

Komparasi Skema Numerik Euler, Runge-Kutta dan Adam-Bashforth-Moulton untuk Menyelesaikan Solusi Persamaan Osilator Harmonik

Resmawan^{1*}, Binti Mualifatul Rosyidah², Rizka Putri Handayani³

^{1,2,3}) Program Studi Doktor Matematika, Universitas Brawijaya, Indonesia

¹) Program Studi Matematika, Universitas Negeri Gorontalo, Indonesia

²) Program Studi Teknik Keselamatan dan Kesehatan Kerja, Politeknik Perkapalan Negeri Surabaya, Indonesia

*Penulis Korespondensi. Email: resmawan@student.ub.ac.id, resmawan@ung.ac.id

Abstrak

Artikel ini membahas tentang komparasi beberapa skema numerik berbeda untuk menampilkan visualisasi solusi persamaan diferensial orde 2. Metode satu langkah seperti metode Euler dan metode Runge-Kutta orde 4 dikombinasikan dengan metode Adam-Bashforth-Moulton orde 3 untuk menyelesaikan solusi persamaan diferensial orde 2. Kombinasi metode ini digunakan untuk menyelesaikan persamaan Osilator Harmonik yang merupakan persamaan diferensial orde 2 yang banyak diterapkan dalam berbagai konteks osilasi. Orde akurasi dan orde kesalahan aproksimasi ditentukan secara analitik. Pada bagian akhir diberikan simulasi dengan pengambilan langkah berbeda pada ketiga metode untuk mengonfirmasi bagaimana perilaku solusi pada persamaan Osilator Harmonik. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode Euler dengan orde akurasi yang paling rendah memiliki akurasi yang baik di awal osilasi namun tidak memiliki akurasi yang baik pada saat waktu t diperbesar. Metode Runge-Kutta dengan orde akurasi paling tinggi menunjukkan akurasi dan stabilitas solusi yang sangat baik dan konsisten, sementara metode Adam-Bashforth-Moulton meski memiliki akurasi yang lebih rendah dari metode Runge-Kutta orde 4, namun dapat ditingkatkan akurasinya dengan memilih metode satu langkah dengan orde akurasi yang tinggi untuk mengaproksimasi beberapa solusi awal yang dibutuhkan. Ketiga metode dapat memberikan nilai aproksimasi dengan akurasi dan stabilitas yang sangat baik jika dipilih langkah h yang kecil, namun langkah ini dapat menambah durasi waktu untuk menampilkan solusi. Dengan demikian, perlu pemilihan h yang tepat menyesuaikan dengan konteks persamaan dan metode yang digunakan untuk mendapatkan solusi yang akurat dengan durasi waktu yang optimal.

Kata Kunci: Euler; Runge-Kutta; Adam-Bashforth-Moulton; Osilator Harmonik; Persamaan Diferensial

Abstract

This article discusses the comparison of different numerical schemes to visualize the solution of 2nd-order differential equations. One-step methods such as the Euler method and the 4th-order Runge-Kutta method are combined with the 3rd-order Adam-Bashforth-Moulton method to solve the solution of 2nd-order differential equations. This combination of methods solves the Harmonic Oscillator equation, a 2nd-order differential equation widely applied in various oscillation contexts. The order of accuracy and order of approximation error are determined analytically. Finally, simulations are given with different steps for the three methods to confirm the behavior of the solution to the Harmonic Oscillator equation. The results show that the Euler method with the lowest order of accuracy has good accuracy at the beginning of the oscillation but not when time t is increased. The Runge-Kutta method, with the highest order of accuracy, shows excellent and consistent accuracy and solution stability, while the Adam-Bashforth-Moulton method, although it has a lower accuracy than the Runge-Kutta method of order 4, can be improved by choosing a one-step method with a high order of accuracy to approximate some of the required initial solutions. All three methods can provide approximation values with excellent accuracy and stability if a small step, h , is chosen, but this step can increase the time duration to display the solution. Thus, it is necessary to choose the right h according to the context of the equation and the method used to obtain accurate solutions with optimal time duration.

