembuktian rumus keliling lingkaran.

Pembuktian rumus keliling lingkaran dilakukan menggunakan integral tunggal yang melibatkan lingkaran dengan pusat $(0,0)$ dan (a, b) dalam koordinat kartesius serta lingkaran dengan pusat $(0,0)$ dan (r, θ) dalam koordinat polar. Prosedur yang digunakan untuk membuktikan rumus keliling lingkaran menggunakan integral dalam koordinat kartesius adalah dengan menentukan turunan implisit dari persamaan lingkaran, kemudian menyubstitusikannya ke dalam rumus panjang kurva pada bidang. Demikian pula prosedur yang digunakan dalam membuktikan rumus keliling lingkaran dengan menggunakan integral dalam koordinat polar.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Pembuktian Rumus Keliling Lingkaran dengan Integral dalam Koordinat Kartesius

Dalam membuktikan rumus keliling lingkaran dengan menggunakan integral, diperlukan turunan implisit dari persamaan lingkaran dalam koordinat kartesius. Gambar keliling lingkaran yang berpusat di (0,0) pada koordinat kartesius diberikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Keliling lingkaran dengan pusat $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ dalam koordinat kartesius

Persamaan lingkaran dengan pusat (0,0) dan berjari-jari R dalam koordinat kartesius adalah

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{1}$$

Dengan menentukan turunan implisit dari persamaan (1), diperoleh

$$2x\,dx + 2y\,dy = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{2}$$

Dapat dilihat pada Gambar 1 bahwa keliling lingkaran adalah empat kali panjang kurva pada interval $[0, R]$. Dengan demikian, rumus keliling lingkaran dengan pusat (0,0) menggunakan integral dalam koordinat kartesius ditentukan sebagai berikut.

$$\frac{1}{4}K = \int_0^R \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_0^R \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx \tag{3}$$

Dengan menyubstitusikan (1) dan (2) ke dalam persamaan (3), diperoleh

$$\frac{1}{4}K = \int_0^R \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}}\ dx \tag{4}$$

Dengan memisalkan

$$\frac{x}{R} = \sin u, \tag{5}$$

maka

$$dx = R\cos u\ du\,, \qquad x = 0 \to u = 0, \qquad \text{dan} \qquad x = R \to u = \frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

Oleh karena itu, persamaan (4) dapat ditulis sebagai

$$\frac{1}{4}K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 u}}\ R\cos u\ du = \frac{1}{2}\pi R \tag{7}$$

sehingga rumus keliling lingkaran adalah

$$K = 2\pi R \tag{8}$$

Keliling lingkaran juga dapat ditentukan dengan merepresentasikan turunan implisit dari persamaan (1) ke dalam bentuk $\frac{dx}{dy}$ [9] [8].

$$2x\,dx + 2y\,dy = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x} \tag{9}$$

Berdasarkan (1) dan (9), rumus keliling lingkaran berpusat di(0,0) menggunakan integral dalam koordinat kartesius adalah

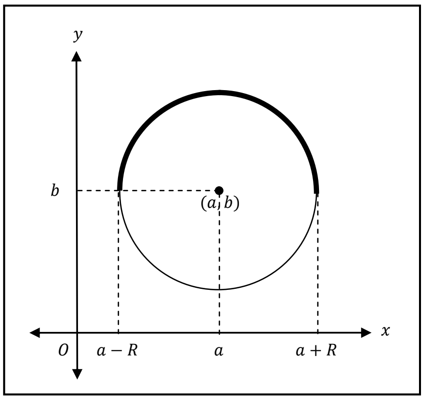
$$\frac{1}{4}K = \int_{0}^{R} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{R}\right)^2}}\, dy \tag{10}$$

Dengan memisalkan

$$\frac{y}{R} = \sin u, \tag{10}$$

dengan cara yang sama diperoleh rumus keliling lingkaran seperti pada persamaan (8).

Selanjutnya, dibuktikan rumus keliling lingkaran berpusat di $(a,b),\ a,b \neq 0$ menggunakan integral. Gambar 2 adalah gambar keliling lingkaran dengan pusat di (a,b) pada koordinat kartesius.



