

# Analisis Dinamik pada Model Matematika SVEIBR dengan Kontrol Optimal Untuk Pengendalian Penyebaran Penyakit Kolera

Agusyarif Rezka Nuha<sup>1\*</sup>, Resmawan<sup>2</sup>, Sri Lestari Mahmud<sup>3</sup>, Asriadi<sup>4</sup>, Andi Agung<sup>5</sup>, Sri Istiyarti Uswatun Chasanah<sup>6</sup>

<sup>1,2,3,4</sup> Program Studi Matematika, Universitas Negeri Gorontalo, Bone Bolango 96554, Indonesia

<sup>5</sup> Program Studi Matematika, Universitas Pesantren Tinggi Darul 'Ulum, Jombang 61481, Indonesia

<sup>6</sup> Program Studi Matematika, UIN Sunan Kalijaga, Yogyakarta, 55281, Indonesia

\*Penulis Korespondensi. Email: [agusyarif@ung.ac.id](mailto:agusyarif@ung.ac.id)

---

## Abstrak

Penyakit kolera merupakan penyakit menular yang menyerang sistem pencernaan manusia serta dapat mengakibatkan kematian. Artikel ini membahas hasil penelitian terkait model matematika penyebaran penyakit kolera dalam bentuk sistem kontrol optimal dengan mengkombinasikan tiga strategi kontrol yaitu vaksinasi, karantina, dan sanitasi lingkungan. Prinsip maksimum Pontryagin diterapkan untuk mendapatkan kondisi syarat optimal berdasarkan strategi kontrol yang diterapkan. Mengacu pada syarat optimal yang ditetapkan, untuk menggambarkan hasil secara teoritis, model diselesaikan secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta Orde 4. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa penerapan ketiga strategi kontrol dalam mengendalikan penyebaran penyakit kolera memberikan dampak positif terhadap penurunan jumlah kasus infeksi sehingga penularan penyakit dapat dihentikan.

**Kata Kunci:** Karantina; Kontrol Optimal; Model SVEIBR; Sanitasi; Vaksinasi; Kolera

## Abstract

*Cholera is an infectious disease that attacks the human digestive system and can cause death. This article discusses the research results related to the mathematical model of the spread of cholera in the form of an optimal control system by combining three control strategies: vaccination, quarantine, and environmental sanitation. Pontryagin's maximum principle is applied to obtain optimal conditions based on the control strategy applied. Referring to the optimal conditions set, the model was solved numerically using the Runge-Kutta Order 4 method to describe the theoretical results. The calculation results show that applying the three control strategies in controlling the spread of cholera positively impacts reducing the number of cases of infection so that disease transmission can be discontinued.*

**Keywords:** Quarantine; Optimum Control; SVEIBR Model; Sanitation; Vaccination; Cholera

---

## 1. Pendahuluan

Kolera termasuk dalam jenis penyakit menular pada manusia yang diakibatkan oleh infeksi bakteri *Vibrio cholerae*. Umumnya penyakit ini menular melalui konsumsi makanan atau minuman yang sudah terkontaminasi bakteri *V. cholerae*. Gejala yang timbul adalah sakit perut, muntah disertai diare akut sehingga mengakibatkan penderita kehilangan cairan tubuh dalam jumlah banyak. Dampak terburuk dari penyakit ini adalah kematian bagi penderita serta pencemaran lingkungan oleh bakteri yang berasal dari cairan tubuh penderita [1].

Penyakit kolera pertama kali muncul di India pada tahun 1817 dan berkembang menjadi pandemi hingga tahun 1923 [2]. Penyebaran penyakit kolera terus meluas hingga sampai ke wilayah Indonesia tepatnya di Surabaya pada tahun 1864 sampai dengan 1869 dan tahun 1918 sampai dengan 1920 [3]. Pada tahun 1961 pandemi kolera terjadi kembali untuk ke tujuh kalinya dengan kemunculan

pertama di wilayah Asia Selatan. Penyebaran penyakit terus terjadi hingga mencapai wilayah Afrika di tahun 1971 dan Amerika pada tahun 1991 [4]. Bahkan WHO melaporkan masih terjadi penyebaran wabah kolera mulai dari tahun 2017 sampai dengan tahun 2021 di Somalia [5]. Hal ini menunjukkan bahwa, dalam rentang waktu dua abad sejak kemunculannya, wabah kolera masih menjadi masalah dan tantangan kesehatan di berbagai belahan dunia.

Oleh karena itu, dibutuhkan perhatian khusus untuk menangani penyebaran penyakit ini. Salah satu bidang ilmu yang mempelajari dan menganalisis karakteristik penyebaran penyakit adalah pemodelan matematika. Model matematika penyebaran penyakit merupakan simplifikasi atau tiruan dari dinamika penyebaran virus maupun penyakit yang disusun dalam bentuk persamaan matematika [6]. Solusi dari model tersebut dapat diinterpretasikan kembali kedalam kejadian nyata untuk menjawab pertanyaan khusus tentang kapan dan bagaimana suatu lingkungan akan terkena wabah penyakit.

Secara umum, model matematika pada penyebaran penyakit membagi kelompok populasi manusia kedalam beberapa kelas subpopulasi. Diantaranya adalah model matematika tipe SIR yang membagi populasi manusia kedalam tiga kelas populasi yaitu *susceptible* (rentan), *infection* (terinfeksi), dan *recovery* (sembuh). Setiap individu yang baru lahir akan dimasukkan kedalam kelas populasi rentan. Individu kelas populasi rentan akan berpindah kedalam kelas populasi terinfeksi jika berinteraksi dengan individu terinfeksi. Sebelum itu, diawal waktu diasumsikan bahwa terdapat sejumlah individu yang terinfeksi penyakit akibat adanya virus dalam tubuh. Individu terinfeksi dapat mengalami penyembuhan baik secara alami maupun karena adanya perlakuan khusus yang kemudian akan dimasukkan kedalam kelas populasi sembuh. Beberapa penelitian yang membahas model matematika tipe SIR dapat dilihat pada [7]–[10]. Sedangkan pengembangan model matematika tipe SIR yang secara khusus membahas penyebaran penyakit kolera diantaranya dapat ditemukan pada [11]–[13].