1. Pendahuluan

Pemodelan adalah bagian matematika yang memiliki peran penting dalam pemahaman dan pemecahan masalah ilmiah yang kompleks, terutama dalam konteks perubahan dinamika sistem. Salah satu alat yang sering digunakan untuk memodelkan perubahan tersebut adalah Persamaan Diferensial (PD), khususnya PD orde dua. Persamaan diferensial orde dua memiliki aplikasi luas dalam berbagai disiplin ilmu, seperti fisika, teknik, ekonomi, dan biologi, karena mereka memungkinkan kita untuk memahami bagaimana sistem berubah seiring waktu.

Dalam pemecahan Persamaan Diferensial orde dua, skema numerik dibutuhkan untuk mengonfirmasi solusi analitik. Bahkan dalam bentuk yang lebih kompleks, beberapa bentuk persamaan tidak memungkinkan untuk ditentukan solusinya secara analitik, sehingga diperlukan penentuan solusi dengan skema numerik. Berbagai metode dengan skema numerik telah dikembangkan untuk mendekati solusi persamaan diferensial ini. Metode Euler, Runge-Kutta, dan Adam-Bashforth-Moulton adalah tiga di antara banyak skema numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Setiap metode numerik ini memiliki karakteristik sendiri dalam hal akurasi, stabilitas, dan kompleksitas komputasi. Berbagai penelitian melibatkan metode ini untuk penyelesaian persamaan diferensial telah dilakukan.

Beberapa artikel membahas tentang penyelesaian Masalah Nilai Awal menggunakan metode Euler. Lanlege, dkk [1] menggunakan metode Euler untuk menyelesaikan masalah nilai awal pada Persamaan Diferensial orde satu. Dalam kasus lain, metode Euler juga digunakan pada model yang membahas tentang penularan penyakit seperti yang dilakukan oleh Hurit dan Resi [2] yang menyelesaikan model SIR penularan penyakit HIV/AIDS dengan menggunakan metode Euler. Metode Euler juga digunakan oleh Prahmono, dkk [3] untuk menyelesaikan solusi numerik persamaan gerak jatuh bebas. Hal ini menunjukkan bahwa meskipun termasuk metode yang sederhana, metode Euler masih banyak dimanfaatkan dalam berbagai konteks untuk menyelesaikan persamaan-persamaan secara numerik. Hal serupa dapat kita temukan pada metode Runge-Kutta yang telah dikenal memiliki akurasi yang lebih tinggi dalam penyelesaian solusi persamaan secara numerik.

Beberapa penelitian yang melibatkan metode Runge-Kutta diantaranya dilakukan oleh Enkekes dan Mardianto [4] yang menyelesaikan persamaan gelombang 1D menggunakan metode Runge-Kutta orde 4. Adapun Trifina, dkk [5] menampilkan visualisasi pada fenomena harmonis dan chaos pada getaran terdang dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4. Dalam kasus lain, metode Runge-Kutta orde 4 banyak diaplikasikan untuk menyelesaikan solusi model yang merpresentasikan penularan penyakit [6]-[8]. Metode Runge-Kutta orde 4 banyak digunakan untuk menyelesaikan persamaan terapan secara numerik karena sudah dikenal memiliki akurasi dan stabilitas aproksimasi yang akurat. Meskipun demikian, tetap ada upaya untuk meningkatkan kualitas akurasi metode runge kutta seperti yang dibahas oleh Ahmadianfar [9] yang pada penelitiannya, mengembangkan optimasi untuk meningkatkan akurasi solusi metode Runge-Kutta.

Lebih lanjut, metode Adam-Bashforth-Moulton juga termasuk salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah yang melibatkan persamaan diferensial dengan nilai awal. Beberapa penelitian yang menggunakan metode ini diantaranya dilakukan oleh Latip, dkk. [10] yang membahas perbandingan metode Adam-Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson untuk menyelesaikan persamaan diferensial Euler. Penelitian lain dilakukan oleh Apriani, dkk [11] yang menggunakan metode Adam-Bashforth-Moulton untuk menyelesaikan persamaan logistik pada kasus pertumbuhan penduduk. Disamping penggunaan secara tunggal, beberapa metode yang telah dibahas sebelumnya juga banyak digunakan secara komparatif untuk menyelesaikan berbagai kasus terapan yang melibatkan persamaan diferensial.

