

Pelabelan Antiajaib Berdasarkan Jarak pada Operasi Perkalian Tensor Graf

Christyan Tamaro Nadeak^{1*}

¹Program Studi Sains Data, Institut Teknologi Sumatera, Lampung Selatan 35365, Indonesia

*Penulis Korespondensi. Email: christyan.nadeak@sd.itera.ac.id

Abstrak

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf berorde n . Misalkan $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ merupakan suatu bijeksi. Untuk sebarang titik $v \in V$, jumlahan $\sum_{w \in N(v)} f(w)$ merupakan bobot dari titik v dan dinotasikan dengan $\omega(v)$, dengan $N(v)$ merupakan himpunan tetangga buka dari titik v . Jika $\omega(x) \neq \omega(y)$ untuk setiap pasangan titik berbeda x dan y , maka f merupakan pelabelan antiajaib berdasarkan jarak. Jika suatu graf G memiliki pelabelan antiajaib berdasarkan jarak, maka G adalah graf antiajaib berdasarkan jarak. Penelitian ini membahas pelabelan antiajaib berdasarkan jarak untuk perkalian tensor antara dua graf lengkap. Penelitian ini juga membahas mengenai syarat cukup untuk suatu graf hasil perkalian antara graf beraturan dan graf lengkap merupakan graf antiajaib berdasarkan jarak.

Kata Kunci: Pelabelan antiajaib berdasarkan jarak; Perkalian Tensor; Graf Lengkap

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a graph of order n . Let $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ be a bijection. For any vertex $v \in V$, the neighbor sum $\sum_{w \in N(v)} f(w)$ is called the weight of the vertex v and is denoted by $\omega(v)$, where $N(v)$ is the open neighborhood of v . If $\omega(x) \neq \omega(y)$ for any two distinct vertices x and y , then f is called a distance antimagic labelling. If the graph G admits such a labelling, then G is said to be a distance antimagic graph. This study gives a distance antimagic labelling for tensor product of two complete graph and sufficient condition so that the tensor product of a regular graph and complete graph is a distance antimagic graph.

Keywords: Distance Antimagic Labeling; Tensor Product; Complete Graph

1. Pendahuluan

Konsep pelabelan ajaib berdasarkan jarak diperoleh dari suatu pengamatan mengenai konstruksi dari persegi ajaib. Sebuah persegi ajaib dengan sisi n merupakan sebuah *array* $n \times n$ dengan setiap entrinya merupakan suatu susunan dari bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, n^2\}$, sehingga entri-entri pada setiap baris, setiap kolom, dan diagonal pada persegi ajaib tersebut memiliki jumlahan yang sama. Termotivasi oleh pengamatan ini, Vilfred [1] pada tahun 1994 dalam tesis doktoralnya memperkenalkan konsep pelabelan sigma. Secara terpisah konsep ini dikenalkan juga oleh Miller, Rodgers, dan Simanjuntak pada tahun 2003 [2]. Pelabelan ajaib berdasarkan jarak dari graf G merupakan sebuah bijeksi $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$ yang memenuhi terdapat suatu konstanta k , sehingga untuk setiap v in $V(G)$ maka bobot dari titik v , $\omega(v) = \sum_{y \in N(v)} f(y) = k$, dengan $N(v)$ menyatakan himpunan titik yang bertetangga dengan v .

Dari definisi ini, dapat dilihat bahwa jika suatu graf G memiliki suatu pelabelan ajaib berdasarkan jarak, maka komplemen dari graf G , yaitu G^c , akan memiliki titik-titik dengan bobot yang berbeda. Secara khusus, bobot ini akan membentuk suatu barisan aritmatika dengan suku pertama a dan beda $d = 1$. Arumugam dan Kamatchi [3] kemudian memperkenalkan konsep untuk nilai d yang lebih umum, yaitu pelabelan (a, d) –antiajaib berdasarkan jarak. Beberapa hasil dari

penelitian ini diantaranya dari Kamatchi *et al* [4] yang membuktikan bahwa hipergraf memiliki pelabelan (a, d) –antiajaib berdasarkan jarak, kemudian Wijayanti *et al* [5] memberikan pelabelan (a, d) –antiajaib berdasarkan jarak untuk graf Petersen yang dipermumum.