Perumusan model matematika terus mengalami variasi atau perkembangan, diantaranya model matematika dengan adanya penambahan kelas populasi *exposed* (terpapar) pada kelompok populasi manusia, yang kemudian dikenal sebagai model matematika tipe SEIR. Pada dasarnya konsep penyebaran penyakit dari model ini hampir sama dengan model sebelumnya, yang membedakan adalah adanya periode laten atau masa inkubasi dalam proses terjadinya infeksi dimana individu pada periode tersebut dimasukkan kedalam kelas populasi terpapar. Masa inkubasi merupakan waktu yang diperlukan oleh virus menjadi berlipatganda sehingga muncul gejala penyakit pada inangnya [14]. Periode inkubasi ini juga dialami oleh pengidap penyakit kolera dalam jangka waktu 1,4 hingga 4,4 hari setelah infeksi [15]. Walaupun sudah terpapar virus, individu kelas populasi terpapar belum dapat menularkan virus ke individu rentan. Jika masa inkubasi telah berakhir, individu pada kelas populasi terpapar akan dimasukkan kedalam kelas individu terinfeksi. Konsep atau penggunaan model ini dapat ditemukan pada [16]–[18].

Model matematika yang dibahas pada penelitian ini merupakan model matematika yang sebelumnya telah dikaji oleh Nuha dan Resmawan [16]. Seluruh parameter yang digunakan dalam model [16] masih bernilai konstan, sehingga perlu dilakukan analisis atau kajian mendalam berupa kontrol optimal dengan menetapkan beberapa variabel kontrol pada model. Beberapa kajian terkait kontrol optimal pada model matematika dalam mengatasi masalah penyebaran penyakit terdapat pada [13], [19], [20]. Pada penelitian ini digunakan tiga variabel kontrol yang terdiri atas strategi vaksinasi, karantina, dan sanitasi lingkungan. Kontrol optimal merupakan suatu pendekatan yang dapat membantu memberikan solusi untuk memaksimalkan atau meminimumkan fungsi objektif berdasarkan perubahan nilai variabel kontrol [21]. Fungsi objektif digunakan untuk meminimumkan jumlah individu yang terinfeksi penyakit kolera. Untuk mencapai syarat optimum, digunakan prinsip maksimum Pontryagin [22] dan metode Runge-Kutta orde-4 [23] untuk mendapat solusi atau simulasi numerik. Interpretasi biologis dalam menggambarkan dinamika penyebaran penyakit kolera didasarkan pada hasil simulasi numerik.

## 2. Model Dengan Kontrol

Variabel yang digunakan dalam penelitian ini merepresentasikan kelas populasi manusia yang terdiri atas kelas populasi rentan atau *susceptible* (S), ter vaksin atau *vaccinated* (V), terpapar atau *exposed* (E), terinfeksi atau *infected* (I), sembuh atau *recovered* (R), dan kelas populasi bakteri atau *bacteria* (B).

Adapun parameter-parameter model merepresentasikan pengaruh atau laju terjadinya perpindahan antara kelas populasi yang satu dengan lainnya. Namun, tidak terjadi perpindahan kelas populasi dari manusia ke dalam kelas populasi bakteri. Setiap individu manusia yang baru lahir akan masuk kedalam kelas populasi rentan dengan laju sebesar  $A$ . Proses awal penularan penyakit diakibatkan terjadinya interaksi antara bakteri dengan individu rentan yang mengakibatkan terjadinya perpindahan individu pada kelas populasi rentan kedalam kelas populasi terpapar dengan laju sebesar  $\beta$ . Setelah melewati masa inkubasi akan terjadi perpindahan individu dari kelas populasi terpapar kedalam kelas populasi terinfeksi dengan laju sebesar  $\psi$ . Keberadaan individu atau manusia terinfeksi penyakit akan menambah jumlah bakteri di lingkungan dengan laju sebesar  $\xi$ . Sebagian dari individu pada kelas populasi terinfeksi akan sembuh dari penyakit kolera dan masuk kedalam kelas populasi sembuh dengan laju sebesar  $\gamma$ . Selain itu, seluruh individu pada setiap kelas populasi manusia berpotensi akan mengalami kematian secara alami dengan laju sebesar  $\mu$ . Khusus untuk individu pada kelas populasi terinfeksi, potensi kematian yang dialami akan lebih besar dibandingkan dengan kelas populasi lainnya dikarenakan adanya laju kematian akibat penyakit kolera sebesar  $d$ . Sedangkan laju kematian populasi bakteri adalah sebesar  $\delta$ .

Untuk menekan penyebaran penyakit dilakukan kontrol  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , dan  $u_3(t)$  yang masing-masing merepresentasikan strategi vaksinasi, karantina, dan sanitasi lingkungan. Strategi vaksinasi akan mengakibatkan terjadinya perpindahan individu pada kelas populasi rentan kedalam kelas populasi ter vaksin. Walaupun masih berpotensi tertular penyakit sebesar  $\sigma\beta$ , potensi tersebut masih lebih kecil dibandingkan dengan potensi penularan terhadap individu pada kelas populasi rentan. Selain itu, daya tahan tubuh akibat vaksinasi tidak bersifat permanen yang berarti bahwa selalu terjadi penurunan daya tahan tubuh pada individu kelas populasi ter vaksin sebesar  $\eta$ . Sedangkan strategi karantina bertujuan untuk menghambat terjadinya interaksi antara individu kelas populasi rentan maupun ter vaksin dengan individu kelas populasi bakteri. Berikutnya strategi sanitasi lingkungan dilakukan untuk mengurangi jumlah individu pada kelas populasi bakteri. Secara matematis, model dengan kontrol untuk penyebaran penyakit kolera disusun dalam bentuk sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= A + \eta V - u_1 S - \frac{(1 - u_2)\beta SB}{K + B} - \mu S \\
 \frac{dV}{dt} &= u_1 S - \eta V - \frac{(1 - u_2)\sigma\beta VB}{K + B} - \mu V \\
 \frac{dE}{dt} &= \frac{(1 - u_2)\beta SB}{K + B} + \frac{(1 - u_2)\sigma\beta VB}{K + B} - \psi E - \mu E \\
 \frac{dI}{dt} &= \psi E - (\mu + d + \gamma)I \\
 \frac{dB}{dt} &= \xi I - (\delta + u_3)B \\
 \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R
 \end{aligned} \tag{1}$$

### 3. Hasil dan Pembahasan

Pada pembahasan, dituliskan hasil-hasil apa saja yang diperoleh dalam penelitian. Dibahas dengan uraian yang komprehensif namun ringkas dan padu.