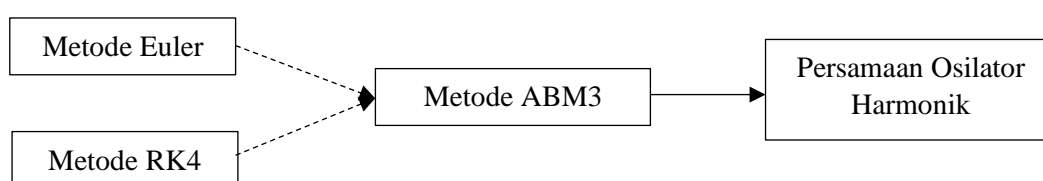
Imran, dkk. [12] membahas komparasi metode euler, modifikasi metode euler, serta runge kutta untuk menyelesaikan beberapa kasus nilai awal secara numerik. Sementara itu, perbandingan metode Euler dan metode Runge-Kutta dibahas pada kasus pemodelan yang merepresentasikan proses pengisian dan pengosongan kapasitor [13]. Selanjutnya, Rahayu, dkk., [14] melakukan analisis secara komparatif antara metode Euler dengan Jacobian pada kasus proyeksi pertumbuhan penduduk. Metode Euler dan Runge-Kutta orde 4 juga digunakan pada penyelesaian metode SIR secara numerik pada kasus penyebaran virus ebola [15], sedangkan Sari, dkk [16] menyelesaikan model rangkaian listrik menggunakan metode Runge-Kutta dan metode Euler. Beberapa penelitian ini menunjukkan bagaimana metode ini sangat bermanfaat untuk digunakan menyelesaikan persamaan diferensial dalam berbagai konteks terapan.

Pada penelitian ini digunakan metode banyak langkah Adam-Bashforth-Moulton 3 (ABM3) untuk menyelesaikan model terapan yang melibatkan persamaan diferensial orde dua. Metode ABM3 adalah metode banyak langkah yang membutuhkan beberapa solusi awal untuk menentukan solusi selanjutnya. Penentuan beberapa solusi awal dapat dilakukan dengan menggunakan metode satu langkah seperti metode Euler atau metode Runge-Kutta. Pada penelitian ini, dilakukan komparasi antara metode Euler-ABM3 dan metode RK4-ABM3 untuk menyelesaikan solusi persamaan diferensial secara numerik. Metode Euler, RK4, dan ABM3 adalah tiga metode dengan tingkat akurasi yang berbeda, sehingga menarik untuk ditunjukkan bagaimana akurasi ketika dilakukan komparasi untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Tingkat akurasi dan errornya ketiga metode ditunjukkan secara analitik pada kasus PD orde 2, kemudian dikonfirmasi secara numerik dengan menggunakan MATLAB. Kombinasi metode ini selanjutnya diterapkan dan dilihat tingkat akurasi dan kesalahan aproksimasinya pada persamaan Osilator Harmonik yang merupakan salah satu terapan persamaan diferensial orde 2 yang banyak digunakan dalam berbagai bidang ilmu dan teknologi.

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan panduan praktis dalam memilih metode numerik yang sesuai untuk kasus-kasus tertentu. Selain itu, diharapkan adanya informasi baru terkait pemahaman yang lebih baik tentang stabilitas numerik yang dapat menghindarkan penyelesaian yang salah atau tidak stabil dalam pemodelan berbagai fenomena alam, terutama pada kasus yang melibatkan persamaan diferensial dengan masalah nilai awal.