Untuk konsep dan definisi yang lebih umum, yaitu setiap bobot titik yang berbeda namun tidak harus membentuk suatu barisan aritmatika, disebut dengan pelabelan antiajaib berdasarkan jarak. Sebuah bijeksi $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$ disebut pelabelan antiajaib berdasarkan jarak jika $\omega(x) \neq \omega(y)$, untuk setiap $x, y \in V(G)$. Konsep ini dikenalkan oleh Arumugan dan Kamatchi pada tahun 2013 [6]. Mereka telah menentukan fungsi pelabelan antiajaib untuk beberapa keluarga graf seperti graf siklis, graf lintasan, dan graf roda. Mereka juga memberikan *conjecture* bahwa graf G memiliki pelabelan antiajaib berdasarkan jarak jika dan hanya jika $N(u) \neq N(v)$ untuk setiap $u, v \in V(G)$.

Dengan banyaknya jenis dan macam dari graf, banyak peneliti yang sudah memberikan pelabelan antiajaib berdasarkan jarak untuk suatu jenis graf, ataupun memberikan bukti bahwa suatu graf tidak memiliki pelabelan antiajaib berdasarkan jarak. Simanjuntak *et al* [7] memberikan pelabelan antiajaib berdasarkan jarak untuk jenis graf matahari, prisma, kipas, dan pertemanan. Kemudian penelitian ini dilanjutkan dengan menambahkan beberapa hasil komputasi [8]. Nadeak [9] dalam skripsinya memberikan pelabelan antiajaib berdasarkan jarak untuk beberapa graf sirkulan. Untuk kasus dari hasil operasi graf, Handa *et al* [10] memberikan syarat cukup untuk hasil operasi join graf dan hasil operasi korona graf agar bersifat antiajaib berdasarkan jarak. Selanjutnya Nancy *et al* [11] memberikan pelabelan antiajaib berdasarkan jarak untuk operasi perkalian Kartesian untuk graf lengkap atau graf siklus. Terakhir, Rinovia *et al* [12] memberikan pelabelan antiajaib berdasarkan jarak untuk beberapa operasi perkalian graf, salah satunya adalah perkalian *lexicographic*.

Operasi perkalian tensor adalah salah satu perkalian yang akan memberikan pertambahan sisi antara dua graf yang lebih banyak dibandingkan operasi graf yang lain. Ini membuat titik-titik pada graf akan memiliki derajat yang juga besar, sehingga akan menjadi penelitian yang menantang dalam mencari pelabelan antiajaib berdasarkan jarak untuk graf hasil perkalian tensor secara umum. Pada penelitian ini akan diberikan pelabelan antiajaib berdasarkan jarak pada operasi perkalian tensor untuk graf lengkap, kemudian memberikan syarat cukup untuk hasil perkalian sebarang graf beraturan dengan graf lengkap agar memiliki sifat antiajaib berdasarkan jarak. Dari hasil ini, kemudian dapat disimpulkan sifat antiajaib berdasarkan jarak untuk operasi perkalian tensor untuk graf siklus dan lintasan.

2. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek-objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut.

Adapun langkah-langkah yang telah dilakukan, diantaranya:

1. Menelaah definisi dari pelabelan antiajaib berdasarkan jarak dan operasi perkalian tensor antara graf.
2. Memberikan pelabelan antiajaib berdasarkan jarak untuk hasil perkalian tensor antara dua graf lengkap.
3. Memberikan penjabaran syarat cukup agar hasil perkalian tensor antara sebarang graf beraturan dengan graf lengkap merupakan graf antiajaib berdasarkan jarak.
4. Menggunakan hasil penelitian untuk membuktikan sifat antiajaib berdasarkan jarak terhadap hasil perkalian tensor antara beberapa keluarga graf.