#### 3.1 Masalah Kontrol Optimal

Masalah utama yang akan diselesaikan pada model dengan kontrol adalah menentukan nilai dari variabel kontrol  $u_1(t), u_2(t)$ , dan  $u_3(t)$  agar dapat membawa perubahan nilai variabel dari kondisi awal  $(S_0, V_0, E_0, I_0, B_0, R_0)$  menuju kondisi akhir  $(S(t_f), V(t_f), E(t_f), I(t_f), B(t_f), R(t_f))$ . Oleh karena itu, dibutuhkan fungsi objektif yang memuat ketiga variabel kontrol untuk meminimumkan jumlah individu pada kelas populasi terpapar dan terinfeksi. Secara matematis, fungsi objektif dari kontrol optimum dinyatakan sebagai berikut:

$$J = \int_0^{t_f} \left( A_1 E(t) + A_2 I(t) + \frac{B_1}{2} u_1^2(t) + \frac{B_2}{2} u_2^2(t) + \frac{B_3}{2} u_3^2(t) \right) dt \quad (2)$$

dengan  $A_1$ , dan  $A_2$  masing-masing merepresentasikan bobot individu terpapar dan individu terinfeksi. Adapun konstanta positif  $B_1$ ,  $B_2$ , dan  $B_3$  masing-masing merepresentasikan parameter bobot dari variabel kontrol  $u_1(t), u_2(t)$ , dan  $u_3(t)$ . Sedangkan  $\frac{B_1}{2} u_1^2(t)$ ,  $\frac{B_2}{2} u_2^2(t)$  dan  $\frac{B_3}{2} u_3^2(t)$  masing-masing menyatakan biaya pelaksanaan vaksinasi, karantina, dan sanitasi lingkungan. Masalah kontrol optimal yang akan diselesaikan adalah menemukan  $u_1^*(t)$ ,  $u_2^*(t)$ , dan  $u_3^*(t)$  sehingga:

$$J(u_1^*, u_2^*, u_3^*) = \min\{(u_1, u_2, u_3) : u_1, u_2, u_3 \in \Omega\} \quad (3)$$

dimana  $\Omega = \{u_i : 0 \leq u_i(t) \leq 1, \text{ terukur Lebesgue pada } t = [0, t_f] \text{ untuk } i = 1, 2, 3\}$ .

Untuk memenuhi kontrol optimum perlu diturunkan beberapa kondisi yang dibentuk dari fungsi Hamilton dengan menerapkan prinsip maksimum Pontryagin. Fungsi Hamilton  $H$  didefinisikan berdasarkan persamaan (1) dan (2) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H = & A_1 E(t) + A_2 I(t) + \frac{B_1}{2} u_1^2(t) + \frac{B_2}{2} u_2^2(t) + \frac{B_3}{2} u_3^2(t) + \lambda_1 \left[ A + \eta V - u_1 S - \frac{(1-u_2)\beta SB}{K+B} - \mu S \right] \\ & + \lambda_2 \left[ u_1 S - \eta V - \frac{(1-u_2)\sigma\beta VB}{K+B} - \mu V \right] + \lambda_3 \left[ \frac{(1-u_2)\beta SB}{K+B} + \frac{(1-u_2)\sigma\beta VB}{K+B} - \psi E - \mu E \right] \\ & + \lambda_4 [\psi E - (\mu + d + \gamma)I] + \lambda_5 [\xi I - (\delta + u_3)B] + \lambda_6 [\gamma I - \mu R] \end{aligned}$$

dimana  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ , dan  $\lambda_6$  merupakan fungsi-fungsi adjoin.

Menurut prinsip maksimum Pontryagin [22], jika  $u_1, u_2$ , dan  $u_3$  mencapai kondisi optimal dengan waktu akhir  $t_f$ , maka terdapat pemetaan  $\lambda: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^6$ ,  $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t), \lambda_5(t), \lambda_6(t))$  sedemikian sehingga berlaku:

(1) Persamaan State

$$\dot{S}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1}, \quad \dot{V}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_2}, \quad \dot{E}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_3}, \quad \dot{I}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_4}, \quad \dot{B}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_5}, \quad \dot{R}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_6}$$

(2) Persamaan *costate*

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) &= -\frac{\partial H}{\partial S} = (u_1 + \mu)\lambda_1 + \frac{B\beta(1-u_2)\lambda_1}{K+B} - \lambda_2 u_1 - \frac{B\beta(1-u_2)\lambda_3}{B+K} \\ \dot{\lambda}_2(t) &= -\frac{\partial H}{\partial V} = (\eta + \mu)\lambda_2 + \frac{B\beta\sigma(1-u_2)\lambda_2}{K+B} - \lambda_1 \eta - \frac{B\beta\sigma(1-u_2)\lambda_3}{K+B} \end{aligned}$$

$$\dot{\lambda}_3(t) = -\frac{\partial H}{\partial E} = (\mu + \psi)\lambda_3 - A_1 - \psi\lambda_4 \quad (4)$$

$$\dot{\lambda}_4(t) = -\frac{\partial H}{\partial I} = (\gamma + \mu)\lambda_4 + d\lambda_4 - A_2 - \xi\lambda_5 - \gamma\lambda_6$$

$$\dot{\lambda}_5(t) = -\frac{\partial H}{\partial B} = \frac{1}{(K+B)^2} \left( B^2(u_3 + \delta)\lambda_5 + 2BK(u_3 + \delta)\lambda_5 + K \left( K(u_3 + \delta)\lambda_5 - (1 - u_2)\beta(\lambda_3 S - \lambda_1 S + V\sigma(\lambda_3 - \lambda_2)) \right) \right)$$

$$\dot{\lambda}_6(t) = -\frac{\partial H}{\partial R} = \mu\lambda_6$$

(3) Kondisi *stasioner*

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = \lambda_2 S + B_1 u_1 - \lambda_1 S = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = \frac{BB_2 u_2 + B_2 K u_2 + B\beta(\lambda_1 S + \lambda_2 \sigma V - \lambda_3(S + \sigma V))}{K + B} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_3} = B_3 u_3 - B\lambda_5 = 0$$

Berdasarkan kondisi diatas diperoleh

$$\bar{u}_1 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)S}{B_1},$$

$$\bar{u}_2 = \frac{B\beta(-\lambda_1 S + \lambda_3 S + (-\lambda_2 + \lambda_3)\sigma V)}{B_2(K + B)},$$

$$\bar{u}_3 = \frac{B\lambda_5}{B_3},$$

Dengan demikian diperoleh fungsi terbatas untuk setiap variabel kontrol yang dirumuskan sebagai berikut:

$$u_1^*(t) = \begin{cases} 0 & \bar{u}_1 \leq 0 \\ \bar{u}_1 & 0 < \bar{u}_1 < u_{1 \max} \\ u_{1 \max} & \bar{u}_1 \geq u_{1 \max} \end{cases},$$

$$u_2^*(t) = \begin{cases} 0 & \bar{u}_2 \leq 0 \\ \bar{u}_2 & 0 < \bar{u}_2 < u_{2 \max} \\ u_{2 \max} & \bar{u}_2 \geq u_{2 \max} \end{cases},$$

$$u_3^*(t) = \begin{cases} 0 & \bar{u}_3 \leq 0 \\ \bar{u}_3 & 0 < \bar{u}_3 < u_{3 \max} \\ u_{3 \max} & \bar{u}_3 \geq u_{3 \max} \end{cases}.$$