2. Metode Penelitian

Penelitian Penelitian ini mengomparasikan 3 skema numerik untuk menyelesaikan persamaan Osilator Harmonik, yaitu metode satu langkah dan metode banyak langkah. Metode satu langkah menggunakan metode Euler dan metode Runge-Kutta Orde 4, untuk mengestimasi beberapa solusi awal secara akurat, kemudian dilanjutkan dengan metode banyak langkah Adam-Bashforth-Moulton Orde 3 untuk mengestimasi solusi selanjutnya. Kombinasi metode Euler-ABM3 dan RK4-ABM3 dikomparasikan untuk melihat bagaimana perilaku solusi persamaan Osilator Harmonik. Peta konsep penggunaan skema numerik ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Peta konsep penggunaan skema numerik

Algoritma penentuan solusi persamaan Osilator Harmonik dengan metode Runge-Kutta orde 4 dan metode Adam-Bashforth-Moulton orde 3:

1) Tahap 1: Metode Euler:

1. Menentukan persamaan diferensial dan kondisi awal.
2. Menentukan rentang waktu t dan langkah h .
3. Inisialisasi nilai awal persamaan diferensial.
4. Lakukan loop dengan skema numerik Euler untuk menentukan beberapa solusi awal yang dibutuhkan untuk metode ABM3.
 - a. Menentukan solusi y_{n+1} dengan menggunakan nilai parameter sebelumnya:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$
 - b. Meningkatkan nilai t dengan h untuk langkah berikutnya:

$$t = t + h$$

2) Tahap 1: Metode Runge-Kutta Orde 4 (RK4):

1. Menentukan persamaan diferensial dan kondisi awal.
2. Menentukan rentang waktu t dan langkah h .
3. Inisialisasi nilai awal persamaan diferensial.
4. Lakukan loop dengan skema numerik RK4 untuk menentukan beberapa solusi awal yang dibutuhkan untuk metode ABM3.
 - a. Menentukan parameter RK4 masing-masing:

$$k_1 = hf(t, y)$$

$$k_2 = hf\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(t + h, y + k_3)$$
 - b. Menentukan solusi y_{n+1} dengan menggunakan nilai parameter sebelumnya:

$$y_{n+1} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
 - c. Meningkatkan nilai t dengan h untuk langkah berikutnya:

$$t = t + h$$

3) Tahap 2: Metode Adam-Bashforth-Moulton Orde 3 (ABM3)

1. Inisialisasi t dan y dengan nilai yang dihasilkan dari tahap RK4, yaitu $t_0 + Nh$ dan y_{N+1}
 dengan N adalah lanjutan dari langkah yang telah diambil pada metode RK4.
2. Lakukan loop dengan skema numerik Adam-Bashforth (AB) sebagai prediktor dan skema numerik Adam-Moulton (AM) sebagai korektor:
 - a. Tentukan nilai prediktor y_{pred} dengan skema AB orde 3

$$y_{pred} = y_n + \frac{h}{12}[23f(t_n, y_n) - 16f(t_{n-1}, y_{n-1}) + 5f(t_{n-2}, y_{n-2})]$$
 - b. Tentukan nilai t_{n+1} dengan $t_n + h$
 - c. Menentukan nilai $f(t_{n+1}, y_{pred})$ dengan menggunakan persamaan diferensial
 - d. Menentukan nilai korektor y_{n+1} yang baru dengan skema numerik AM3:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}[5f(t_{n+1}, y_{pred}) + 8f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})]$$
 - e. Meningkatkan nilai n untuk langkah berikutnya:

$$n = n + 1$$

Pada subbab berikutnya diuraikan orde akurasi dan kesalahan masing-masing metode ini secara analitik kemudian diimplementasikan pada persamaan Osilator Harmonik yang merupakan salah satu terapan persamaan diferensial orde 2. Perbandingan metode Euler-ABM3 dan RK4-ABM3 diberikan untuk menunjukkan bagaimana pengaruh metode satu langkah untuk meningkatkan akurasi metode banyak langkah ABM3.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Orde Akurasi dan Kesalahan pada Skema Numerik Euler