Berikut beberapa konsep dasar yang digunakan dalam pembahasan penelitian.

1. Graf G adalah suatu pasangan terurut $G = (V(G), E(G))$ dengan $E(G) \subseteq [V(G)]^2$. Notasi $V(G)$ disebut dengan himpunan titik di G dan $E(G)$ disebut dengan himpunan sisi di G [13].

Untuk memudahkan penulisan, selanjutnya $\{u, v\}$ akan ditulis sebagai uv . Suatu graf dengan $|V(G)| = 0$ atau 1 disebut sebagai graf trivial. Kemudian, kardinalitas dari himpunan titik pada graf G , yaitu $|V(G)|$ didefinisikan sebagai orde graf G , dan kardinalitas dari himpunan sisi pada graf G , yaitu $|E(G)|$ didefinisikan sebagai ukuran graf G .

2. Graf lintasan dengan titik n , P_n merupakan graf dengan $V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, dan $E(P_n) = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n - 1\}$.
3. Graf siklis dengan banyak titik n , C_n merupakan graf dengan $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, dan $E(P_n) = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n - 1\} \cup v_n v_1$.
4. Graf lengkap dengan n titik, K_n merupakan graf yang setiap titiknya saling bertetangga.
5. Operasi Gabungan dari Graf G_1, G_2, \dots, G_n , $\cup_{i=1}^n G_i$ merupakan graf tak terhubung dengan n komponen, dengan tiap komponennya adalah graf G_i .

3. Hasil dan Pembahasan

Perkalian Tensor antara dua graf G dan H , dinotasikan dengan $G \times H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G \times H)$ merupakan himpunan hasil perkalian Kartesius $V(G) \times V(H)$, dan titik (g, h) bertetangga dengan titik (g', h') di $G \times H$ jika g bertetangga dengan g' di G dan h bertetangga dengan h' di H [14]. Untuk kemudahan, titik (g, h) dapat dituliskan sebagai gh .

3.1 Graf Lengkap

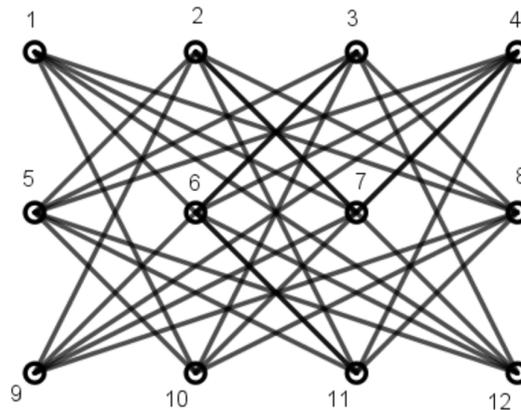
Hasil pertama dari penelitian ini membahas mengenai pelabelan antiajaib berdasarkan jarak untuk operasi perkalian tensor antara dua graf lengkap.

Teorema 1. Untuk bilangan bulat positif $m, n \geq 2$, Graf $K_m \times K_n$ merupakan graf antiajaib berdasarkan jarak.

Bukti: Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $m \leq n$. Akan dibuktikan bahwa

$$f(u_i v_j) = n(i - 1) + j, 1 \leq i \leq m \text{ dan } 1 \leq j \leq n$$

merupakan pelabelan antiajaib berdasarkan jarak bagi graf $K_m \times K_n$.



Gambar 1. Pelabelan Antiajaib berdasarkan Jarak untuk graf $K_3 \times K_4$

Berdasarkan pelabelan di atas, dapat dilihat bahwa $f(u_i v_j) = f(u_i v_{j+1}) - 1$, dan $f(u_i v_j) = f(u_{i+1} v_j) - n$. Untuk $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n$, definisikan kedua himpunan

$$S_{ij} = \{u_1 v_j, u_2 v_j, \dots, u_{i-1} v_j, u_{i+1} v_j, \dots, u_m v_j\}, \text{ dan}$$

$$T_{ij} = \{u_i v_1, u_i v_2, \dots, u_i v_{j-1}, u_i v_{j+1}, \dots, u_i v_n\}.$$