Jadi, kontrol optimal dari masing-masing variabel  $u_1^*(t)$ ,  $u_2^*(t)$ , dan  $u_3^*(t)$  dapat dinyatakan sebagai:

$$u_1^*(t) = \min \left( u_{1 \max}, \max \left( 0, \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)S}{B_1} \right) \right),$$

$$u_2^*(t) = \min \left( u_{2 \max}, \max \left( 0, \frac{B\beta(-\lambda_1 S + \lambda_3 S + (-\lambda_2 + \lambda_3)\sigma V)}{B_2(K+B)} \right) \right),$$

$$u_3^*(t) = \min \left( u_{3 \max}, \max \left( 0, \frac{B\lambda_5}{B_3} \right) \right).$$

Mengingat  $S(t_f)$ ,  $V(t_f)$ ,  $E(t_f)$ ,  $I(t_f)$ ,  $B(t_f)$ , dan  $R(t_f)$  tidak ditentukan (bebas), maka perlu dipenuhi syarat transversalitas sebagai berikut:

$$\lambda_1(t_f) = \lambda_2(t_f) = \lambda_3(t_f) = \lambda_4(t_f) = \lambda_5(t_f) = \lambda_6(t_f) = 0.$$

### 3.2 Simulasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan untuk mengamati dinamika atau proses penyebaran penyakit kolera menggunakan metode Runge-Kutta orde-4 dengan skema maju-mundur. Algoritma dalam menentukan penyelesaian secara numerik dari masalah kontrol optimal adalah sebagai berikut:

1. Definisikan sistem persamaan (1) dan (4) masing-masing sebagai  $F(x)$  dan  $G(x)$ , dengan

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \text{ dimana } x(0) = x_0 \text{ dan } x = (S, V, E, I, B, R),$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = G(\lambda), \text{ dimana } \lambda(t_f) = 0 \text{ dan } \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$$

2. Definisikan nilai awal untuk persamaan *state*, nilai akhir untuk persamaan *costate*, dan nilai awal untuk variabel kontrol.

$$S(0) = S_0, V(0) = V_0, E(0) = E_0, I(0) = I_0, B(0) = B_0, R(0) = R_0.$$

$$\lambda_1(t_f) = 0, \lambda_2(t_f) = 0, \lambda_3(t_f) = 0, \lambda_4(t_f) = 0, \lambda_5(t_f) = 0, \lambda_6(t_f) = 0.$$

$$u_1(0) = 0, u_2(0) = 0, u_3(0) = 0.$$

3. Menentukan solusi numerik dari persamaan *state* menggunakan skema maju sebanyak  $n$  iterasi. Pada kondisi  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ,

$$h = \frac{t_f - t_0}{n}$$

$$k_1 = F(x(i));$$

$$k_2 = F\left(x(i) + \frac{h}{2}k_1\right);$$

$$k_3 = F\left(x(i) + \frac{h}{2}k_2\right);$$

$$k_4 = F(x(i) + hk_3);$$

$$x(i+1) = x(i) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4);$$

4. Menentukan solusi numerik dari persamaan *costate* menggunakan skema mundur sebanyak  $n$  iterasi.

Pada kondisi  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ,

$$j = n + 2 - i,$$

$$h = \frac{t_f - t_0}{n};$$

$$m_1 = G(p(j+1));$$

$$m_2 = G\left(p(j+1) + \frac{h}{2}m_1\right);$$

$$m_3 = G\left(p(j+1) + \frac{h}{2}m_2\right);$$

$$m_4 = G(p(j+1) + hm_3);$$

$$p(j) = p(j+1) - \frac{h}{6}(m_1 + m_2 + m_3 + m_4);$$

5. Hitung nilai variabel kontrol pada setiap kondisi  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ,

$$u_1(i) = \min\left(u_{1\max}, \max\left(0, \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)S}{B_1}\right)\right);$$

$$u_2(i) = \min\left(u_{2\max}, \max\left(0, \frac{B\beta(-\lambda_1 S + \lambda_3 S + (-\lambda_2 + \lambda_3)\sigma V)}{B_2(K + B)}\right)\right);$$

$$u_3(i) = \min\left(u_{3\max}, \max\left(0, \frac{B\lambda_5}{B_3}\right)\right);$$

Adapun nilai awal yang digunakan dalam proses simulasi secara rinci dapat dilihat pada Tabel 1.

