

Bifurkasi Hopf Pada Model Siklus Bisnis *Investment Saving-Liquidity Money* dengan Waktu Tunda

Gesti Essa Waldhani ^{1*}

¹Teknologi Informasi, Universitas Bina Sarana Informatika, Jakarta Pusat, 10450, Indonesia

*Penulis Korespondensi. Email: waluyogesti@gmail.com

Abstrak

Perekonomian tidak selalu baik artinya mengalami gelombang naik turun, situasi ini memerlukan peramalan. Salah satunya model *Investment Saving-Liquidity Money* (IS-LM) yang pertamakali diperkenalkan oleh Kalecki tahun 1935 dengan asumsi keuntungan yang diperoleh disimpan untuk digunakan sebagai modal awal investasi, sehingga menyebabkan adanya keterlambatan dalam proses investasi (waktu tunda) dan menyebabkan perubahan kestabilan pada keseimbangan sehingga terjadi bifurkasi. Dalam penelitian ini dianalisis model siklus bisnis IS-LM tak linear. Analisis model dilakukan dengan menentukan titik tetap, kemudian dilakukan analisis kestabilan dari titik tetap tersebut dengan mengaplikasikan teori bifurkasi Hopf. Modifikasi lain yang diberikan pada model adalah penggunaan waktu tunda. Waktu tunda merupakan waktu yang dibutuhkan bagi produk kotor, modal dan suku bunga agar dapat digunakan sebagai investasi. Model ini diamati pada dua kasus. Kasus pertama adalah model tanpa waktu tunda, diperoleh titik tetap interior bersifat stabil asimtotik lokal dengan uji kestabilan Routh-Hurwitz. Kasus kedua adalah model dengan waktu tunda, diperoleh nilai kritis tundaan. Bifurkasi Hopf terjadi ketika nilai waktu tunda sama dengan nilai kritis tundaan dan juga memenuhi kondisi transversalitas. Pengamatan pada simulasi model dilakukan dengan bervariasi nilai waktu tunda. Saat bifurkasi Hopf terjadi, grafik pada bidang solusi memperlihatkan pergerakan osilasi yang konstan. Apabila nilai waktu tunda yang diberikan kurang dari nilai kritis tundaan, solusi system terkontrol menuju kondisi yang seimbang. Kemudian ketika nilai waktu tunda diberikan lebih besar dari nilai kritis tundaan, solusi system terus berfluktuasi sehingga menyebabkan kondisi sistem yang tidak stabil.

Kata Kunci: Stabilitas; *Investment Saving-Liquidity Money*; Waktu Tunda; Bifurkasi Hopf

Abstract

The economy is not always good, meaning it experiences ups and downs. This situation requires forecasting. One of which is the Investment Saving-Liquidity Money business cycle model, which was first introduced by Kalecki in 1935 with the assumption that profits will be saved to be used as initial investment capital, thus causing a delay in the investment process (delay time). The addition of time delay in the system of differential equations causes a change in stability at the equilibrium point so that bifurcation occurs. Another modification given to the model is the use of time delays. The model analyzed in this study is a non-linear IS-LM business cycle model with time delay. Delay time is required for the gross product, capital, and interest rate to be used as an investment. This model was observed in two cases. First Case is a model without time delay. The second case is a model with a time delay. In this case, the critical value of delay is obtained. Hopf bifurcation occurs when the value of delay time is equal to the critical value of delay and satisfies the transversality condition. Observations on the model simulation are carried out by varying the delay time value. When the Hopf bifurcation occurs, the graph on the solution plane shows a constant oscillatory movement. If the value of delay time given is less than the critical value of delay, the controlled system solution goes to a balanced condition. Then when the delay time value is greater than the critical value of delay, the system solution continues to fluctuate, causing an unstable system condition.

Keywords: Stability; *Investment Saving-Liquidity Money*; Time Delay; Hopf Bifurcation

1. Pendahuluan

Sistem dinamik adalah suatu metode yang berhubungan dengan pertanyaan-pertanyaan tentang tendensi-tendensi dinamik sistem-sistem yang kompleks, yaitu pola-pola tingkah laku yang dibangkitkan oleh sistem dengan bertambahnya waktu [1]. Model persamaan diferensial yang akan dibahas pada penelitian ini merupakan sistem dinamik di bidang ekonomi.

Ekonomi merupakan suatu ilmu yang mempelajari tentang upaya manusia untuk memenuhi kebutuhan hidupnya yang tidak terbatas dengan sumber daya yang terbatas [2]. Menurut permasalahannya ilmu ekonomi dikelompokkan menjadi dua, yaitu mikroekonomi dan makroekonomi. Salah satu permasalahan makroekonomi yang dihadapi oleh setiap negara adalah pertumbuhan ekonomi [2]. Indonesia merupakan salah satu negara yang pernah mengalami krisis perekonomian dimulai sejak tahun 1990-an. Hingga saat ini keadaan perekonomian mengalami fluktuasi dan cenderung naik turun. Perubahan aktivitas ekonomi yang semula naik saja atau turun saja dalam ilmu matematika dapat dikategorikan sebagai bifurkasi. Dalam ilmu ekonomi, gerakan naik turun yang terjadi disebut dengan siklus bisnis (*The Business Cycle*) [3]. Keadaan ini memerlukan adanya peramalan terhadap ekonomi negara Indonesia untuk mengetahui kondisi perekonomian di masa mendatang. Salah satunya adalah model siklus bisnis *Investment Saving-Liquidity Money* (IS-LM). Model siklus bisnis IS-LM merupakan model sistem persamaan diferensial yang melibatkan fungsi investasi (I), fungsi simpanan (S), fungsi permintaan uang (L), dan persediaan uang (M) [4]. Metode yang digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial dapat dilakukan dengan metode analitik. Namun kelemahan dari metode analitik adalah tidak semua persamaan matematika dapat diselesaikan untuk menghasilkan nilai eksak, sehingga diperlukan pendekatan linier dan pendekatan dalam ruang kompleks, dalam hal ini adalah analisis bifurkasi Hopf. Selain itu, diberikan jaminan terhadap adanya *limit cycle*, dan terjadinya bifurkasi Hopf pada saat T melewati T_b .

Guerrini, dkk [5] membahas model pertumbuhan Kaldor-Kalecki dengan waktu tunda pada fungsi investasi. Munculnya *limit cycle* karena perubahan kestabilan dua parameter yaitu waktu tunda T dan laju pertumbuhan g . Semakin besar nilai waktu tunda mengakibatkan munculnya *limit cycle* dan terjadi bifurkasi Hopf superkritis. Semakin besar laju pertumbuhan mengakibatkan terjadi dua bifurkasi Hopf superkritis. Semua analisis numerik pada riset ini dilakukan dengan fungsi investasi Dana dan Malgrange. Selanjutnya, Karim, dkk [6] membahas model siklus bisnis IS-LM dasar dengan model pertumbuhan Kaldor. Dari hasil analisis muncul tiga kasus. Kasus 1 tanpa waktu tunda, kasus 2 waktu tunda pada modal dan kasus 3 waktu tunda pada modal dan pendapatan. Adapun Xie, dkk [7] membahas siklus bisnis digambarkan dengan model berorde pecahan waktu tunda dengan fungsi preferensi likuiditas dan fungsi investasi. Keberadaan dan keunikan DTFOM dibuktikan, titik ekuilibrium positif DTFOM stabil dengan beberapa kondisi, bifurkasi Hopf diperoleh dengan parameter waktu tunda dan dilakukan analisis numerik. Penelitian lain yang dilakukan oleh Hidayati, dkk [8] membahas tentang analisis kestabilan dan kontrol optimal pada model siklus bisnis IS-LM dengan waktu tunda. Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui pengaruh nilai waktu tunda yang diberikan pada sistem. Kontrol yang diberikan ke variabel suku bunga diharapkan dapat membantu mengurangi suku bunga ketika suku bunga mulai meningkat. Lebih lanjut dalam penelitian Musyaffafi, dkk [9] dilakukan analisis stabilitas pada model siklus bisnis IS-LM dengan menggunakan metode Runge-Kutta. Pada penelitian ini, ditunjukkan perbandingan metode Runge-Kutta orde kelima dan Metode Extended Runge Kutta dalam mensimulasikan model yang telah diperoleh dengan kecepatan stabilitas model. Adapun Karim, dkk [10] membandingkan dinamika model siklus bisnis linier dan nonlinier dalam lingkungan yang semirip mungkin. Analisis sensitivitas parameter dilakukan untuk kedua model dan non linearitas dalam fungsi tabungan. Beberapa penelitian lain yang relevamasih banyak dilakukan berkaitan dengan topik ini seperti yang dilakukan oleh Assous, dkk [11] yang membuat model IS-LM versi baru yang menghilangkan kekurangan model asli, Kurkina [12] yang membahas tentang dinamika perekonomian Indonesia berdasarkan pendapatan, modal, investasi dan tabungan, Bashkirtseva, dkk [13][14] mempelajari fenomena

stokastik nonlinier dalam model siklus bisnis Kaldor diskrit, serta beberapa riset lain yang membahas model dinamik pada kasus ekonomi dan bisnis [15]-[19]. Hasil-hasil penelitian yang telah diulas sebelumnya menunjukkan bahwa pembahasan model dinamik pada kasus ekonomi dan bisnis masih terbuka untuk terus dilakukan dengan berbagai modifikasi.