- Perhatikan bahwa

$$N(u_i v_j) = S_{i1} \cup S_{i2} \cup \dots \cup S_{i(j-1)} \cup S_{i(j+1)} \cup \dots \cup S_{in}, \text{ dan}$$

$$N(u_i v_{j+1}) = S_{i1} \cup S_{i2} \cup \dots \cup S_{ij} \cup S_{i(j+2)} \cup \dots \cup S_{in}, \text{ sehingga}$$

$$N(u_i v_j) = (N(u_i v_{j+1}) \cup S_{i(j+1)}) - S_{ij}.$$

Dari persamaan himpunan sebelumnya, maka

$$\omega(u_i v_j) = \omega(u_i v_{j+1}) + \sum_{k=1, k \neq i}^m (f(u_k v_{j+1}) - f(u_k v_j)) = \omega(u_i v_{j+1}) + (m - 1).$$

- Perhatikan bahwa

$$N(u_i v_j) = T_{1j} \cup T_{2j} \cup \dots \cup T_{(i-1)j} \cup T_{(i+1)j} \cup \dots \cup T_{mj}, \text{ dan}$$

$$N(u_{i+1} v_j) = T_{1j} \cup T_{2j} \cup \dots \cup T_{ij} \cup T_{(i+2)j} \cup \dots \cup T_{mj}, \text{ sehingga}$$

$$N(u_i v_j) = (N(u_{i+1} v_j) \cup T_{(i+1)j}) - T_{ij}.$$

Dari persamaan himpunan sebelumnya, maka

$$\omega(u_i v_j) = \omega(u_{i+1} v_j) + \sum_{l=1, l \neq j}^n (f(u_{i+1} v_l) - f(u_i v_l)) = \omega(u_{i+1} v_j) + n(n - 1).$$

Dari kedua penjabaran di atas, maka untuk setiap $1 \leq i \leq m$, barisan $\omega(u_i v_1), \omega(u_i v_2), \dots, \omega(u_i v_n)$ adalah barisan aritmetika menurun dengan beda $m - 1$. Sedangkan untuk setiap $1 \leq j \leq n$, barisan $\omega(u_1 v_j), \omega(u_2 v_j), \dots, \omega(u_m v_j)$ adalah barisan aritmetika menurun dengan beda $n(n - 1)$.

Lebih lanjut, $\omega(u_i v_n) = \omega(u_i v_1) - (m - 1)(n - 1)$, dan $\omega(u_{i+1} v_1) = \omega(u_i v_1) - n(n - 1)$. Dari asumsi awal bahwa $m \leq n$, maka untuk setiap $1 \leq i \leq m - 1$, berlaku $\omega(u_i v_n) > \omega(u_{i+1} v_1)$.

Secara keseluruhan:

$$\omega(u_1 v_1) > \dots > \omega(u_1 v_n) > \omega(u_2 v_1) > \dots > \omega(u_2 v_n) > \dots > \omega(u_m v_1) > \omega(u_m v_n).$$

Dapat disimpulkan bahwa dengan pelabelan f seperti di atas, masing-masing titik akan memiliki bobot yang berbeda, sehingga f merupakan pelabelan antiajaib berdasarkan jarak. ■

Teorema selanjutnya membahas syarat cukup bagi perkalian tensor antara graf beraturan dan graf lengkap memiliki pelabelan antiajaib berdasarkan jarak.

Teorema 2. Misalkan G merupakan graf beraturan antiajaib berdasarkan jarak dengan derajat r dan orde m . Graf $G \times K_n$ merupakan graf antiajaib berdasarkan jarak jika memenuhi $n = 2$ atau $m < \frac{n-1}{n-2}r$.

Bukti: Misalkan $|V(G)| = m$, dengan $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, dan $V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Karena G merupakan graf antiajaib berdasarkan jarak, maka misalkan fungsi $f_G : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ merupakan pelabelan antiajaib berdasarkan jarak pada graf G . Artinya pada graf G , nilai bobot $\omega_G(u_i) \neq \omega_G(u_j)$, untuk setiap pasangan titik $u_i, u_j \in V(G)$.