3.1.1 Skema Numerik Euler

Metode Euler adalah salah satu metode aproksimasi yang sederhana dan dapat memberikan hasil yang baik dengan langkah waktu yang cukup kecil, terutama untuk masalah yang tidak terlalu kompleks. Misal diberikan persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

dengan solusi umum

$$y(t) = \phi(t).$$

Skema numerik Euler dapat digunakan untuk mengaproksimasi solusi persamaan diferensial dengan mengikuti formula

$$y_{i+1} = y_i + hf'_i, \quad h = t_i - t_{i-1}.$$

3.1.2 Kesalahan Aproksimasi Metode Euler

Untuk melihat kesalahan pemotongan secara analitik, ditentukan ekspansi Taylor dari formula metode Euler. Dari persamaan:

$$y_{i+1} = y_i + hf_i$$

diperoleh ekspansi deret Taylor untuk solusi eksak

$$y_{i+1} = y_i + hf_i + \frac{h^2}{2} f'_i + \frac{h^3}{6} f''_i + \frac{h^4}{24} f_i^{(3)} + \dots$$

dan ekspansi deret Taylor untuk pendekatan numerik

$$y_{i+1} = y_i + hf_i + h^2 f'_i + \frac{h^3}{2} f''_i + \frac{h^4}{6} f_i''' + \dots$$

dengan kesalahan aproksimasi

$$\begin{aligned} E &= \left[y_i + hf_i + \frac{h^2}{2} f'_i + \frac{h^3}{6} f''_i + \frac{h^4}{24} f_i^{(3)} + \dots \right] - \left[y_i + hf_i + h^2 f'_i + \frac{h^3}{2} f''_i + \frac{h^4}{6} f_i''' + \dots \right] \\ &= \left(\frac{h^2}{2} - h^2 \right) f'_i + \left(\frac{h^3}{6} - \frac{h^3}{2} \right) f''_i + \dots \\ &= Oh^1 \end{aligned}$$

Dengan demikian, skema numerik Euler memiliki kesalahan aproksimasi pada orde 2 (Oh^2) dengan tingkat akurasi pada orde 1 (Oh).

3.2 Orde Akurasi dan Kesalahan pada Skema Numerik Runge-Kutta Orde 4

3.2.1 Skema Numerik Runge-Kutta Orde 4

Skema numerik metode Runge Kutta Orde 4 dinyatakan dengan

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

dengan

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf \left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 \right)$$

$$k_3 = hf \left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 \right)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

3.2.2 Kesalahan Aproksimasi Metode Runge-Kutta Orde 4

Untuk melihat kesalahan pemotongan secara analitik, ditentukan ekspansi Taylor dari formula metode Runge Kutta Orde 4. Dari persamaan:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

diperoleh ekspansi deret Taylor untuk solusi eksak

$$y_{i+1} = y_i + hf_i + \frac{h^2}{2}f_i' + \frac{h^3}{6}f_i'' + \frac{h^4}{24}f_i^{(3)} + \dots$$

dan ekspansi deret Taylor untuk pendekatan numerik

$$k_2 = k_3 = f_{i+\frac{1}{2}h} = f_i + \frac{1}{2}hf_i' + \frac{h^2}{2!4}f_i'' + \frac{h^3}{3!8}f_i''' + \frac{h^4}{4!16}f_i^{(4)} + \frac{h^5}{5!32}f_i^{(5)} + \dots$$

$$k_4 = f_{i+h} = f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2!}f_i'' + \frac{h^3}{3!}f_i''' + \frac{h^4}{4!}f_i^{(4)} + \frac{h^5}{5!}f_i^{(5)} + \dots$$

sehingga

$$y_{i+1} = y_i + hf_i + \frac{h^2}{2}f_i' + \frac{h^3}{6}f_i'' + \frac{h^4}{24}f_i''' + \dots$$

Dengan demikian, skema numerik Runge-Kutta memiliki kesalahan aproksimasi pada orde 5 (Oh^5) dengan tingkat akurasi pada orde 4 (Oh^4).