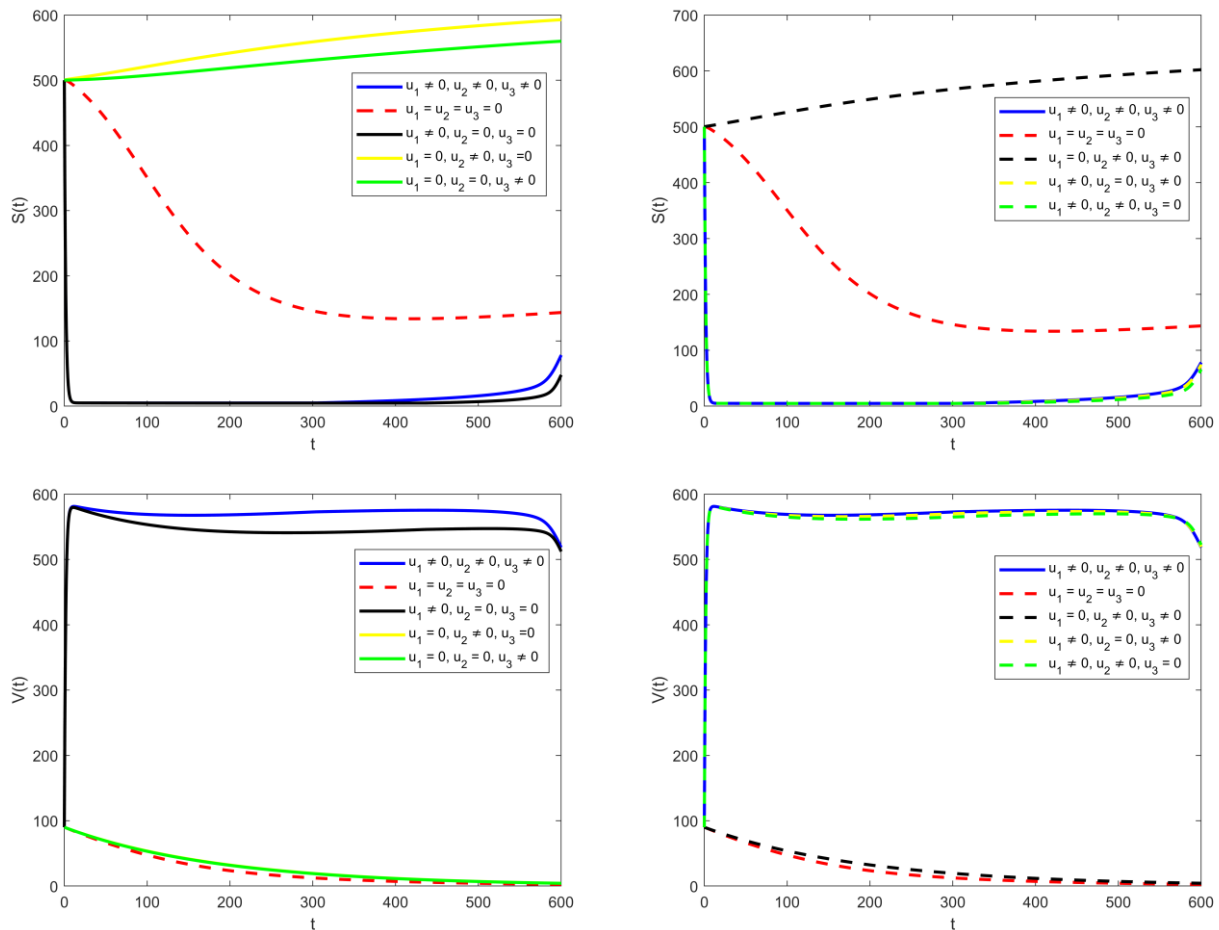
**Tabel 1.** Parameter Model

Parameter	Simbol	Nilai	Sumber
Laju kelahiran alami	$A$	0,1/hari	[13]
Laju transmisi bakteri dari lingkungan ke manusia	$\beta$	0,2143/hari	[13]
Konsentrasi jenuh bakteri dalam air	$K$	10/ hari	[13]
Laju penyusutan vaksin	$\eta$	0,005/ hari	[13]
Laju kematian alami	$\mu$	$5,48 \times 10^{-5}$ / hari	[13]
Laju penurunan efektivitas vaksin	$\sigma$	10%	[13]
Laju inkubasi	$\psi$	0,3/ hari	[13]
Laju penyembuhan	$\gamma$	0,004/ hari	[13]
Laju kematian karena penyakit	$d$	0,015/ hari	[13]
Laju pencemaran lingkungan oleh manusia yang mengakibatkan kenaikan populasi bakteri	$\xi$	100sel/ml/hari	[13]
Laju kematian bakteri	$\delta$	0,33/ hari	[13]

Untuk nilai awal dari setiap kelas populasi adalah  $S(0) = 500$ ,  $V(0) = 90$ ,  $E(0) = 0$ ,  $I(0) = 50$ ,  $B(0) = 3.000$ , dan  $R(0) = 0$ . Skenario yang diterapkan dalam simulasi adalah sebagai berikut:

1. Dengan kontrol vaksinasi, karantina, dan sanitasi lingkungan ( $u_1 \neq 0$ ,  $u_2 \neq 0$ , dan  $u_3 \neq 0$ ),
2. Tanpa kontrol ( $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 0$ ,  $u_3 = 0$ ),
3. Dengan kontrol vaksinasi ( $u_1 \neq 0$ ,  $u_2 = 0$ ,  $u_3 = 0$ ),
4. Dengan kontrol karantina ( $u_1 = 0$ ,  $u_2 \neq 0$ ,  $u_3 = 0$ ),
5. Dengan kontrol sanitasi lingkungan ( $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 0$ ,  $u_3 \neq 0$ ),
6. Dengan kontrol karantina dan sanitasi lingkungan ( $u_1 = 0$ ,  $u_2 \neq 0$ ,  $u_3 \neq 0$ ),
7. Dengan kontrol vaksinasi dan sanitasi lingkungan ( $u_1 \neq 0$ ,  $u_2 = 0$ ,  $u_3 \neq 0$ ),
8. Dengan kontrol vaksinasi dan karantina ( $u_1 \neq 0$ ,  $u_2 \neq 0$ ,  $u_3 = 0$ ).

Skenario dilakukan untuk mengetahui efektivitas dari setiap strategi, sekaligus menjadi acuan dalam menetapkan prioritas utama dari ketiga strategi jika terjadi keterbatasan biaya.