Gambar 2. Keliling lingkaran dengan pusat (a,b) pada interval $[a-R, a+R]$

Persamaan lingkaran dengan pusat $(a,b),\ a,b \neq 0$ adalah

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \tag{11}$$

atau

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2 \tag{12}$$

Jika persamaan (12) diturunkan secara implisit, diperoleh:

$$2(x-a)\, dx + 2(y-b)dy = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x-a}{y-b} \tag{13}$$

Dengan membagi lingkaran menjadi dua seperti pada Gambar 2, maka keliling lingkaran sama dengan dua kali panjang kurva pada interval $[a-R, a+R]$. Sehingga, rumus keliling lingkaran ditentukan oleh persamaan berikut.

$$\frac{1}{2}K = \int_{a-R}^{a+R} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}\ dx = \int_{a-R}^{a+R} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx. \tag{14}$$

Persamaan berikut diperoleh dengan menyubstitusikan (11) dan (13) pada (14).

$$\frac{1}{2}K = \int_{a-R}^{a+R} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-a}{R}\right)^2}}\, dx. \tag{15}$$

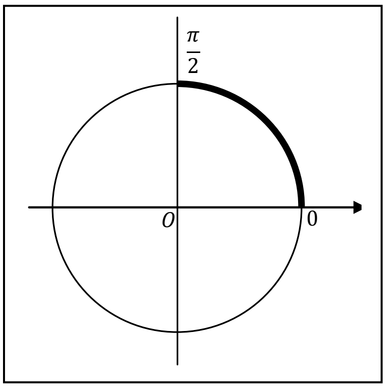
Selanjutnya dilakukan cara yang sama dengan (5)-(7) dan dengan memisalkan $\frac{x-a}{R} = \sin u$. maka persamaan (15) menjadi

$$\frac{1}{2}K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}} R\cos u\, du = \pi R, \tag{16}$$

sehingga diperoleh rumus keliling lingkaran yang sama dengan (8). Rumus keliling lingkaran (11) juga dapat diperoleh dengan menghitung panjang kurva pada interval $y \in [b-R, b+R]$ dan memisalkan $\frac{y-b}{R} = \sin u$.

3.2 Pembuktian Rumus Keliling Lingkaran dengan Integral dalam Koordinat Polar

Keliling lingkaran yang berpusat di titik $(0,0)$ dalam koordinat polar dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Keliling lingkaran dengan pusat $(0,0)$ dalam koordinat polar

Dimisalkan r adalah jari-jari lingkaran pada koordinat polar. Dengan demikian, $r = R$ dan

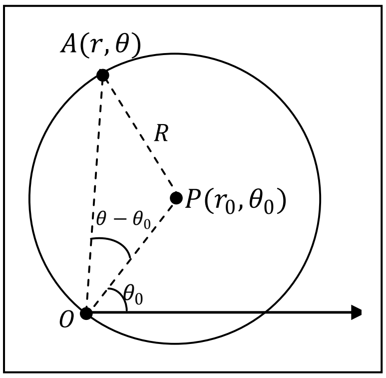
$$\frac{dr}{d\theta} = 0. \tag{17}$$

Keliling lingkaran adalah 4 kali panjang kurva pada interval $[0, \frac{\pi}{2}]$ (Gambar 3), sehingga dapat ditentukan rumus seperempat keliling lingkaran dengan pusat $(0,0)$ dalam koordinat polar sebagai berikut.

$$\frac{1}{4}K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2+0^2}\, d\theta = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}R. \tag{18}$$

Dengan demikian, diperoleh rumus keliling lingkaran yang sama, yakni $K = 2\pi R$.

Selanjutnya, ditentukan rumus keliling lingkaran dengan pusat (r_0, θ_0) dalam koordinat polar dengan $r_0 \neq 0$ dan $\theta_0 \neq 0$ berturut-urut adalah modulus dan argumen titik pusat lingkaran. Keliling lingkaran dengan pusat (r_0, θ_0) diilustrasikan seperti pada Gambar 4.



Gambar 4. Keliling lingkaran dengan pusat (r_0, θ_0) dalam koordinat polar

Pada ilustrasi Gambar 4, dipenuhi

$$r = 2R\cos(\theta - \theta_0) \tag{19}$$

Dengan menentukan turunan implisit dari persamaan (19) diperoleh

$$\frac{dr}{d\theta} = -2R\sin(\theta - \theta_0) \tag{1}$$

Selanjutnya, rumus keliling lingkaran dengan pusat (r_0, θ_0) ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
K = \int_0^\pi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta &= \int_0^\pi \sqrt{4R^2\cos^2(\theta - \theta_0) + 4R^2\sin^2(\theta - \theta_0)}\, d\theta \\
&= \int_0^\pi \sqrt{4R^2\cos^2(\theta - \theta_0) + 4R^2\sin^2(\theta - \theta_0)}\, d\theta \\
&= \int_0^\pi \sqrt{4R^2(\cos^2(\theta - \theta_0) + \sin^2(\theta - \theta_0))}\, d\theta \\
&= \int_0^\pi \sqrt{4R^2}\, d\theta \\
&= 2R\int_0^\pi d\theta = 2R[\theta]_0^\pi = 2\pi R
\end{aligned}$$

Metode pengintegralan dalam menentukan rumus keliling lingkaran dapat dilakukan dengan menggunakan integral tunggal. Prosedur yang ditempuh dapat dilakukan dalam koordinat kartesius maupun koordinat polar. Keduanya memiliki tingkat kesulitan masing-masing. Pembuktian dalam koordinat kartesius membutuhkan teknik pengintegralan yang panjang, sebagaimana yang jelaskan Imaniyah [11]. Sementara itu, sesuai dengan yang dikemukakan oleh Apriandi [12] dan Utari [13], menggunakan prosedur dalam koordinat polar membutuhkan kecermatan pada proses konversi variabel, penentuan batas, serta penulisan bentuk integrasi dalam koordinat polar.