3.3 Orde Akurasi dan Kesalahan pada Skema Numerik Adam-Bashforth-Moulton Orde 3

3.3.1 Skema Numerik Adam-Bashforth-Moulton

Skema numerik Adam-Bashforth-Moulton orde 3 adalah kombinasi dari dua metode yaitu metode implisit Adam-Bashforth sebagai skema prediktor dan metode eksplisit Adam-Moulton sebagai skema korektor. Skema numerik Adam-Bashforth-Moulton mengikuti formula

$$x_{i+1} = x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x(t)) dt$$

dengan

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x(t)) dt \cong \int_{t_i}^{t_{i+1}} p_2(t) dt.$$

$P_2(t)$ pada metode Adam-Bashforth ditentukan secara implisit menggunakan aproksimasi Lagrange:

$$p_2(t) = \sum_{k=0}^2 f(t_{i-k}, x_{i-k}) \times L_k(t) = \sum_{k=0}^2 f_{i-k} \times L_k(t)$$

dengan

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^2 \frac{t - t_j}{t_i - t_j}$$

$$L_0(t) = \frac{(t - t_{i-1})(t - t_{i-2})}{(t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i-2})}$$

$$L_1(t) = \frac{(t - t_i)(t - t_{i-2})}{(t_{i-1} - t_i)(t_{i-1} - t_{i-2})}$$

$$L_2(t) = \frac{(t - t_i)(t - t_{i-1})}{(t_{i-2} - t_i)(t_{i-2} - t_{i-1})}$$

sehingga diperoleh

$$p_2(t) = (f_i \times L_0) + (f_{i-1} \times L_1) + (f_{i-2} \times L_2).$$

Dengan menyelesaikan

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} p_2(t) dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} [(f_i \times L_0) + (f_{i-1} \times L_1) + (f_{i-2} \times L_2)] dt$$

diperoleh skema numerik Adam-Bashforth yang digunakan sebagai prediktor, yaitu

$$x_{i+1} \approx x_i + \frac{h}{12} [23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}]. \quad (1)$$

Selanjutnya, $P_2(t)$ pada skema numerik Adam-Moulton ditentukan secara eksplisit dengan aproksimasi Lagrange:

$$p_2(t) = (f_{i-1} \times L_0) + (f_i \times L_1) + (f_{i+1} \times L_2)$$

dengan

$$L_0(t) = \frac{(t - t_i)(t - t_{i+1})}{(t_{i-1} - t_i)(t_{i-1} - t_{i+1})}$$

$$L_1(t) = \frac{(t - t_{i-1})(t - t_{i+1})}{(t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i+1})}$$

$$L_2(t) = \frac{(t - t_{i-1})(t - t_i)}{(t_{i+1} - t_{i-1})(t_{i+1} - t_i)}$$

Dengan menyelesaikan

$$x_{i+1} \approx x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} ((f_{i-1} \times L_0) + (f_i \times L_1) + (f_{i+1} \times L_2)) dt$$

diperoleh skema numerik Adam-Moulton yang digunakan sebagai korektor untuk mendapatkan nilai aproksimasi, yaitu

$$x_{i+1} \approx x_i + \frac{h}{12} [5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}]. \quad (2)$$

3.3.2 Kesalahan Aproksimasi Metode Adam-Bashforth-Moulton

Untuk melihat kesalahan pemotongan secara analitik, ditentukan ekspansi Taylor dari masing-masing skema numerik Adam-Bashforth-Moulton.

Dari skema numerik Adam-Bashforth pada persamaan (1), diperoleh ekspansi deret Taylor untuk solusi eksak

$$x_{i+1} = x_i + hf_i + \frac{h^2}{2} f_i' + \frac{h^3}{6} f_i'' + \frac{h^4}{24} f_i^{(3)} + \dots$$

dan ekspansi deret Taylor untuk pendekatan numerik

$$x_{i+1} = x_i + hf_i + \frac{h^2}{2} f_i' + \frac{h^3}{6} f_i'' - 2h^4 f_i''' + \dots$$

dengan kesalahan aproksimasi

$$\begin{aligned} E &= \left| \left[x_i + hf_i + \frac{h^2}{2} f_i' + \frac{h^3}{6} f_i'' + \frac{h^4}{24} f_i^{(3)} + \dots \right] - \left[x_i + hf_i + \frac{h^2}{2} f_i' + \frac{h^3}{6} f_i'' - 2h^4 f_i''' + \dots \right] \right| \\ &= \left(\frac{h^4}{24} + 2h^4 \right) f_n^{(4)} + \dots \\ &= Oh^4 \end{aligned}$$

Dengan demikian, skema numerik Adam-Bashforth memiliki kesalahan aproksimasi pada orde 4 (Oh^4) dengan tingkat akurasi pada orde 3 (Oh^3).