Adapun model yang dibahas pada penelitian ini, merupakan model modifikasi yang diformulasikan dari model Gabisch dan Lorenz [20] dengan mensubstitusi fungsi investasi, simpanan dan likuiditas menurut Cai [21]. Selain itu, penelitian ini memperkenalkan waktu tunda ke dalam produk bruto, modal dan tingkat bunga pada fungsi investasi, dengan asumsi bahwa pendapatan dan modal bergantung pada periode masa lalu dan periode jatuh tempo yang belum pernah dianalisis oleh peneliti lain. Analisis model dilakukan dengan menentukan titik tetap, kemudian dilakukan analisis kestabilan dari titik tetap interior tanpa waktu tunda menggunakan kriteria Routh Hurwitz dan titik tetap interior waktu tunda dengan mengaplikasikan teori bifurkasi Hopf yang dilanjutkan simulasi model dilakukan dengan memvariasikan nilai waktu tunda.

2. Metode Penelitian

Tahapan penelitian yang dilakukan adalah sebagai berikut.

1. Pembentukan Model
Model siklus bisnis IS-LM yang akan dikaji dalam penelitian ini diperoleh dari pengembangan model penelitian sebelumnya.
2. Tahap penentuan Titik Tetap
Titik tetap diperoleh dengan membuat laju perubahan modal, pendapatan dan bruto terhadap waktu sama dengan nol.
3. Tahap Analisis Kestabilan Titik Tetap
Kestabilan titik tetap tanpa waktu tunda diperoleh dengan pendekatan linear. Titik interior disubstitusi ke matriks Jacobi sehingga dapat nilai eigen yang dianalisis dengan Routh Hurwitz untuk menentukan kestabilan. Titik tetap dengan waktu tunda diperlukan pendekatan dalam ruang kompleks untuk menganalisis bifurkasi Hopf.
4. Tahap Penentuan Syarat Transversal
Syarat transversal ditentukan untuk membuktikan terjadi bifurkasi Hopf pada titik kesetimbangan dalam.
5. Tahap Simulasi Kestabilan Titik Interior
Simulasi dilakukan untuk masing-masing parameter sesuai dengan syaratnya. Hasil simulasi dianalisis, sehingga diperoleh gambaran adanya pengaruh waktu tunda terhadap modal, bruto dan pendapatan.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Pembentukan Model Siklus Bisnis IS-LM

Model siklus bisnis nonlinear pertama kali diusulkan oleh Kaldor [22] yang dipresentasikan dalam bentuk sistem otonomus linear dengan dua variabel tak bebas yang melambangkan pendapatan dan modal. Model tersebut didefinisikan dengan persamaan diferensial biasa berikut.

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = \alpha[I(Y(t), K(t)) - S(Y(t), K(t))], \\ \frac{dK}{dt} = I(Y(t), K(t)), \end{cases} \quad (1)$$

dengan $Y(0) \geq 0$ dan $K(0) \geq 0$, dimana

$Y(t)$: Produk kotor (*bruto*) pada waktu t ($Y(t) \geq 0$),

$K(t)$: Modal pada waktu t ($K(t) \geq 0$),

α : Koefisien pengaturan pada pasar barang ($\alpha > 0$).

Kemudian fungsi investasi I , fungsi penyimpanan S . Selanjutnya Torre [23] merevisi dan memperbarui model ini dengan mengganti modal pada waktu $t, K(t)$ dengan suku bunga pada waktu $t, R(t)$ untuk merumuskan rumus umum dari model siklus bisnis IS-LM. Model tersebut dipresentasikan dalam bentuk sistem otonomus linear dengan dua variabel tak bebas yang melambangkan pendapatan dan suku bunga. Model siklus bisnis IS-LM yang diperkenalkan oleh Torre [23] adalah

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = \alpha[I(Y(t), R(t)) - S(Y(t), R(t))], \\ \frac{dR}{dt} = \beta[L(Y(t), R(t) - \bar{M})], \end{cases} \quad (2)$$

dengan $Y(0) \geq 0$ dan $R(0) \geq 0$, dimana

\bar{M} : Nilai konstan pasokan uang ($\bar{M} > 0$),

β : Nilai konstan pasokan uang ($\beta > 0$),

L : Fungsi permintaan uang ($L > 0$).

Selanjutnya Gabisch dan Lorenz [20] mengembangkan model siklus bisnis IS-LM. Model tersebut dipresentasikan dalam bentuk sistem otonomus linear dengan tiga variabel tak bebas yang melambangkan pendapatan, stok modal, dan suku bunga serta melibatkan fungsi investasi, simpanan, permintaan akan uang dan konstanta persediaan akan uang. Model siklus bisnis IS-LM yang diperkenalkan oleh Gabisch dan Lorenz adalah

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = \alpha[I(Y(t), K(t), R(t)) - S(Y(t), R(t))], \\ \frac{dK}{dt} = I(Y(t), K(t), R(t)) - \delta K(t), \\ \frac{dR}{dt} = \beta[L(Y(t), R(t) - \bar{M})], \end{cases} \quad (3)$$

dengan $Y(0) \geq 0, R(0) \geq 0, K(0) \geq 0$, dan δ : Tingkat depresi pada modal ($\delta > 0$).

Pada model siklus bisnis Kalecki [24], Kalecki mengasumsikan bahwa investasi bergantung pada pendapatan ketika keputusan investasi dibuat dan bergantung pada modal ketika investasi diselesaikan. Kemudian konsekuensi dari fakta bahwa pada saat $t - \tau$ ada beberapa investasi yang akan diselesaikan antara $t - \tau$ dan t . Kalecki berasumsi bahwa modal yang dihasilkan pada periode ini dipertimbangkan ketika investasi baru direncanakan. Teorema bifurkasi Hopf diaplikasikan untuk memprediksi terjadinya bifurkasi *limit cycle* untuk parameter waktu tunda. Ide Kalecki diperkenalkan kedalam model IS-LM untuk merumuskan model siklus bisnis IS-LM secara umum sebagai berikut.

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = \alpha[I(Y(t), K(t), R(t)) - S(Y(t), R(t))], \\ \frac{dK}{dt} = I(Y(t - \tau), K(t), R(t)) - \delta K(t), \\ \frac{dR}{dt} = \beta[L(Y(t), R(t) - \bar{M})], \end{cases} \quad (4)$$

dengan $Y(0) \geq 0, R(0) \geq 0$ dan $K(0) \geq 0$.

Pada tulisan ini, diperkenalkan waktu tunda τ ke dalam produk kotor, modal dan suku bunga, karena pendapatan dan modal saham bergantung bergantung pada periode masa lalu dan periode jatuh tempo. Jadi, pada analisis berikut kita akan mempertimbangkan model siklus bisnis IS-LM dengan waktu tunda sebagai berikut,

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = \alpha[I(Y(t), K(t), R(t)) - S(Y(t), R(t))], \\ \frac{dK}{dt} = I(Y(t - \tau), K(t - \tau), R(t - \tau)) - \delta K(t - \tau), \\ \frac{dR}{dt} = \beta[L(Y(t), R(t) - \bar{M})], \end{cases} \quad (5)$$

dengan $Y(0) \geq 0, R(0) \geq 0$ dan $K(0) \geq 0$.