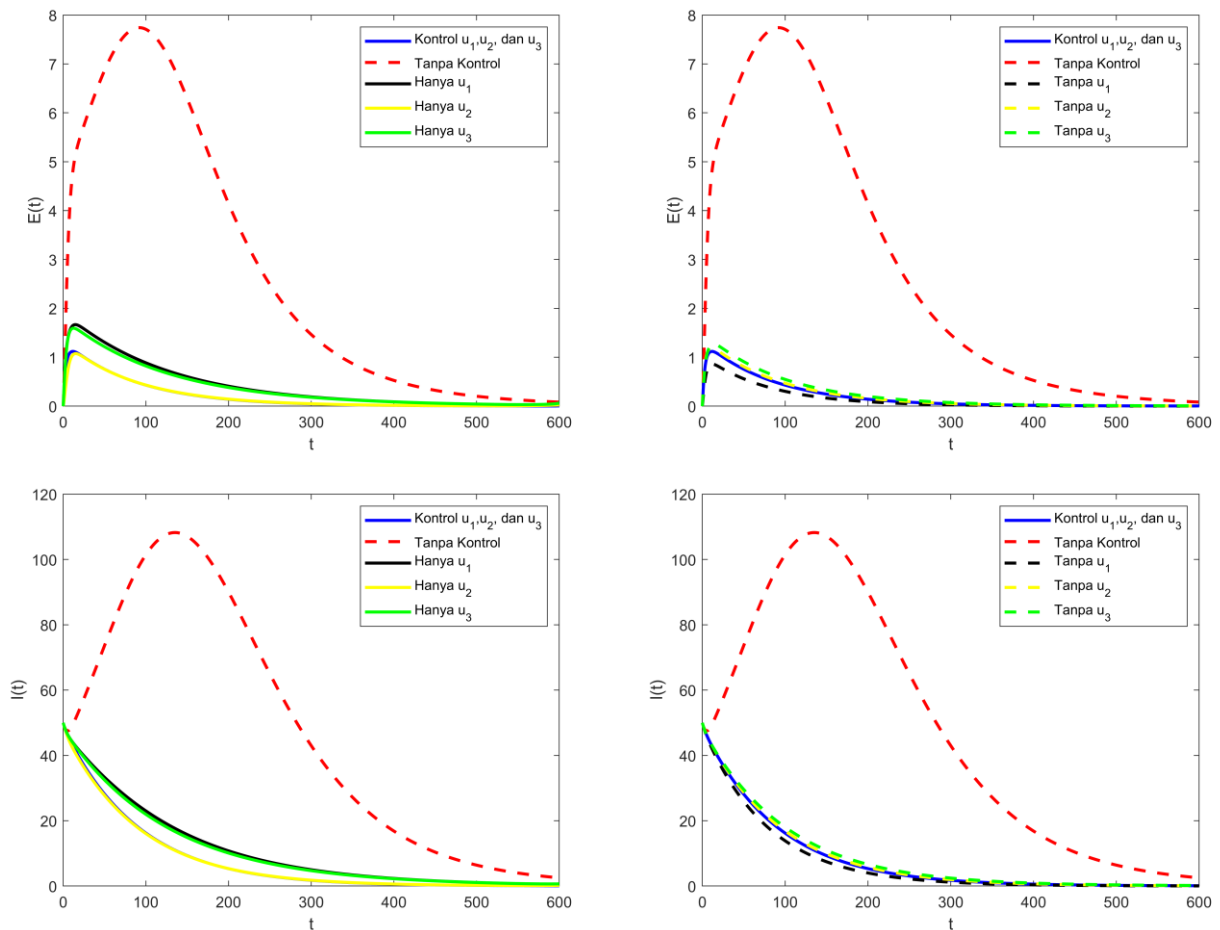


**Gambar 1.** Dinamika Individu Kelas Populasi Rentan dan Populasi Tervaksin

Berdasarkan Gambar 1, jumlah individu rentan tanpa kontrol mengalami penurunan secara signifikan dari nilai awal yaitu sejumlah 143 orang pada waktu 600 hari. Jika diberi kontrol hanya vaksinasi atau kontrol dengan tiga strategi sekaligus, jumlah penurunan akan lebih banyak lagi masing-masing sejumlah 47 dan 78 orang. Berbeda dengan kondisi ketika kontrol yang diberlakukan tanpa vaksinasi, hanya karantina atau sanitasi lingkungan, jumlah individu rentan akan meningkat secara signifikan dari nilai awal masing-masing sejumlah 602, 592, dan 559 orang. Hal ini menunjukkan bahwa strategi vaksinasi lebih cepat mengurangi jumlah individu rentan terhadap penyakit kolera dibandingkan dengan dua strategi lainnya.

Kondisi berbeda untuk individu tervaksin akan mengalami penurunan jika tidak diberi kontrol vaksinasi hingga mencapai keadaan tidak terdapat lagi individu pada kelas populasi tervaksin sebagaimana yang terdapat pada Gambar 1. Sebaliknya jika diberi kontrol vaksinasi, jumlah individu tervaksin mengalami kenaikan secara signifikan dari nilai awal yaitu sejumlah 512 orang pada waktu 600 hari. Jumlah individu tervaksin juga mengalami peningkatan hingga mencapai 518 orang jika dilakukan kontrol dengan tiga strategi kontrol sekaligus. Selain itu jumlah individu tervaksin masih mengalami peningkatan dengan jumlah 522 orang jika diberlakukan strategi kontrol vaksinasi dan karantina secara bersamaan. Hal ini menunjukkan bahwa jika program vaksinasi dihentikan, maka akan terjadi penurunan secara signifikan untuk jumlah individu pada kelas populasi tervaksin diakibatkan adanya penurunan efektivitas vaksin disertai interaksi dengan individu terinfeksi atau dikarenakan terjadinya penyusutan (penurunan) tingkat kekebalan tubuh dari individu yang sudah divaksin.