Dari skema numerik Adam-Moulton pada persamaan (2), diperoleh ekspansi deret Taylor untuk solusi eksak

$$x_{i+1} = x_i + hf_i + \frac{h^2}{2} f_i' + \frac{h^3}{6} f_i'' + \frac{h^4}{24} f_i^{(3)} + \dots$$

dan ekspansi deret Taylor untuk pendekatan numerik

$$x_{i+1} = x_i + hf_i + \frac{1}{2} h^2 f_i' + \frac{1}{6} h^3 f_i'' + \frac{1}{12} h^4 f_i''' + \dots$$

dengan kesalahan aproksimasi

$$\begin{aligned} E &= \left| \left[x_i + hf_i + \frac{h^2}{2} f_i' + \frac{h^3}{6} f_i'' + \frac{h^4}{24} f_i^{(3)} + \dots \right] - \left[x_i + hf_i + \frac{h^2}{2} f_i' + \frac{h^3}{6} f_i'' + \frac{h^4}{12} f_i''' + \dots \right] \right| \\ &= \left(\frac{h^4}{24} + \frac{h^4}{12} \right) f_n^{(4)} + \dots \\ &= Oh^4 \end{aligned}$$

Dengan demikian, skema numerik Adam-Moulton memiliki kesalahan aproksimasi pada orde 4 (Oh^4) dengan tingkat akurasi pada orde 3 (Oh^3).

Hasil analitik menunjukkan orde akurasi ABM3 berada di bawah orde akurasi RK4. Selanjutnya, ditunjukkan secara numerik bagaimana penggunaan metode 1 langkah memiliki pengaruh terhadap peningkatan akurasi metode banyak langkah. Untuk menunjukkan hal tersebut, diberikan salah satu contoh persamaan diferensial orde 2 yang diketahui solusi eksaknya agar dapat

diketahui tingkat kesalahan dari kombinasi metode yang digunakan. Konfirmasi hasil simulasi numerik pada metode ini dapat dijadikan sebagai acuan untuk menggunakan metode ini pada bentuk persamaan yang lebih kompleks.

3.4 Solusi Masalah Nilai Awal

Pada bagian ini diberikan implementasi metode Euler, Metode Runge-Kutta orde 4, dan metode Adam-Bashforth-Moulton orde 3 untuk mengaproksimasi solusi persamaan Osilator Harmonik yang merupakan salah satu contoh terapan persamaan diferensial orde 2. Persamaan Osilator Harmonik sering digunakan untuk memodelkan fenomena osilasi seperti gelombang. Bentuk umum persamaan Osilator Harmonik dinyatakan dengan

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega x = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0.$$

Variabel x merepresentasikan gerakan Osilator Harmonik terhadap waktu t dan ω merupakan frekuensi osilasi. Dengan menyelesaikan persamaan osilasi, diperoleh solusi khusus

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{x'_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Untuk implementasi skema numerik, diberikan nilai awal dan nilai parameter