Cai mengasumsikan bahwa fungsi investasi I , fungsi penyimpanan S dan fungsi permintaan uang L diberikan sebagai berikut.

$$\begin{cases} I(Y(t), K(t), R(t)) = \eta Y(t) - \delta_1 K(t) - \beta_1 R(t), \\ S(Y(t), R(t)) = l_1 Y(t) + \beta_2 R(t), \\ L(Y(t), R(t)) = l_2 Y(t) + \beta_3 R(t), \end{cases} \quad (6)$$

dengan $\delta_1, l_1, l_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ adalah konstan positif. Dengan demikian, sistem (5) menjadi

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = \alpha[(\eta - l_1)Y(t) - \delta_1 K(t) - (\beta_1 + \beta_2)R(t)], \\ \frac{dK}{dt} = \eta Y(t - \tau) - \delta_1 K(t - \tau) - \delta K(t - \tau) - \beta_1 R(t - \tau), \\ \frac{dR}{dt} = \beta[l_2 Y(t) - \beta_3 R(t) - \bar{M}], \end{cases} \quad (7)$$

dengan $Y(0) \geq 0, R(0) \geq 0$ dan $K(0) \geq 0$.

3.2 Titik Ekuilibrium Siklus Bisnis IS-LM

Titik ekuilibrium $E = (\hat{Y}, \hat{K}, \hat{R})$ harus memenuhi

$$\begin{cases} \alpha[(\eta - l_1)\hat{Y} - \delta_1 \hat{K} - (\beta_1 + \beta_2)\hat{R}] = 0 \\ \eta \hat{Y} - \delta_1 \hat{K} - \delta \hat{K} - \beta_1 \hat{R} = 0 \\ \beta[l_2 \hat{Y} - \beta_3 \hat{R} - \bar{M}] = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Titik ekuilibrium diperoleh dengan menggunakan metode cramer. Tahapan-tahapan tersebut adalah sebagai berikut.

Bentuk matriks yang ekuivalen dengan SPL pada persamaan (8) adalah

$$\begin{pmatrix} \eta - l_1 & -\delta_1 & -(\beta_1 + \beta_2) \\ \eta & -(\delta_1 + \delta)\hat{K} & -\beta_1 \\ l_2 & 0 & -\beta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{Y} \\ \hat{K} \\ \hat{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{M} \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan metode Cramer, diperoleh

$$\hat{Y} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\delta_1 & -(\beta_1 + \beta_2) \\ 0 & -(\delta_1 + \delta) & -\beta_1 \\ \bar{M} & 0 & -\beta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \eta - l_1 & -\delta_1 & -(\beta_1 + \beta_2) \\ \eta & -(\delta_1 + \delta) & -\beta_1 \\ l_2 & 0 & -\beta_3 \end{vmatrix}} = \frac{-\bar{M}(\delta_1\beta_2 + \delta(\beta_1 + \beta_2))}{\theta}.$$

$$\hat{K} = \frac{\begin{vmatrix} \eta - l_1 & 0 & -(\beta_1 + \beta_2) \\ \eta & 0 & -\beta_1 \\ l_2 & \bar{M} & -\beta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \eta - l_1 & -\delta_1 & -(\beta_1 + \beta_2) \\ \eta & -(\delta_1 + \delta) & -\beta_1 \\ l_2 & 0 & -\beta_3 \end{vmatrix}} = \frac{-(\eta\beta_2 + \beta_1 l_1)\bar{M}}{\theta}.$$

$$\hat{R} = \frac{\begin{vmatrix} \eta - l_1 & -\delta_1 & 0 \\ \eta & -(\delta_1 + \delta) & 0 \\ l_2 & 0 & \bar{M} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \eta - l_1 & -\delta_1 & -(\beta_1 + \beta_2) \\ \eta & -(\delta_1 + \delta) & -\beta_1 \\ l_2 & 0 & -\beta_3 \end{vmatrix}} = \frac{((\delta + \delta_1)l_1 - \delta\eta)\bar{M}}{\theta},$$

dimana $\theta = \delta(\beta_3\eta - l_2\beta_1) - (\delta + \delta_1)(\beta_2l_2 + \beta_3l_1)$.

Karena semua parameter merupakan konstanta positif, maka E^* ada jika $\theta < 0$ dan $(\delta + \delta_1)l_1 - \delta\eta < 0$.

3.3 Kestabilan Titik Ekuilibrium

Akan dibahas kestabilan sistem (7) disekitar titik ekuilibriumnya. sistem (7) merupakan sistem dinamik nonlinear sehingga untuk memudahkan dalam menentukan sifat kestabilan dari titik-titik ekuilibrium sistem (7) maka harus dilakukan linearisasi sistem (7). Misal $E = (\hat{Y}, \hat{R}, \hat{K})$ adalah titik-titik ekuilibrium dari sistem (7). Sistem (7) dapat ditulis dalam bentuk berikut,

$$\frac{dY}{dt} = \alpha[(\eta - l_1)Y(t) - \delta_1K(t) - (\beta_1 + \beta_2)R(t)],$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta[l_2Y(t) - \beta_3R(t) - \bar{M}],$$

$$\frac{dK}{dt} = \eta Y(t - \tau) - \delta_1K(t - \tau) - \delta K(t - \tau) - \beta_1R(t - \tau).$$

Selanjutnya akan dilakukan linearisasi sistem (7) dengan memisalkan

$$\begin{aligned} x(t) &= Y(t) - \hat{Y}, & x(t - \tau) &= Y(t - \tau) - \hat{Y}, \\ y(t) &= R(t) - \hat{R}, & y(t - \tau) &= R(t - \tau) - \hat{R}, \\ z(t) &= K(t) - \hat{K}, & z(t - \tau) &= K(t - \tau) - \hat{K}. \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \alpha(\eta - l_1)x(t) - \alpha(\beta_1 + \beta_2)y(t) - \alpha\delta_1z(t), \\ \dot{y}(t) &= \beta l_2x(t) - \beta\beta_3y(t), \\ \dot{z}(t) &= \eta x(t - \tau) - \delta_1z(t - \tau) - \delta_1z(t - \tau) - \beta_1y(t - \tau). \end{aligned} \tag{9}$$

Misalkan solusi dari sistem (4.9) adalah

$$x(t) = le^{\lambda t}, y(t) = me^{\lambda t} \text{ dan } z(t) = ne^{\lambda t}. \quad (10)$$

Substitusikan persamaan (10) ke persamaan (9) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} l\lambda e^{\lambda t} &= \alpha(\eta - l_1)le^{\lambda t} - \alpha(\beta_1 + \beta_2)me^{\lambda t} - \alpha\delta_1ne^{\lambda t} \\ m\lambda e^{\lambda t} &= \beta l_2le^{\lambda t} - \beta\beta_3me^{\lambda t} \\ n\lambda e^{\lambda t} &= \eta le^{\lambda(t-\tau)} - \delta ne^{\lambda t} - \delta_1ne^{\lambda(t-\tau)} - \beta_1me^{\lambda(t-\tau)} \end{aligned} \quad (11)$$

Kemudian sistem (11) dibagi $e^{\lambda t}$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} l\lambda &= \alpha(\eta - l_1)l - \alpha(\beta_1 + \beta_2)m - \alpha\delta_1n \\ m\lambda &= \beta l_2l - \beta\beta_3m \\ n\lambda &= \eta le^{-\lambda\tau} - \delta ne^{-\lambda\tau} - \delta_1ne^{-\lambda\tau} - \beta_1me^{-\lambda\tau} \end{aligned} \quad (12)$$

Sistem (12) dapat ditulis kembali dalam bentuk berikut,

$$\begin{bmatrix} l\lambda \\ m\lambda \\ n\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(\eta - l_1) & -\alpha(\beta_1 + \beta_2) & -\alpha\delta_1 \\ \beta l_2 & -\beta\beta_3 & 0 \\ \eta e^{-\lambda\tau} & -\beta_1e^{-\lambda\tau} & -\delta e^{-\lambda\tau} - \delta_1e^{-\lambda\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut,

$$\det \left(\begin{bmatrix} \alpha(\eta - l_1) & -\alpha(\beta_1 + \beta_2) & -\alpha\delta_1 \\ \beta l_2 & -\beta\beta_3 & 0 \\ \eta e^{-\lambda\tau} & -\beta_1e^{-\lambda\tau} & -\delta e^{-\lambda\tau} - \delta_1e^{-\lambda\tau} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \alpha(\eta - l_1) - \lambda & -\alpha(\beta_1 + \beta_2) & -\alpha\delta_1 \\ \beta l_2 & -\beta\beta_3 - \lambda & 0 \\ \eta e^{-\lambda\tau} & -\beta_1e^{-\lambda\tau} & -\delta e^{-\lambda\tau} - \delta_1e^{-\lambda\tau} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) + Q(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0, \quad (13)$$

dengan

$$P(\lambda) = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda \text{ dan } Q(\lambda) = C\lambda^2 + D\lambda + E,$$

dimana

$$A = \beta\beta_3 + \alpha(l_1 - \eta),$$

$$B = \alpha\beta l_2(\beta_1 + \beta_2) + \alpha\beta\beta_3(l_1 - \eta),$$

$$C = \delta + \delta_1,$$

$$D = \delta(\alpha(l_1 - \eta) + \beta\beta_3) + \delta_1(\beta\beta_3 + \alpha l_1),$$

$$E = \alpha\beta\delta_1(\beta_2 l_2 + \beta_3 l_1) + \alpha\beta\delta(\beta_3(l_1 - \eta) + l_2(\beta_1 + \beta_2)).$$