Akan dibuktikan bahwa pelabelan

$$f_{G \times K_n}(u_i v_j) = f_G(u_i) + (j - 1)m$$

merupakan pelabelan antiajaib berdasarkan jarak.

Pertama, dapat diperiksa pelabelan $f_{G \times K_n}$ merupakan suatu bijeksi $f_{G \times K_n} : V(G \times K_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, mn\}$. Kemudian perhatikan bahwa jika u_i bertetangga dengan u_j pada graf G , maka $u_i v_k$ bertetangga dengan $u_j v_l$ pada graf $G \times K_n$, untuk setiap $1 \leq k, l \leq n$, dengan $k \neq l$. Jadi pelabelan $f_{G \times K_n}$ akan memberikan bobot untuk masing-masing titik

$$\omega_{G \times K_n}(u_i v_j) = (n - 1)\omega_G(u_i) + p(j)$$

dengan

$$p(j) = rm(1 + 2 + \dots + (j - 1) + (j + 1) + \dots + n - 1) = rm\left(\frac{n(n-1)}{2} - j\right),$$

untuk setiap $1 \leq j \leq n$, dan r merupakan derajat dari graf beraturan G . Perhatikan bahwa karena $\omega_G(u_s) \neq \omega_G(u_t)$, untuk setiap pasangan titik $u_s, u_t \in G$, maka $\omega(u_s v_j) \neq \omega(u_t v_j)$ pada graf $G \times K_n$, untuk setiap $1 \leq s, t \leq m$.

Notasikan $Y_k = \min_i \omega(u_i v_k)$ dan $Z_{k+1} = \max_j \omega(u_j v_{k+1})$. Andaikan $Y_k \leq Z_{k+1}$. Maka

$$\begin{aligned} \omega(u_i v_k) &\leq \omega(u_j v_{k+1}) \\ (n - 1)\omega_G(u_i) + p(k) &\leq (n - 1)\omega_G(u_j) + p(k + 1) \\ p(k) - p(k + 1) &\leq (n - 1)[\omega_G(u_j) - \omega_G(u_i)] \end{aligned}$$

Karena G merupakan graf beraturan dengan derajat r , maka nilai maksimum yang paling mungkin dari $\omega_G(u_j) - \omega_G(u_i)$ adalah $(m + m - 1 + \dots + (m - r + 1)) - (1 + 2 + \dots + r) = r(m - r)$. Sehingga

$$\begin{aligned} rm\left(\frac{n(n-1)}{2} - k - \frac{n(n-1)}{2} + k + 1\right) &\leq (n - 1)r(m - r) \\ rm &\leq (n - 1)r(m - r) \\ m &\leq (n - 1)(m - r) \end{aligned}$$

Untuk $n = 2$, maka $m \leq m - r$, artinya $r \leq 0$, suatu kontradiksi. Jika $n \neq 2$, maka $m \geq \frac{n-1}{n-2}r$, kontradiksi dengan informasi bahwa $m < \frac{n-1}{n-2}r$. Maka haruslah $Y_k > Z_{k+1}$.

Karena $Y_k > Z_{k+1}$, maka $w(u_i v_k) > w(u_j v_{k+1})$, untuk setiap $1 \leq k \leq n - 1$. Lebih lanjut, $w(u_i v_k) > w(u_j v_l)$, untuk setiap $1 \leq k < l \leq n$. Ini melengkapi pembuktian bahwa semua bobotnya akan memiliki nilai yang berbeda. ■

Berdasarkan pengamatan sederhana, jika terdapat dua titik pada suatu graf G dengan himpunan tetangga buka yang sama, maka kedua titik tersebut akan memiliki bobot yang sama untuk sebarang fungsi pelabelan f di G . Akibatnya, G tidak memiliki pelabelan antiajaib berdasarkan jarak, dan G bukan merupakan graf antiajaib berdasarkan jarak [6]. *Lemma* di bawah ini merupakan akibat langsung dari pengamatan ini untuk graf hasil operasi perkalian tensor.