4. Kesimpulan

Integral dapat diaplikasikan untuk membuktikan rumus keliling lingkaran, baik dalam koordinat kartesius maupun koordinat polar. Secara geometris, lingkaran dapat dibagi menjadi beberapa busur dengan panjang yang sama untuk selanjutnya ditentukan batas-batas integrasi yang tepat. Prosedur membuktikan rumus keliling lingkaran dengan menggunakan integral dalam koordinat kartesius yaitu dengan menurunkan persamaan lingkaran secara implisit dan menggunakan rumus panjang kurva dengan integral tunggal, yakni $K = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Demikian juga dalam membuktikan rumus keliling lingkaran dalam koordinat polar. Persamaan lingkaran diturunkan secara implisit untuk selanjutnya disubstitusikan ke dalam rumus panjang kurva $K = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\ d\theta$ sehingga didapatkan rumus keliling lingkaran $(2\pi R)$.

Referensi

[1] A. S. B. Lestari, “Analisis Kesulitan Mahasiswa Angkatan 2013 Program Studi Pendidikan Matematika STKIP PGRI Pasuruan pada Pokok Bahasan Teknik Pengintegralan,” *Jurnal Ilmiah Edukasi & Sosial*, vol. 5, no. 1, pp. 1–11, 2014.

[2] K. Susanto dan F. Fuat, “Karakteristik Fungsi Dua Variabel Pembentuk Benda dalam Menentukan Volumenya Menggunakan Integral Rangkap dengan Shell Method,” *Jurnal Ilmiah Edukasi & Sosial*, vol. 5, no. 1, pp. 50–54, Sep 2017.

[3] R. P. A. Astatik, W. Wuryanto, dan M. Masrukan “Aplikasi Integral Lipat Dua dalam Perhitungan Volume Bangun Ruang di R3 dengan Menggunakan Program Maple,” *Unnes Journal of Mathematics,* vol. 2, no.1, pp. 24–31, 2013.

[4] M. H. Baisuni, *Kalkulus*. Jakarta: UI Press, 1986.

[5] D. C. Alexander dan G. M. Koeberlein, *Elementary Geometry for College Students*, Sixth Edition. Stamford: Cengage Learning, 2014.

[6] S. T. Negoro dan B. Harahap, *Ensiklopedia Matematika*, Edisi Ketiga. Bogor: Ghalia Indonesia, 2017.

[7] J. Stewart, *Kalkulus*, Edisi 5 Buku 2. Jakarta: Salemba Teknika, 2011.

[8] D. Varberg, E. J. Purcell, dan S. E. Rigdon, *Pearson New International Edition Calculus Early Transcendentals*, First Edition. London: Pearson Education Limited, 2014.

[9] F. Ayres dan E. Mendelson, *Schaum’s Outline Calculus, 6th Edition by Frank Ayres, Elliott Mendelson*, Sixth Edition. New York: The McGraw-Hill Companies, 2013.

[10] L. N. Hidayati, “Aplikasi Integral untuk Menentukan Keliling dan Luas Lingkaran,” STKIP PGRI Pasuruan, Pasuruan, 2016.

[11] A. Imaniyah, “Pembuktian Rumus Keliling Lingkaran dengan Integral Polar,” dalam *Seminar Nasional Pendidikan dan Ilmu Matematika (SENANDIKA) 2019*, Malang, 2019, pp. 52–58.

[12] D. Apriandi dan I. Krisdiana, “Analisis Kesulitan Mahasiswa dalam Memahami Materi Integral Lipat Dua pada Koordinat Polar Mata Kuliah Kalkulus Lanjut,” *Al-Jabar : Jurnal Pendidikan Matematika*, vol. 7, no. 2, pp. 123–134, Des 2016, doi: 10.24042/ajpm.v7i2.19.

[13] R. S. Utari, “Kesalahan Pemahaman Konsep Peserta Didik dalam Menyelesaikan Soal-Soal Integral Lipat Dua pada Koordinat Polar,” *Jurnal Inovasi Matematika*, vol. 3, pp. 51–61, Jan 2021, doi: 10.35438/inomatika.v3i1.226.