Saat $\tau = 0$ maka persamaan (4.13) menjadi

$$\lambda^3 + (A + C)\lambda^2 + (B + D)\lambda + E = 0,$$

Berdasarkan kriteria Ruth-Hurwitz persamaan karakteristik diatas akan memiliki akar-akar yang negatif jika

- $A + C > 0$,
- $B + D > 0$,
- $E > 0$,
- $(A + C)(B + D) - E > 0$,

dengan

- (1) $A + C = \beta\beta_3 + \alpha(l_1 - \eta) + \delta + \delta_1$.
 $A + C > 0$ jika $l_1 > \eta$.
- (2) $B + D = \alpha\beta l_2(\beta_1 + \beta_2) + \alpha\beta\beta_3(l_1 - \eta) + \delta(\alpha(l_1 - \eta) + \beta\beta_3) + \delta_1(\beta\beta_3 + \alpha l_1)$.
 $B + D > 0$ jika $l_1 > \eta$.
- (3) $E = \alpha\beta\delta_1(\beta_2 l_2 + \beta_3 l_1) + \alpha\beta\delta(\beta_3(l_1 - \eta) + l_2(\beta_1 + \beta_2))$
 $E > 0$ jika $l_1 > \eta$.
- (4) $(A + C)(B + D) - E = [\beta\beta_3 + \alpha(l_1 - \eta) + \delta + \delta_1][\alpha\beta l_2(\beta_1 + \beta_2) + \alpha\beta\beta_3(l_1 - \eta) + \delta(\alpha(l_1 - \eta) + \beta\beta_3) + \delta_1(\beta\beta_3 + \alpha l_1)] - \alpha\beta\delta_1(\beta_2 l_2 + \beta_3 l_1) + \alpha\beta\delta(\beta_3(l_1 - \eta) + l_2(\beta_1 + \beta_2))$.

Oleh sebab

$$[\beta\beta_3 + \alpha(l_1 - \eta) + \delta + \delta_1][\alpha\beta l_2(\beta_1 + \beta_2) + \alpha\beta\beta_3(l_1 - \eta) + \delta(\alpha(l_1 - \eta) + \beta\beta_3) + \delta_1(\beta\beta_3 + \alpha l_1)] - \alpha\beta\delta_1(\beta_2 l_2 + \beta_3 l_1) + \alpha\beta\delta(\beta_3(l_1 - \eta) + l_2(\beta_1 + \beta_2)) = \beta^2\beta_3^2\delta + \beta^2\beta_3^2\delta_1 + \alpha^2 l_1^2 \delta + \alpha^2 l_1^2 \delta_1 + \delta^2\beta\beta_3 + \delta_1^2\beta\beta_3 + \alpha^2\eta^2\delta - \delta^2\alpha\eta + 2\beta\beta_3\delta\alpha l_1 - 2\beta\beta_3\delta\alpha\eta + 2\beta\beta_3\delta_1\alpha l_1 + \alpha^2 l_1\beta l_2\beta_1 + \alpha^2 l_1\beta l_2\beta_2 - 2\alpha^2 l_1\beta\beta_3\eta - \alpha^2\eta\beta l_2\beta_1 - \alpha^2\eta\beta l_2\beta_2 - 2\alpha\eta\delta_1\beta\beta_3 + \delta_1\alpha\beta l_2\beta_1 + \beta^2\beta_3\alpha\eta + \alpha^2 l_1^2\beta\beta_3 + 2\delta\delta_1\alpha l_1 - \delta_1\delta\alpha\eta + \delta_1^2\alpha l_1 + \delta^2\alpha l_1$$

dan diasumsikan $l_1 > \eta$ maka $(A + C)(B + D) - E > 0$ jika $[\beta\beta_3 + \alpha(l_1 - \eta) + \delta + \delta_1][\alpha\beta l_2(\beta_1 + \beta_2) + \alpha\beta\beta_3(l_1 - \eta) + \delta(\alpha(l_1 - \eta) + \beta\beta_3) + \delta_1(\beta\beta_3 + \alpha l_1)] > \alpha\beta\delta_1(\beta_2 l_2 + \beta_3 l_1) + \alpha\beta\delta(\beta_3(l_1 - \eta) + l_2(\beta_1 + \beta_2))$

Untuk time delay T yang kecil, pendekatan linear sangat cocok untuk memperoleh titik bifurkasi. Untuk T yang sangat kecil maka $e^{-\lambda T} \approx 1 - \lambda T$, sehingga persamaan (13) menjadi

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + (C\lambda^2 + D\lambda + E)(1 - \lambda T) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + \lambda^2 \left(\frac{A+C-DT}{1-CT} \right) + \left(\frac{B+D-ET}{1-CT} \right) \lambda + \frac{E}{1-CT} = 0.$$

Dengan teorema bifurkasi Hopf dan kriteria Routh-Hurwitz, maka terjadi bifurkasi Hopf pada nilai $T = T_0$ dengan

$$\frac{A + C - DT_0}{1 - CT_0} > 0, \frac{B + D - ET_0}{1 - CT_0} > 0, \frac{E}{1 - CT_0} > 0$$

Dan

$$\left(\frac{A + C - DT_0}{1 - CT_0} \right) \left(\frac{B + D - ET_0}{1 - CT_0} \right) = \frac{E}{1 - CT_0}.$$

Misal ditentukan g pada

$$T = T_0, g(\lambda, T_0) = \lambda^3 + s\lambda^2 + k^2\lambda + k^2s$$

dengan

$$s = \frac{A + C - DT_0}{1 - CT_0}, k^2 = \frac{B + D - ET_0}{1 - CT_0}.$$

Nilai eigen dari persamaan diperoleh dengan memfaktorkan $g(\lambda, T_0) = 0$ yaitu:

$$\lambda^3 + s\lambda^2 + k^2\lambda + k^2s = 0 \Leftrightarrow (\lambda + s)(\lambda^2 + k^2) = 0$$

sehingga didapatkan $\lambda_0(T_0) = -s, \lambda_{1,2}(T_0) = \pm ik$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa syarat transversal terpenuhi, yaitu

$$Re\left(\frac{d}{dT}(\lambda(T_0))\right) \neq 0.$$

Diferensiasi total $g(\lambda(T), T)$ menghasilkan

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dT} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dT} + \frac{\partial g}{\partial T} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{d\lambda}{dT} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial T}}{\frac{\partial g}{\partial \lambda}} = \frac{-C\lambda^3 - D\lambda^2 - E\lambda}{3(1 - CT)\lambda^2 + 2(A + C - DT)\lambda + B + D - ET} \\ &= \frac{-C(ik)^3 - D(ik)^2 - E(ik)}{3(1 - CT_0)(ik)^2 + 2(A + C - DT_0)(ik) + B + D - ET_0} \\ &= \frac{Dk^2 + i(k^3 - Ek)}{x^2 + y^2} (x - y) \end{aligned}$$

dengan

$$x = -3k^2 + 3CT_0k^2 + B + D - ET_0$$

$$y = 2Ak + 2Ck - 2DT_0k$$

$$\begin{aligned} Re\left(\frac{d}{dT}(\lambda(T_0))\right) &= \frac{-3Dk^4(1-CT) + Dk^2(B+D-ET) + 2k^4(A+C-DT) - 2Ek^2(A+C-DT)}{x^2+y^2} \\ &= \frac{-3Dk^4(1-CT) + Dk^4(1-CT) + 2k^4s(1-CT) - 2k^2s(1-CT)k^2s(1-CT)}{x^2+y^2} \\ &= \frac{2(-D+s+s^2(-1+CT))}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Karena $x^2 + y^2$ pasti positif dan $-1 + CT < 0, -D + s < 0$, maka $Re\left(\frac{d}{dT}(\lambda(T_0))\right) < 0$, dan dapat disimpulkan bahwa $Re\left(\frac{d}{dT}(\lambda(T_0))\right) \neq 0$. Menurut teorema bifurkasi Hopf, hal ini menjamin adanya *limit cycle* pada saat $T = T_0$ dengan $\frac{A+C-DT_0}{1-CT_0} > 0, \frac{B+D-ET_0}{1-CT_0} > 0, \frac{E}{1-CT_0} > 0$ dan $\left(\frac{A+C-DT_0}{1-CT_0}\right)\left(\frac{B+D-ET_0}{1-CT_0}\right) = \frac{E}{1-CT_0}$.