Lemma 1. Jika G memuat dua titik dengan himpunan tetangga yang sama, maka untuk sebarang graf H , $G \times H$ juga memuat dua titik dengan himpunan tetangga yang sama. Artinya, $G \times H$ bukan merupakan graf antiajaib berdasarkan jarak.

Bukti: Misalkan u_1 dan u_2 merupakan dua titik pada graf G dengan himpunan tetangga yang sama, yaitu himpunan $U' = N(u_1) = N(u_2)$. Ambil sebarang titik pada graf H , misalkan v , dengan himpunan tetangga $N(v)$. Perhatikan bahwa pada graf $G \times H$, dua titik u_1v dan u_2v akan memiliki tetangga yang sama, yaitu $N(u_1v) = N(u_2v) = \{xy \mid x \in U', y \in N(v)\}$, jadi $G \times H$ bukan merupakan graf antiajaib berdasarkan jarak. ■

3.2 Graf Siklus dan Lintasan.

Berikut ini merupakan hasil sifat antiajaib berdasarkan jarak untuk perkalian tensor dari graf siklus dan graf lintasan yang merupakan akibat dari teorema dan lemma yang telah dibuktikan sebelumnya.

Untuk bilangan bulat positif $m \geq 2$, Teorema 2 dan Lemma 1 berturut-turut memberikan akibat sebagai berikut.

Teorema 3. Untuk $m \neq 4$, Graf $C_m \times C_2$ merupakan graf antiajaib berdasarkan jarak.

Bukti: Ini adalah akibat langsung dari Teorema 2, karena C_m adalah graf regular dengan derajat 2. Namun ini tidak berlaku untuk $m = 4$ karena C_4 memiliki dua titik dengan himpunan tetangga yang sama. Berdasarkan Lemma 1, graf $C_4 \times C_2$ bukan merupakan graf antiajaib berdasarkan jarak. ■

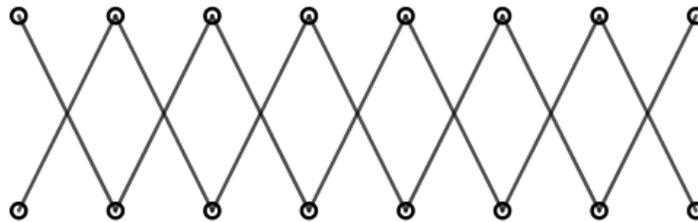
Teorema 4. Graf $C_m \times C_4$ bukan merupakan graf antiajaib berdasarkan jarak.

Bukti: Ini adalah akibat langsung dari Lemma 1, karena C_4 memiliki dua titik dengan himpunan tetangga yang sama. ■

Pandang kasus untuk graf $C_m \times C_3$. Karena C_3 merupakan suatu graf lengkap K_3 , maka berdasarkan Teorema 2, nilai m sehingga memenuhi $m < \frac{3-1}{3-2}(2) = 4$ merupakan graf antiajaib berdasarkan jarak. Sehingga $C_2 \times C_3$ dan $C_3 \times C_3$ keduanya merupakan graf antiajaib berdasarkan jarak. Dari Teorema 1 juga telah dibuktikan bahwa $C_2 \times C_3 = K_2 \times K_3$ dan $C_3 \times C_3 = K_3 \times K_3$ keduanya merupakan graf antiajaib berdasarkan jarak. Ini menjadi suatu masalah terbuka untuk graf $C_m \times C_3$ dengan $m > 4$, dan lebih lanjut $C_m \times C_n$, untuk $m, n > 4$, untuk diketahui sifat antiajaib berdasarkan jarak.

Untuk bilangan bulat positif $m \geq 2$, Graf $P_m \times P_2$ isomorfik dengan graf gabungan $P_m \cup P_m = 2P_m$. Nadeak [9] telah memberikan pelabelan antiajaib berdasarkan jarak terhadap graf $2P_m$, untuk $m \neq 3$.