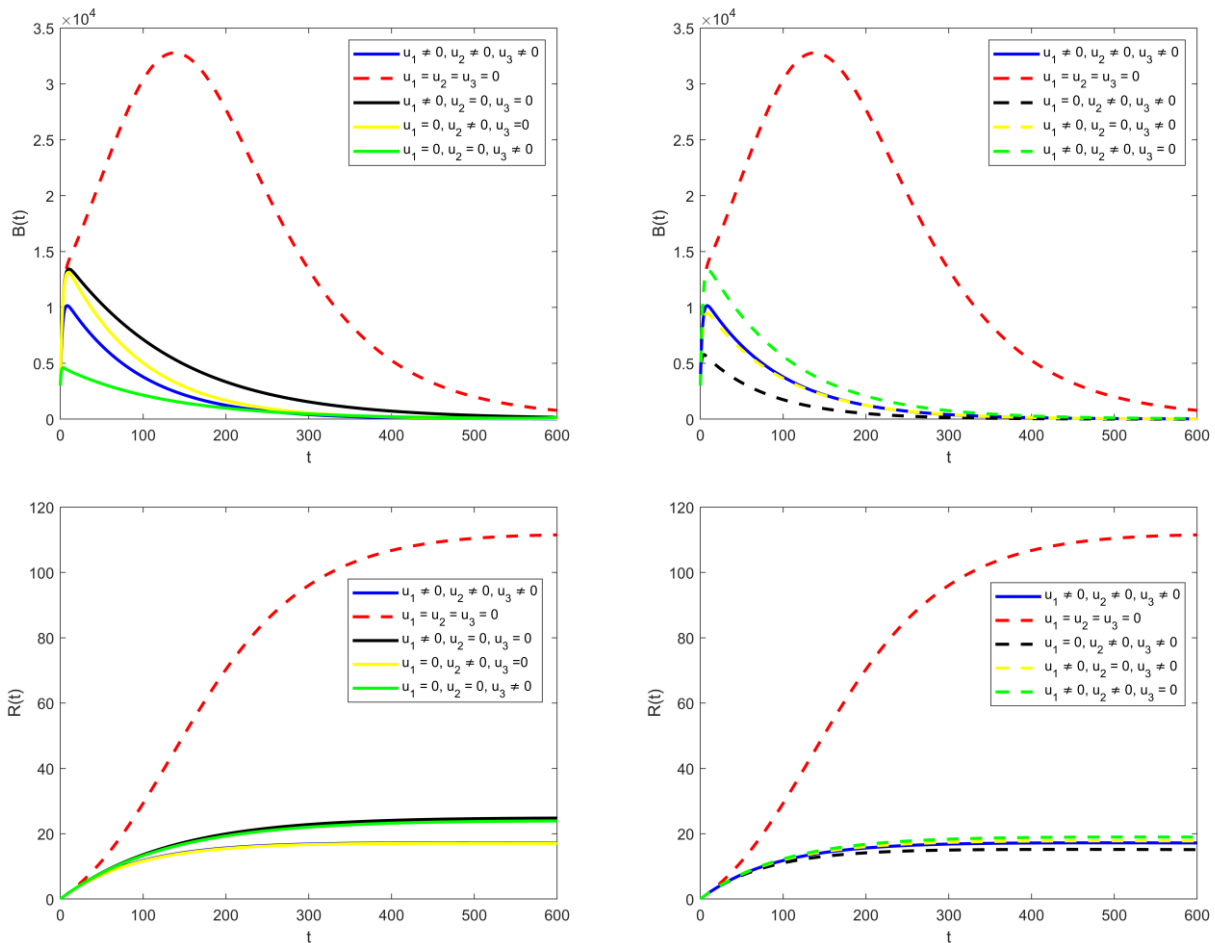




**Gambar 2.** Dinamika Individu Kelas Populasi Terpapar dan Populasi Terinfeksi

Adapun jumlah individu terpapar pada kondisi tanpa kontrol mengalami peningkatan dari nilai awal hingga mencapai 7 orang dalam rentang waktu 100 hari, namun seiring berjalannya waktu jumlahnya semakin menurun secara signifikan menuju ke titik 0 seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 2. Berbeda jika diterapkan strategi kontrol vaksinasi, karantina, dan sanitasi lingkungan, baik secara bersamaan atau menerapkan salah satu maupun dua strategi saja dari ketiganya, jumlah individu terpapar hanya mencapai 1 orang hingga akhirnya menurun dan stabil pada kondisi tidak terdapat lagi individu terpapar. Selain itu, terlihat bahwa dari ketiga strategi kontrol, yang paling optimal dalam menurunkan jumlah individu terpapar adalah strategi karantina.

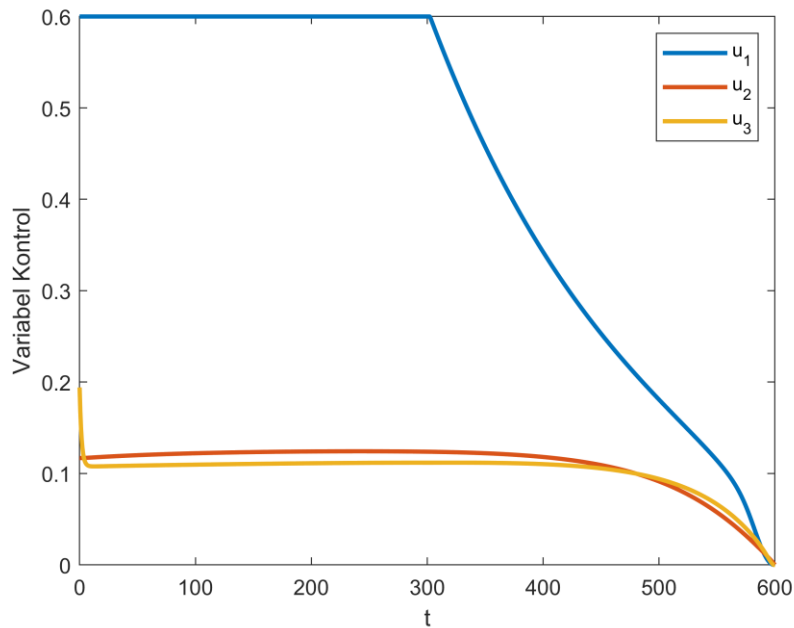
Kondisi serupa juga terjadi pada jumlah individu terinfeksi sebagaimana yang terdapat pada Gambar 2. Jumlah individu terinfeksi mengalami peningkatan diawal waktu hingga mencapai 108 orang jika tidak diberi kontrol. Jika diberi kontrol secara bersamaan atau salah satu maupun dua strategi dari ketiga strategi kontrol, jumlah individu terinfeksi mengalami penurunan secara signifikan dari nilai awal hingga akhirnya mencapai kondisi tidak terdapat lagi penyakit kolera pada populasi manusia. Hal ini menunjukkan bahwa strategi kontrol sangat optimal dalam menurunkan atau menghentikan proses penyebaran penyakit kolera. Selain itu, kontrol yang menjadi prioritas dari ketiga strategi jika terjadi keterbatasan biaya dalam mengatasi penyebaran penyakit kolera adalah strategi karantina.



**Gambar 3.** Dinamika Individu Kelas Populasi Bakteri dan Populasi Sembuh

Gambar 3 menunjukkan hasil perhitungan terhadap jumlah bakteri yang tersebar di lingkungan terus mengalami peningkatan dari nilai awal jika tidak diberi kontrol. Pada rentang waktu 100 sampai dengan 200 hari banyak bakteri yang tersebar sejumlah 32.781. Jika diterapkan kontrol secara bersamaan dari ketiga strategi kontrol jumlah bakteri yang tersebar maksimal berjumlah 10.156. Adapun strategi kontrol yang paling efisien dalam menurunkan jumlah bakteri adalah strategi sanitasi lingkungan. Untuk jumlah individu sembuh yang tidak diberi kontrol akan mengalami peningkatan dari jumlah awal hingga mencapai 111 orang pada rentang waktu 600 hari. Jika diberi kontrol secara bersamaan dari ketiga strategi kontrol, jumlah individu sembuh hanya mencapai 17 orang. Hal ini disebabkan seiring berjalannya waktu jumlah individu terinfeksi terus mengalami penurunan sebagaimana yang terlihat pada Gambar 2.

Berdasarkan Gambar 4, kontrol optimal yang mencapai nilai maksimum pada penelitian ini adalah strategi kontrol vaksinasi dengan nilai sebesar 0,6 sejak awal periode. Seiring berjalannya waktu, memasuki hari ke-302 sejak dilakukannya strategi kontrol, nilai tersebut terus mengalami penurunan hingga mencapai titik 0 pada akhir periode. Sedangkan dua strategi kontrol lainnya yaitu karantina dan sanitasi lingkungan, masing-masing sebesar 0,117 dan 0,19 sejak awal periode. Kedua nilai tersebut terus mengalami penurunan ketika memasuki hari ke-2 hingga akhirnya mencapai titik 0 pada akhir periode. Dengan demikian langkah yang perlu dilakukan untuk menghentikan proses penyebaran penyakit kolera adalah sebagai berikut: (1) melakukan vaksinasi terhadap 60% dari individu kelas populasi rentan, (2) melakukan karantina terhadap 11,7% dari individu kelas populasi terinfeksi, (3) melakukan sanitasi lingkungan untuk membasmi 19% dari jumlah bakteri yang tersebar di lingkungan.