Untuk time delay yang lebih panjang, diperlukan pendekatan yang lain dimisalkan $\lambda = \mu \pm i\omega$ dengan $\mu = 0$ dan > 0 ($\lambda = \pm i\omega$). Untuk melihat perubahan kestabilan pada model persamaan

dengan waktu tunda maka nilai eigen tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan (13) sehingga didapatkan akar-akar persamaan karakteristik

$$\begin{aligned}
\Delta(i\omega, \tau) &= P(\lambda) + Q(\lambda)e^{-\lambda\tau}, \\
&= \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + (C\lambda^2 + D\lambda + E)e^{-\lambda\tau} \\
&= \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C\lambda^2e^{-\lambda\tau} + D\lambda e^{-\lambda\tau} + Ee^{-\lambda\tau} \\
&= (\omega i)^3 + A(\omega i)^2 + B\omega i + C(\omega i)^2e^{-\omega i\tau} + D\omega ie^{-\omega i\tau} + Ee^{-\omega i\tau} \\
&= -i\omega^3 - A\omega^2 + B\omega i - C\omega^2(\cos \omega\tau - i \sin \omega\tau) + D\omega i(\cos \omega\tau - i \sin \omega\tau) \\
&\quad + E(\cos \omega\tau - i \sin \omega\tau) \\
&= -A\omega^2 - C\omega^2\cos\omega\tau + D\omega \sin \omega\tau + E \cos \omega\tau - i\omega^3 + B\omega i + C\omega^2i \sin \omega\tau \\
&\quad + D\omega i \cos \omega\tau - E i \sin \omega\tau \\
&= (-A\omega^2 + (E - C\omega^2)\cos\omega\tau + D\omega \sin \omega\tau) \\
&\quad + (-\omega^3 + B\omega + (C\omega^2 - E) \sin \omega\tau + D\omega \cos \omega\tau)i.
\end{aligned} \tag{14}$$

Persamaan (14) bernilai nol jika bagian imajiner dan realnya sama dengan nol, sehingga didapatkan

$$(-C\omega^2 + E)\cos\omega\tau + D\omega \sin \omega\tau = A\omega^2 \tag{15}$$

dan

$$\omega^3 - B\omega = (C\omega^2 - E) \sin \omega\tau + D\omega \cos \omega\tau. \tag{16}$$

Selanjutnya mengeliminasi persamaan (15) dan (16) terhadap τ dengan mengkuadratkan masing-masing ruas persamaan tersebut, maka diperoleh

$$A^2\omega^4 = (E^2 - 2EC\omega^2 + C^2\omega^4)\cos^2\omega\tau + 2(DE\omega - CD\omega^3)\cos\omega\tau \sin \omega\tau + D^2\omega^2 \sin^2 \omega\tau \tag{17}$$

dan

$$\begin{aligned}
\omega^6 - 2B\omega^4 + B^2\omega^2 &= (C^2\omega^4 - 2CE\omega^2 + E^2) \sin^2 \omega\tau + 2(CD\omega^3 - DE\omega) \cos \omega\tau \sin \omega\tau \\
&\quad + D^2\omega^2 \cos^2 \omega\tau.
\end{aligned} \tag{18}$$

Kemudian persamaan (17) dan (18) dijumlahkan dan dikelompokkan sesuai pangkat maka diperoleh polinomial berderajat empat sebagai berikut

$$\omega^6 + (A^2 - 2B - C^2)\omega^4 + (B^2 + 2EC - D^2)\omega^2 - E^2 = 0. \tag{19}$$

Untuk mempermudah perhitungan dimisalkan $z = \omega^2$, sehingga persamaan (19) berubah menjadi

$$z^3 + (A^2 - 2B - C^2)\omega^2 + (B^2 + 2EC - D^2)\omega - E^2 = 0. \tag{20}$$

Menurut Ruan dan Wei [3], nilai akar dari persamaan (19) ditentukan oleh Lemma 1 sebagai berikut.

Lemma 1.

Didefinisikan $\Delta = a^2 - 3b$.

- (i) Jika $c < 0$, maka persamaan (20) paling tidak memiliki satu akar positif.
- (ii) Jika $c \geq 0$ dan $\Delta < 0$ maka persamaan (20) tidak memiliki akar positif.
- (iii) Jika $c \geq 0$ dan $\Delta \geq 0$, maka persamaan (20) mempunyai akar-akar positif jika dan hanya jika

$$\bar{z} = \frac{1}{3}(-a + \sqrt{\Delta}) > 0 \text{ dan } h(z) \leq 0.$$

Misal persamaan (20) memiliki akar positif, yang dilambangkan dengan z_1, z_2 dan z_3 . Maka persamaan (19) memiliki akar positif yaitu

$$\omega_1 = \sqrt{z_1}, \omega_2 = \sqrt{z_2} \text{ dan } \omega_3 = \sqrt{z_3}.$$

Selanjutnya dicari nilai waktu tunda kritis (τ_k) dengan tahapan-tahapan sebagai berikut.

Langkah pertama mensubstitusikan ω_k ke persamaan (15) dan (16) kemudian mengeliminasi fungsi sinus dari persamaan (15) dan (16)

$$(AC - D)\omega_k^4 + (-AE + BD)\omega_k^2 + CE = [-C^2\omega_k^4 + (2CE - D^2)\omega_k^2 - E^2]\cos\omega_k\tau \quad (21)$$

Selanjutnya mengeliminasi fungsi cosinus dari persamaan (15) dan (16)

$$C\omega_k^5 - (E + BC - AD)\omega_k^3 + BE\omega_k = [C^2\omega_k^4 + (D^2 - 2CE)\omega_k^2 + E^2]\sin\omega_k\tau \quad (22)$$

Dari (21) dan (22) diperoleh

$$\tau_k = \frac{1}{\omega_k} \tan^{-1} \left(-\frac{C\omega_k^5 - (E + BC - AD)\omega_k^3 + BE\omega_k}{(AC - D)\omega_k^4 + (-AE + BD)\omega_k^2 + CE} \right). \quad (23)$$

Lemma 2

Jika $\theta < 0, (\delta + \delta_1)l_1 - \delta\eta < 0, A + D > 0, B + E > 0$ dan $(A + D)(B + E) - (C + F) > 0$ diasumsikan benar dan $\tau > 0$.

Jika satu dari berikut benar.

- (1) $c < 0$ dan $h'(\omega_{bif}) \neq 0$;
- (2) $c \geq 0, \Delta > 0, \bar{z} > 0$ dan $h'(\bar{z}) < 0$;

maka

$$\frac{d\text{Re}\lambda(\tau_{bif})}{d\tau} \neq 0,$$

dimana τ_{bif} dan ω_{bif} didefinisikan pada (23).