Teorema 5. Graf $P_m \times P_2$ merupakan graf antiajaib berdasarkan jarak untuk $m \geq 2, m \neq 3$.



Gambar 2. Graf $P_8 \times P_2$ yang ekuivalen dengan graf $2P_8$

Bukti: Graf $P_m \times P_2$ isomorfik dengan graf gabungan $2P_m$. Misalkan himpunan titik $V(2P_m) = \{v_i^j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 2\}$, dan himpunan sisi $E(2P_m) = \{v_i^j v_{i+1}^j \mid 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq 2\}$. Ada tiga kasus yang akan ditinjau:

Kasus 1. Untuk $m \equiv 0,2(mod 4)$, definisikan fungsi pelabelan f sebagai berikut.

$$f(v_i^j) = \begin{cases} m(j-1) + \frac{i}{2}, & i \text{ genap} \\ m(j-1) + \frac{i+m+1}{2}, & i \text{ ganjil} \end{cases}$$

Dari fungsi pelabelan di atas, diperoleh bobot dari setiap titik sebagai berikut.

$$\omega_f(v_i^j) = \begin{cases} 1 + m(j-1), & i = 1, \\ (m+i+1) + 2m(j-1), & i = 2,4, \dots, m-2, \\ i + 2m(j-1), & i = 3,5, \dots, m-1, \\ mj, & i = m. \end{cases}$$

Kasus 2. Untuk $m \equiv 1(mod 4)$, definisikan fungsi pelabelan f sebagai berikut.

$$f(v_i^j) = \begin{cases} 3 - i + m(j-1), & i = 1,2, \\ m - \frac{i-3}{2} + m(j-1), & i = 3,5, \dots, m, \\ \frac{m+5-i}{2} + m(j-1), & i = 4,6, \dots, m-1. \end{cases}$$

Dari fungsi pelabelan di atas, diperoleh bobot dari setiap titik sebagai berikut.

$$\omega_f(v_i^j) = \begin{cases} 1 + m(j-1), & i = 1, \\ m + 2 + 2m(j-1), & i = 2, \\ \frac{1}{2}(m+3) + 2m(j-1), & i = 3, \\ 2m - i + 3 + 2m(j-1), & i = 4,6, \dots, m-1, \\ m + 5 - i + 2m(j-1), & i = 5,7, \dots, m-2, \\ 3 + m(j-1), & i = m. \end{cases}$$

Kasus 3. Untuk $m \equiv 3(mod 4)$, definisikan fungsi pelabelan f sebagai berikut.

$$f(v_i^j) = \begin{cases} i + m(j-1), & i = 1,2, \\ m - \frac{i-3}{2} + m(j-1), & i = 3,5, \dots, m, \\ \frac{m+5-i}{2} + m(j-1), & i = 4,6, \dots, m-1. \end{cases}$$

Dari fungsi pelabelan di atas, diperoleh bobot dari setiap titik sebagai berikut.

$$\omega_f(v_i^j) = \begin{cases} 2 + m(j-1), & i = 1, \\ m + 1 + 2m(j-1), & i = 2, \\ \frac{1}{2}(m+5) + 2m(j-1), & i = 3, \\ 2m - i + 3 + 2m(j-1), & i = 4,6, \dots, m-1, \\ m + 5 - i + 2m(j-1), & i = 5,7, \dots, m-2, \\ 3 + m(j-1), & i = m. \end{cases}$$

Dari ketiga kasus, dapat diperiksa bahwa bobot setiap titik adalah berbeda. ■

Untuk bilangan bulat positif $m \geq 2$, Lemma 1 memberikan akibat bahwa $P_m \times P_3$ bukan merupakan graf antiajaib berdasarkan jarak.

Teorema 6. Graf $P_m \times P_3$ bukan merupakan graf antiajaib berdasarkan jarak.