**Gambar 4.** Dinamika Strategi Kontrol Vaksinasi, Karantina, dan Sanitasi Lingkungan

#### 4. Kesimpulan

Model dengan strategi kontrol vaksinasi, karantina, dan sanitasi lingkungan menunjukkan keefektifan dalam menurunkan jumlah kasus infeksi penyakit kolera, sehingga penyebaran penyakit dapat terkendali. Penerapan satu kontrol saja dari ketiga strategi kontrol sudah cukup dalam menekan jumlah kasus infeksi. Apabila terjadi keterbatasan biaya, maka kontrol yang menjadi prioritas utama dalam mengendalikan penyebaran penyakit adalah strategi kontrol karantina bagi individu terinfeksi.

#### Referensi

- [1] J. D. Clemens, G. B. Nair, T. Ahmed, F. Qadri, and J. Holmgren, "Cholera," *Lancet*, vol. 390, no. 10101, pp. 1539–1549, 2017, doi: 10.1016/S0140-6736(17)30559-7.
- [2] S. Swaroop and R. Pollitzer, "Cholera studies. 2. World incidence.," *Bull. World Health Organ.*, vol. 12, no. 3, pp. 311–358, 1955.
- [3] A. Muslimah, "Wabah Kolera Di Jawa Timur Tahun 1918-1927," *J. Pendidik. Sej.*, vol. 4, no. 3, 2016, [Online]. Available: <http://www.univmed.org/wp->
- [4] World Health Organization, "Cholera," 2022. <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/cholera> (accessed Jan. 12, 2023).
- [5] World Health Organization, "Cholera," 2022. <http://www.emro.who.int/health-topics/cholera-outbreak/cholera-outbreaks.html> (accessed Jan. 12, 2023).
- [6] M. Z. Ndi, *Pemodelan Matematika*. Yogyakarta: Deepublish, 2018.
- [7] S. P. Sari and E. Arfi, "Analisis Dinamik Model SIR Pada Kasus Penyebaran Penyakit Corona Virus Disease-19 (COVID-19)," *Indones. J. Appl. Math.*, vol. 1, no. 2, p. 61, 2021, doi: 10.35472/indojam.v1i2.354.
- [8] D. Prodanov, *Analytical solutions and parameter estimation of the SIR epidemic model*. Elsevier Inc., 2022. doi: 10.1016/B978-0-32-390504-6.00015-2.
- [9] S. L. Khalaf and H. S. Flayyih, "Analysis, predicting, and controlling the COVID-19 pandemic in Iraq through SIR model," *Results Control Optim.*, vol. 10, no. January, p. 100214, 2023,

doi: 10.1016/j.rico.2023.100214.

- [10] X. Wang, D. Gao, and J. Wang, "Influence of human behavior on cholera dynamics," *Math. Biosci.*, vol. 267, pp. 41–52, 2015, doi: 10.1016/j.mbs.2015.06.009.
- [11] N. S. Abdul, L. Yahya, R. Resmawan, and A. R. Nuha, "Dynamic Analysis of The Mathematical Model Of The Spread Of Cholera With Vaccination Strategies," *BAREKENG J. Ilmu Mat. dan Terap.*, vol. 16, no. 1, pp. 281–292, Mar. 2022, doi: 10.30598/barekengvol16iss1pp279-290.
- [12] N. S. Abdul, L. Yahya, R. Resmawan, and A. R. Nuha, "Dynamic Analysis of the Mathematical Model of the Spread of Cholera With Vaccination Strategies," *BAREKENG J. Ilmu Mat. dan Terap.*, vol. 16, no. 1, pp. 281–292, 2022, doi: 10.30598/barekengvol16iss1pp279-290.
- [13] X. Tian, R. Xu, and J. Lin, "Mathematical Analysis of A Cholera Infection Model With Vaccination Strategy," *Appl. Math. Comput.*, vol. 361, pp. 517–535, 2019, [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.05.055>
- [14] M. M. Wagner, A. W. Moore, and R. M. Aryel, "Case Detection, Outbreak Detection, and Outbreak Characterization," in *Handbook of Biosurveillance*, California, USA: Elsevier Academic Press, 2005.
- [15] J. Deen, M. A. Mengel, and J. D. Clemens, "Epidemiology of cholera," *Vaccine*, vol. 38, pp. A31–A40, 2020, doi: 10.1016/j.vaccine.2019.07.078.
- [16] A. R. Nuha and R. Resmawan, "Analisis Model Matematika Penyebaran Penyakit Kolera Dengan Mempertimbangkan Masa Inkubasi," *J. Ilm. Mat. dan Terap.*, vol. 17, no. 2, pp. 212–229, 2020, doi: <https://doi.org/10.22487/2540766X.2020.v17.i2.15200>.
- [17] C. Sun and Y. H. Hsieh, "Global analysis of an SEIR model with varying population size and vaccination," *Appl. Math. Model.*, vol. 34, no. 10, pp. 2685–2697, 2010, doi: 10.1016/j.apm.2009.12.005.
- [18] A. T. Crooks and A. B. Hailegiorgis, "An agent-based modeling approach applied to the spread of cholera," *Environ. Model. Softw.*, vol. 62, pp. 164–177, 2014, doi: 10.1016/j.envsoft.2014.08.027.
- [19] A. I. Abioye *et al.*, "Mathematical model of COVID-19 in Nigeria with optimal control," *Results Phys.*, vol. 28, p. 104598, Sep. 2021, doi: 10.1016/j.rinp.2021.104598.
- [20] Resmawan, M. Eka, Nurwan, and N. Achmad, "Analisis Kontrol Optimal Pada Model Matematika Penyebaran Pengguna Narkoba Dengan Faktor Edukasi," *J. Ilm. Mat. DAN Terap.*, vol. 17, no. 2, pp. 238–248, Nov. 2020, doi: 10.22487/2540766X.2020.v17.i2.15201.
- [21] O. H. Lerma, L. R. L. Guarachi, S. M. Palacios, and D. G. Sánchez, *An Introduction to Optimal Control Theory: The Dynamic Programming Approach*, vol. AC-12, no. 6. Springer International Publishing, 2023. doi: 10.1109/TAC.1967.1098723.
- [22] N. U. Ahmed and S. Wang, *Optimal Control of Dynamic Systems Driven by Vector Measures*. Springer International Publishing, 2021. doi: 10.1007/978-3-030-82139-5.
- [23] W. Cheney and D. Kincaid, *Numerical Mathematics and Comouting*. Thomson Brooks/Cole, 2008.