Selanjutnya mendiferensialkan persamaan (13) terhadap τ , maka diperoleh

$$\begin{aligned} P(\lambda) + Q(\lambda)e^{-\lambda\tau} &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C\lambda^2e^{-\lambda\tau} + D\lambda e^{-\lambda\tau} + Ee^{-\lambda\tau} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d(\lambda^3)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} + A \frac{d(\lambda^2)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} + B \frac{d\lambda}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} + C \left\{ \lambda^2 \left[\frac{d(e^{-\lambda\tau})}{d(-\lambda\tau)} \left(-\lambda \cdot 1 + \tau \frac{d(-\lambda)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \right) \right] + e^{-\lambda\tau} \frac{d(\lambda^2)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \right\} \\ + D \left\{ \lambda \left[\frac{d(e^{-\lambda\tau})}{d(-\lambda\tau)} \left(-\lambda \cdot 1 + \tau \frac{d(-\lambda)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \right) \right] + e^{-\lambda\tau} \frac{d\lambda}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \right\} + E \left[\frac{d(e^{-\lambda\tau})}{d(-\lambda\tau)} \left(-\lambda \cdot 1 + \tau \frac{d(-\lambda)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \right) \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow (3\lambda^2 + 2A\lambda + B - (C\lambda^2 + D\lambda + E)\tau)e^{-\lambda\tau} + (2C\lambda + D)e^{-\lambda\tau} \frac{d\lambda}{d\tau} &= (C\lambda^2 + D\lambda + E)\lambda e^{-\lambda\tau} \\ \Leftrightarrow \frac{d\lambda}{d\tau} &= \frac{(C\lambda^2 + D\lambda + E)\lambda e^{-\lambda\tau}}{3\lambda^2 + 2A\lambda + B - (C\lambda^2 + D\lambda + E)\tau e^{-\lambda\tau} + (2C\lambda + D)e^{-\lambda\tau}}. \end{aligned}$$

Dari persamaan (13), kita mempunyai

$$e^{-\lambda\tau} = \frac{-\lambda^3 - A\lambda^2 - B\lambda}{C\lambda^2 + D\lambda + E}.$$

Maka kita memperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{d\tau} &= \frac{\lambda(-\lambda^3 - A\lambda^2 - B\lambda)}{3\lambda^2 + 2A\lambda + B - \tau(-\lambda^3 - A\lambda^2 - B\lambda) + (2C\lambda + D)e^{-\lambda\tau}} \\ \operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_b} &= \frac{\lambda(-\lambda^3 - A\lambda^2 - B\lambda)}{3\lambda^2 + 2A\lambda + B - \tau(-\lambda^3 - A\lambda^2 - B\lambda) + (2C\lambda + D)e^{-\lambda\tau}} \\ &= \frac{i\omega_b(-(i\omega_b)^3 - A(i\omega_b)^2 - Bi\omega_b)}{3(i\omega_b)^2 + 2Ai\omega_b + B - \tau_b(-(i\omega_b)^3 - A(i\omega_b)^2 - Bi\omega_b) + (2Ci\omega_b + D)(\cos \omega_b\tau_b - i \sin \omega_b\tau_b)} \\ &= \frac{-\omega_b^4 + iA\omega_b^3 + B\omega_b^2}{-3\omega_b^2 + 2Ai\omega_b + B - \tau_b i\omega_b^3 - \tau_b A\omega_b^2 + \tau_b Bi\omega_b + 2Ci\omega_b \cos \omega_b\tau_b + 2C\omega_b \sin \omega_b\tau_b + D \cos \omega_b\tau_b - Di \sin \omega_b\tau_b} \\ &= \frac{-\omega_b^4 + B\omega_b^2 + A\omega_b^3 i}{P_1^2 + Q_1^2} \cdot (P_1 - Q_1) \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} P_1 &= -3\omega_b^2 + B - \tau_b A\omega_b^2 + 2C\omega_b \sin \omega_b\tau_b + D \cos \omega_b\tau_b \\ Q_1 &= 2A\omega_b - \tau_b \omega_b^3 + \tau_b B\omega_b + 2C\omega_b \cos \omega_b\tau_b - D \sin \omega_b\tau_b \\ &= \frac{3\omega_b^6 - 4B\omega_b^4 + 2A^2\omega_b^4 + B^2\omega_b^2}{P_1^2 + Q_1^2} \\ &= \frac{\omega_b^2(3\omega_b^4 + B^2 + (-4B + 2A^2)\omega_b^2)}{P_1^2 + Q_1^2} \end{aligned}$$

Misalkan $z = \omega_b^2$ maka $f(z) = z^3 + (A^2 - 2B - C^2)\omega_b^2 z + (B^2 + 2EC - D^2)\omega_b - E^2$ dan $f'(z) = 3z^2 + 2(A^2 - 2B - C^2)z + (B^2 + 2EC - D^2)$. Jika ω_b adalah akar positif terkecil dari persamaan (19) (kecuali jika merupakan akar kembar maka dipilih akar terkecil berikutnya), maka

$$\left. \frac{d\lambda}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_b} = \frac{\omega_b^2(f'(\omega_b^2) + 2C^2\omega_b^2 + D^2 - 2EC)}{P_1^2 + Q_1^2} > 0$$

yang memperlihatkan bahwa syarat transversal terpenuhi, sehingga terbukti terjadi bifurkasi Hopf pada saat $\tau = \tau_b$.

3.4 Simulasi di Titik Ekuilibrium E^* Tanpa Waktu Tunda

Untuk menemukan solusinya dipilih nilai-nilai parameter yang diberikan pada Tabel 1.

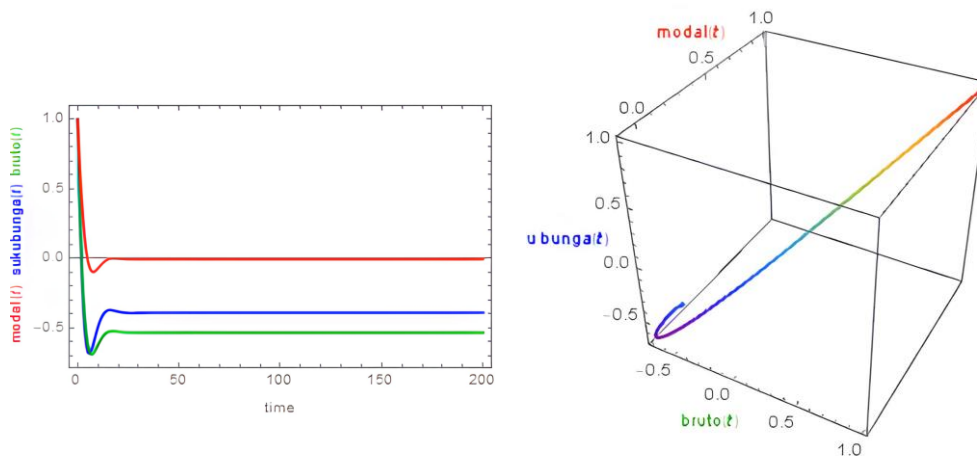
Tabel 1. Daftar titik ekuilibrium, parameter batas keberadaan titik ekuilibrium, nilai-nilai parameter dan kestabilan titik ekuilibrium

Titik	Syarat	α	β	δ	δ_1	β_1	β_2	β_3	l_1	l_2	η	\bar{M}
E^*	❖ $\alpha, \beta, \delta, \delta_1, \beta_1, \beta_2,$ $\beta_3, l_1, l_2, \eta, M > 0$											
	❖ $\theta < 0$ dan	1,3	1,1	0,35	0,1	0,25	0,4	0,5	0,2	0,3	0,35	0,15
	❖ $(\delta + \delta_1)l_1 - \delta\eta < 0$.											

Titik tetap yang diperoleh pada kasus ini, yaitu

$$E^*(0,6269531250; 0,4453125000; 0,07617187500).$$

Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Bidang solusi dan potret fase sistem pada model siklus bisnis IS-LM untuk titik ekuilibrium E^*

Pada Gambar 1, untuk bidang solusi memperlihatkan adanya osilasi dengan simpangan yang semakin kecil, sehingga produk kotor (*bruto*), modal *dan* suku bunga tersebut berkembang dan akhirnya stabil menuju ke suatu nilai.

Pada kasus ini, untuk potret fase titik ekuilibrium E^* merupakan merupakan titik simpul stabil.