Bukti: Ini adalah akibat langsung dari **Lemma 1**, karena P_3 memiliki dua titik dengan himpunan tetangga yang sama. ■

Masalah juga terbuka untuk membuktikan sifat antiajaib berdasarkan jarak untuk graf $P_m \times P_n$ dengan $m, n > 4$.

4. Kesimpulan

Hasil dari penelitian ini adalah graf $K_m \times K_n$ merupakan graf antiajaib berdasarkan jarak. Kemudian untuk suatu graf beraturan G dengan orde m dan derajat r , hasil operasi kali tensor $G \times K_n$ merupakan graf antiajaib berdasarkan jarak jika memenuhi $n = 2$ atau $m < \frac{n-1}{n-2}r$. Untuk orde yang cukup kecil dari graf siklus atau graf lintasan, dapat dibuktikan sifat antiajaib berdasarkan jarak dari teorema yang telah disajikan sebelumnya. Terdapat beberapa masalah yang masih belum diselesaikan melalui penelitian ini, seperti menentukan sifat antiajaib berdasarkan jarak untuk graf $C_m \times C_n$ untuk $m = 3$ atau $m > 4$ dan $n > 4$, dan sifat antiajaib berdasarkan jarak untuk graf $P_m \times P_n$ untuk $m, n > 4$. Kedua masalah tersebut dapat dikaji untuk penelitian selanjutnya.

Referensi

- [1] V. Vilfred, "Sigma Labelled Graphs and Circulant Graphs," University of Kerala, India, 1994.
- [2] M. Miller, C. Rodger, and R. Simanjuntak, "Distance Magic Labelings of Graphs", *Australasian Journal of Combinatorics*, vol. 28, pp. 305-315, 2003.
- [3] S. Arumugam, N. Kamatchi, "On (a;d)-Distance Antimagic Graphs", *Australasian J. Combinat*, 54, 279-287, 2012.
- [4] N. Kamatchi, G. R. Vijayakumar, A. Ramalakshmi, S. Nilavarasi, S. Arumugam, "Distance Antimagic Labelings of Graphs", *Lect. Notes Comp. Sci*, 10398, 113–118, 2017.
- [5] D. E Wijayanti, A. Thobirin, "Pelabelan Anti Ajaib Jarak Pada Suatu Graf Petersen Diperumum", *Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika*, vol. 12, pp. 279-287, 2020.
- [6] S. Arumugam and N. Kamatchi. "Distance Antimagic Graphs", *J. Combinat. Math. Combinat. Comput.*, vol. 64, pp. 61-67, 2013.
- [7] R. Simanjuntak and Kristiana Wijaya. "On distance antimagic graphs." arXiv preprint arXiv:1312.7405, 2013. doi: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1312.7405>
- [8] R. Simanjuntak, T. Nadeak, F. Yasin, K. Wijaya, N. Hinding, K.A. Sugeng, "Another Antimagic Conjecture", *Symmetry*, vol 13, 2021. doi: <https://doi.org/10.3390/sym13112071>
- [9] C. T. Nadeak, "Pelabelan Antiajaib berdasarkan Jarak," Institut Teknologi Bandung, 2015.
- [10] A.K. Handa, A. Godinho, T. Singh, S. Arumugam, "Distance antimagic labeling of join and corona of two graphs". *AKCE Int. J. Graphs Comb*, vol. 14, 172–177, 2017. doi: <https://doi.org/10.1016/j.akcej.2017.04.003>
- [11] N. J. Cutinho, S. Sudha, and S. Arumugam, "Distance antimagic labelings of Cartesian product of graphs, AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics", 17:3, 940-942, 2020. doi: [10.1016/j.akcej.2019.08.005](https://doi.org/10.1016/j.akcej.2019.08.005)
- [12] R. Simanjuntak, A. Tritama, "Distance Antimagic Product Graphs", *Symmetry*, 14(7):1411, 2022. <https://doi.org/10.3390/sym14071411>
- [13] R. Diestel, *Graph Theory*. Springer-Verlag Heidelberg. 2005.
- [14] W. Imrich, S. Klavžar, *Product Graphs: Structure and Recognition*. Wiley, 2000.