3.5 Simulasi di Titik Ekuilibrium E^* dengan Waktu Tunda

Simulasi numerik model siklus bisnis IS-LM dengan waktu tunda dilakukan untuk menunjukkan adanya pengaruh waktu tunda terhadap kestabilan titik tetap E^* . Nilai-nilai parameter yang digunakan untuk simulasi di titik ekuilibrium E^* disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2 Nilai parameter untuk simulasi di titik ekuilibrium E^* dengan waktu tunda

Parameter	α	β	δ	δ	β_1	β_2	β_3	l_1	l_2	l_2	\bar{M}
Nilai	3	2	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,31	0,1	0,3	0,05

Dari Tabel 2 diperoleh

$$\theta = \delta(\beta_3\eta - l_2\beta_1) - (\delta + \delta_1)(\beta_2l_2 + \beta_3l_1) = -0,018.$$

$$\hat{Y} = \frac{-\bar{M}(\delta_1\beta_2 + \delta(\beta_1 + \beta_2))}{\theta} = 1,166666667.$$

$$\hat{K} = \frac{-(\eta\beta_2 + \beta_1l_1)\bar{M}}{\theta} = 0,2777777778.$$

$$\hat{R} = \frac{((\delta + \delta_1)l_1 - \delta\eta)\bar{M}}{\theta} = 0,2222222222.$$

Jadi diperoleh titik ekuilibrium

$$E^*(1,166666667; 0,2777777778; 0,2222222222).$$

Kemudian dari nilai-nilai parameter yang disajikan pada Tabel 2, diperoleh

$$\begin{aligned}
A &= \beta\beta_3 + \alpha(l_1 - \eta) = 0,3, \\
B &= \alpha\beta l_2(\beta_1 + \beta_2) + \alpha\beta\beta_3(l_1 - \eta) = 0,06, \\
C &= \delta + \delta_1 = 1,1, \\
D &= \delta(\alpha(l_1 - \eta) + \beta\beta_3) + \delta_1(\beta\beta_3 + \alpha l_1) = 0,42, \\
E &= \alpha\beta\delta_1(\beta_2 l_2 + \beta_3 l_1) + \alpha\beta\delta(\beta_3(l_1 - \eta) + l_2(\beta_1 + \beta_2)) = 0,108. \\
\omega^6 + (A^2 - 2B - C^2)\omega^4 + (B^2 + 2EC - D^2)\omega^2 - E^2 &= 0 \\
\Leftrightarrow \omega^6 - 1,24\omega^4 + 0,0648\omega^2 + 0,011664 &= 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

Misal $z = \omega^2$, maka persamaan (24) menjadi

$$(z - 1,193907312)(z^2 - 0,04609268812z + 0,009769602618) = 0.$$

Oleh sebab syarat $\omega > 0$, maka dipilih $z_1 = 1,193907312$. Maka diperoleh $\omega_1 = \sqrt{1,193907312} = \pm 1,092660657$.

Oleh sebab $\omega > 0$, maka dipilih $\omega_1 = 1,092660657$. Kemudian dicari nilai τ_k dengan mensubstitusikan nilai-nilai A, B, C, D, E dan ω_k ke persamaan berikut.

$$\begin{aligned}
\tau_k &= \frac{1}{\omega_k} \tan^{-1} \left(- \frac{C\omega_k^5 - (E + BC - AD)\omega_k^3 + BE\omega_k}{(AC - D)\omega_k^4 + (-AE + BD)\omega_k^2 + CE} \right). \\
\Leftrightarrow \tau_k &= \frac{1}{1,092660657} \tan^{-1} \left(- \frac{1,657706716}{-0,0180834527} + 2,0 \cdot \pi \right). \\
\Leftrightarrow \tau_k &= 1,4276505207.
\end{aligned}$$

Pada tabel 3 dapat dilihat bahwa nilai batas waktu tunda pada jarak $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$.

Tabel 3 Nilai waktu tunda pada jarak $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$

k	τ
0	1,4276505207
1	7,177958958
2	12,92831271
\vdots	\vdots
n	τ_n

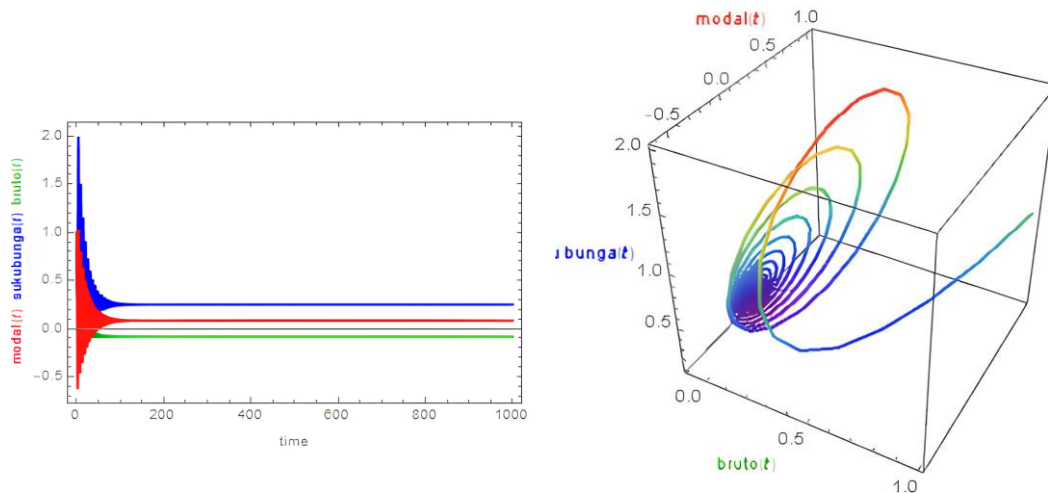
Dalam artikel ini hanya dibahas nilai waktu tunda pada saat, sebelum dan sesudah nilai batas waktu tunda pada jarak $k = 0$. Selain parameter yang telah disebutkan pada Tabel 4, perlu dilakukan pemilihan parameter waktu tunda yang ditunjukkan untuk memperlihatkan perubahan kestabilan titik tetap. Pada simulasi ini akan disediakan tiga kasus untuk menunjukkan keberadaan bifurkasi Hopf.

Tabel 4. Pemilihan waktu tunda serta kestabilan model

No	Kasus	τ	Kestabilan Titik Tetap
1	$\tau < \tau_k$	1.1	Spiral stabil
2	$\tau = \tau_k$	1,4276505207	Spiral stabil
3	$\tau > \tau_k$	2	Spiral tidak stabil

Simulasi di Titik Ekuilibrium E^* untuk kasus $\tau < \tau_k$

Pada kasus ini, nilai parameter yang digunakan adalah $\tau = 1,1 < \tau_k$. Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar 2.

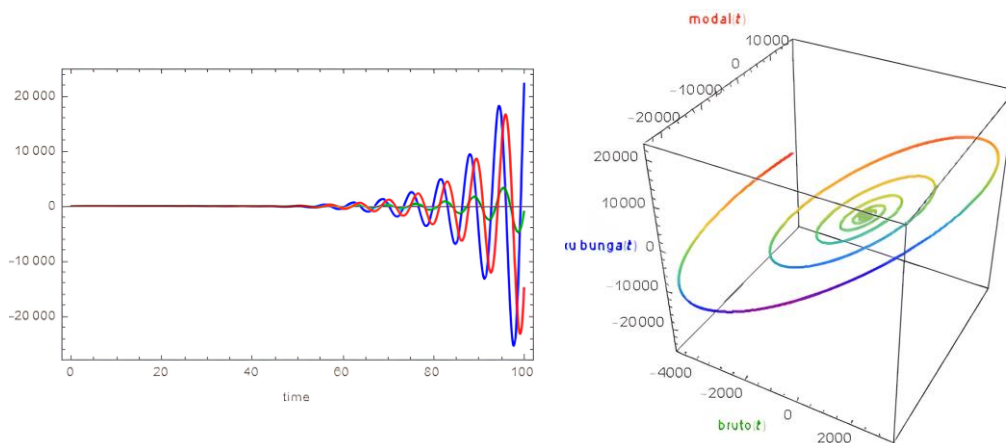


Gambar 2. Bidang solusi system dan potret fase di titik ekuilibrium E^* untuk kasus $\tau < \tau_k$

Pada Gambar 2, untuk bidang solusi memperlihatkan adanya osilasi dengan simpangan yang semakin kecil, sehingga kedua populasi tersebut berkembang dan akhirnya stabil menuju ke suatu nilai.

Simulasi di Titik Ekuilibrium E^* untuk kasus $\tau = \tau_k$

Pada kasus ini, nilai parameter yang digunakan adalah $\tau = 1,4276505207 = \tau_k$. Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar 3.

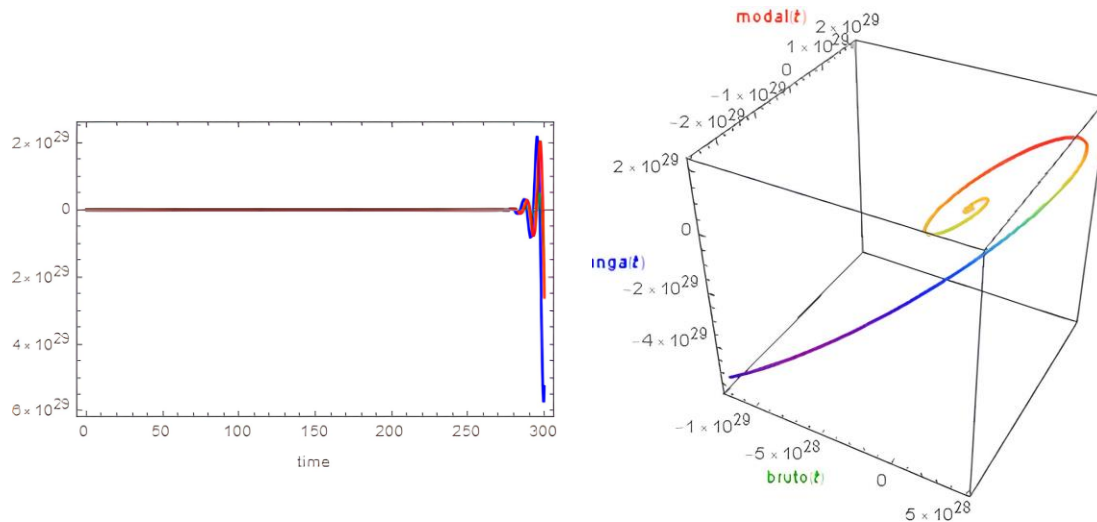


Gambar 3 Bidang solusi sistem dan potret fase di titik ekuilibrium E^* untuk kasus $\tau = \tau_k$

Pada Gambar 3, untuk bidang solusi memperlihatkan adanya osilasi dengan simpangan yang semakin kecil, sehingga kedua populasi tersebut berkembang dan akhirnya stabil menuju ke suatu nilai.

Simulasi di Titik Ekuilibrium E^* untuk kasus $\tau > \tau_k$

Pada kasus ini, nilai parameter yang digunakan adalah $\tau = 2 > \tau_k$. Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar 4.



Gambar 4 Bidang solusi sistem dan potret fase di titik ekuilibrium E^* untuk kasus $\tau > \tau_k$

Pada Gambar 4 memperlihatkan adanya osilasi dengan simpangan yang semakin besar, sehingga kedua populasi tersebut berkembang dan akhirnya menjauhi titik keseimbangannya.

4. Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa berdasarkan penondimensian model, diperoleh model matematika IS-LM dengan waktu tunda. Dalam menganalisis keberadaan bifurkasi Hopf, model ini dibagi menjadi tiga kasus dimana tiap kasusnya mengalami kenaikan nilai parameter waktu tunda dalam produk kotor, modal dan suku bunga (τ). Pada kasus $\tau = \tau_k$ terjadi perubahan kestabilan titik dari spiral stabil menjadi spiral tak stabil dan kemunculan *Limit Cycle*. Fenomena ini merupakan sifat dari bifurkasi Hopf. Dengan memilih parameter bifurkasi yang tepat, kami menyelidiki kestabilan lokal dan bifurkasi Hopf. Pengamatan pada simulasi model dilakukan dengan bervariasi nilai waktu tunda. Saat bifurkasi Hopf terjadi, grafik pada bidang solusi memperlihatkan pergerakan osilasi yang konstan. Apabila $\tau < \tau_k$, solusi sistem terkontrol menuju kondisi yang seimbang. Kemudian Ketika $\tau > \tau_k$ solusi sistem terus berfluktuasi sehingga menyebabkan kondisi sistem yang tidak stabil.

Referensi

- [1] L. P. Sinaga, D. Kartika & H. Nasution, Pengantar Sistem Dinamik: Amal Insani, Banten, 2021
- [2] C. Ragan & R. Lipsey, Economics, Thirteenth Canadian Edition: Pearson Canada, Toronto, 2017
- [3] C. Seftarita, Kebijakan Ekonomi Makro dan Siklus Bisnis; Kajian Teori dan Studi Empiris: Syiah Kuala University Press, Banda Aceh, 2014.
- [4] E. H. Nugrahani, P. Sianturi & Rosmely, Analisis bifurkasi pada model siklus bisnis IS-LM (Investment Saving-Liquidity Money): IPB Bogor, 2016.
- [5] L. Guerrini, A. Krawiec & M. Szydłowski, "Bifurcation in a economic growth model with a distributed time delay transformed to ODE", *Nonlinear Dyn*, vol. 101, pp. 1263-1279, 2020. doi: <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05824-y>
- [6] F. Karim, S. Chauhan, S. k. Bhatia, "Hopf Bifurcation in an Augmented IS-LM Linear Business Cycle Model with Two Time Delays", *International Journal of Mathematical, Engineering and*

- Management Sciences*, vol. 5, no. 3, pp. 518-528,2020. doi: <https://doi.org/10.33889/IJMEMS.2020.5.3.043>
- [7] Y. Xie, Z. Wang, and B. Meng, "Stability and Bifurcation of a Delayed Time-Fractional Order Business Cycle Model with a General Liquidity Preference Function and Investment Function", *mathematics*, vol. 7, no. 846, 2019. doi: <https://doi.org/10.3390/math7090846>
- [8] A. N. Hidayati, E. Apriliani, I. G. R. Usadha, "Optimal Control Of Dynamic IS-LM Bussiness Cycle Model With Two Time Delay," *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1373, 2019. doi: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1373/1/012038>
- [9] U. M. Musyaffafi, M. Hafiyusholeh, Y. Farida, A. Fanani, A. Z. Arifin, "Stability Analysis of Cycle Business Investment Saving-Liquidity Money (IS-LM) Model using Runge-Kutta Fifth Order and Extended Runge-Kutta Method," *BEST ICON*, pp. 240-246, 2018. doi: <https://doi.org/10.5220/0008905402400246>
- [10] F. Karim, S. Chauhan, J. Dhar, "On the Comparative analysis of linear and nonlinear business cycle model: Effect on system dynamics, economy and policy making general," *Quantitative Finance and Economics*, vol. 4, Issue 1, pp. 172-203. doi: <https://doi.org/10.3934/QFE.2020008>
- [11] M. Assous, A. Dutt, P. Fourchard, A. Pottier,"In Stability in Kalecki's Early Macroeconomics," *Journal of the History of Economics Thought*, vol. 39, Special Issue 1, pp.69-87, March 2017. doi: <https://doi.org/10.1017/S1053837216001097>
- [12] E. S. Kurkina, "Mathematical Models of Investment Cycles," *Computational Mathematics and Modeling*, vol. 28, no. 3, July, 2017. doi: <https://doi.org/10.1007/s10598-017-9371-4>
- [13] I. Bashkirtseva, L. Ryashko, dan A. Sysolyatina, Analysis of stochastic effects in Kaldor type business cycle discrete model. *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol.36, pp.446 - 456, 2016. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.12.020>
- [14] I. Bashkirtseva, L. Ryashko, dan T. Ryazanova, Stochastic sensitivity analysis of the variability of dynamics and transition to chaos in the business cycles model, *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol.54, pp.174 - 184, 2018. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.05.030>
- [15] E. Cahyono, L. O. Saidi, Makkulau, M. Syarif, dan R. Raya. Quantitative aspects of business/economic cycle. *Proceeding of the 3rd SHIELD International Conference*, pp.56-64, 2018
- [16] J. Kodera, J. Radova, and T. V. Quang, A Modification of Kaldor-Kalecki Model and its Analysis, *30th International Conference Mathematical Methods in Economics*, pp.420-425, 2012
- [17] N. G. Mankiw, *Principles of Economics*, South Western: Cengage Learning, 2017
- [18] M. U. Syarif, E. Cahyono, dan P. Adam, Study on business cycle in Indonesian economy: A signal processing approach. *Global and Stochastic Analysis*. Vol. 5 [6], pp.35-43, Special Issue 2018
- [19] B. Volna,"Relaxation Oscillations in New IS-LM Model," *Dynamical Ssystems (math. DS)*, vol. 95, no. 3, pp.661-667
- [20] G. Gabisch, H.W. Lorenz, *Business cycle theory - A survey of methods and concepts (Second Edition)*: Springer, New York, 1989.
- [21] J. P. Cai, "Hopf bifurcation in the IS-LM business cycle model with time delay", *Electronic Journal of Differential Equations*, no. 15, pp.1-6, 2005

- [22] Kaldor N, "A Model of the Trade Cycle", *Economic Journal*, vol.50, 78-92, 1940
- [23] V. Torre, "Existence of limit cycles and control in complete Keynesian systems by theory of bifurcations", *Econometrica*, vol.45, pp. 1457-1466, 1977
- [24] M. Kalecki, A macrodynamic theory of business cycle, *Econometrica*, vol. 3, pp.327-344, 1935