$$\omega = 2$$

$$x(0) = 1$$

$$x'(0) = 0$$

sehingga diperoleh model osilasi

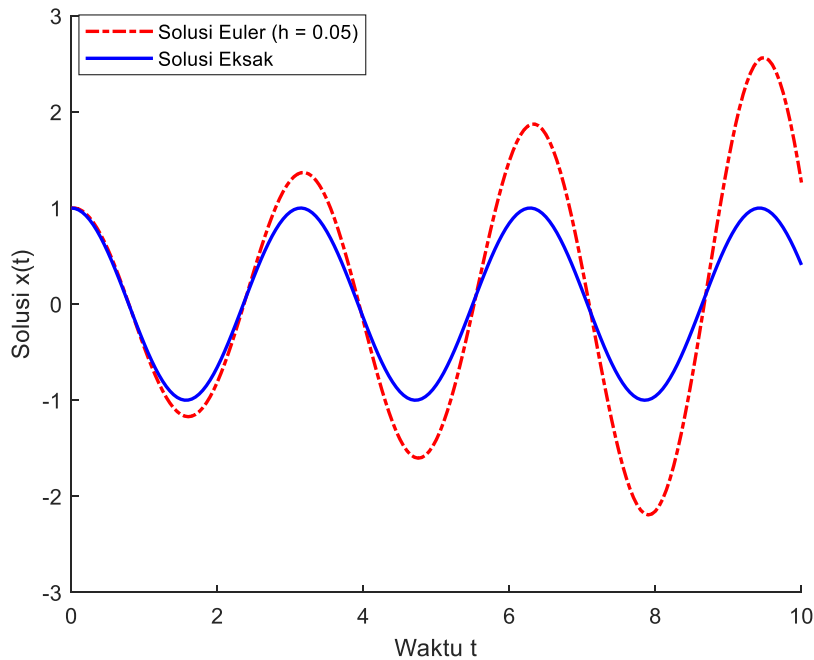
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2x = 0$$

dengan solusi

$$x(t) = \cos 2t.$$

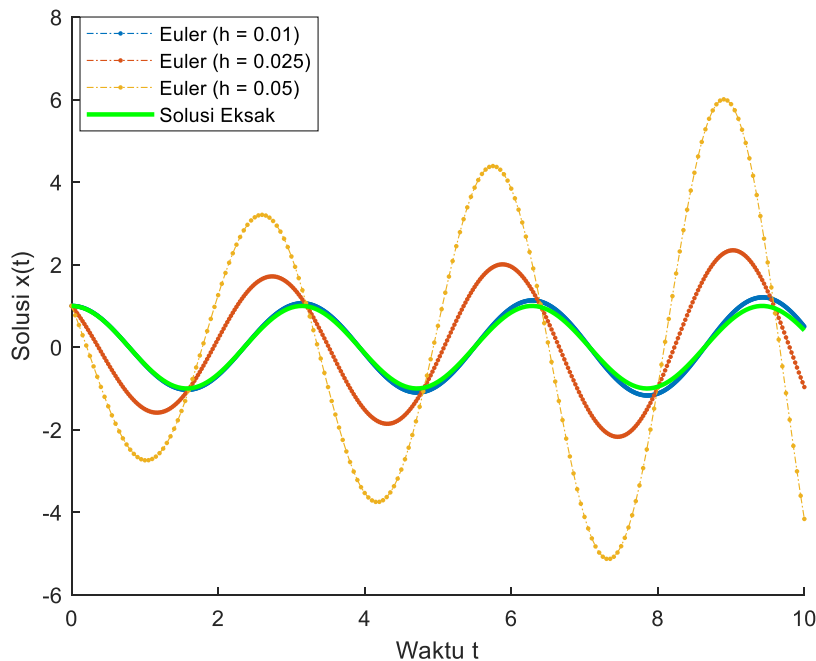
3.4.1 Penyelesaian dengan Skema Numerik Euler

Penyelesaian dengan skema numerik Euler diberikan pada Gambar 2. Gambar 2 menampilkan ilustrasi solusi persamaan osilasi menggunakan metode euler dengan langkah $h = 0.05$. Skema ini menghasilkan solusi aproksimasi 1,264885813121606. Dengan solusi eksak 0,408082061813392, diperoleh kesalahan relatif sebesar 2,099586900489671. Terlihat pada ilustrasi Gambar 1 bahwa akurasi metode euler cukup efektif pada awal waktu t namun semakin buruk jika waktu t diperbesar.



Gambar 2. Solusi persamaan osilasi dengan metode euler

Akurasi metode Euler dapat diperbesar dengan memilih langkah h yang lebih kecil, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.

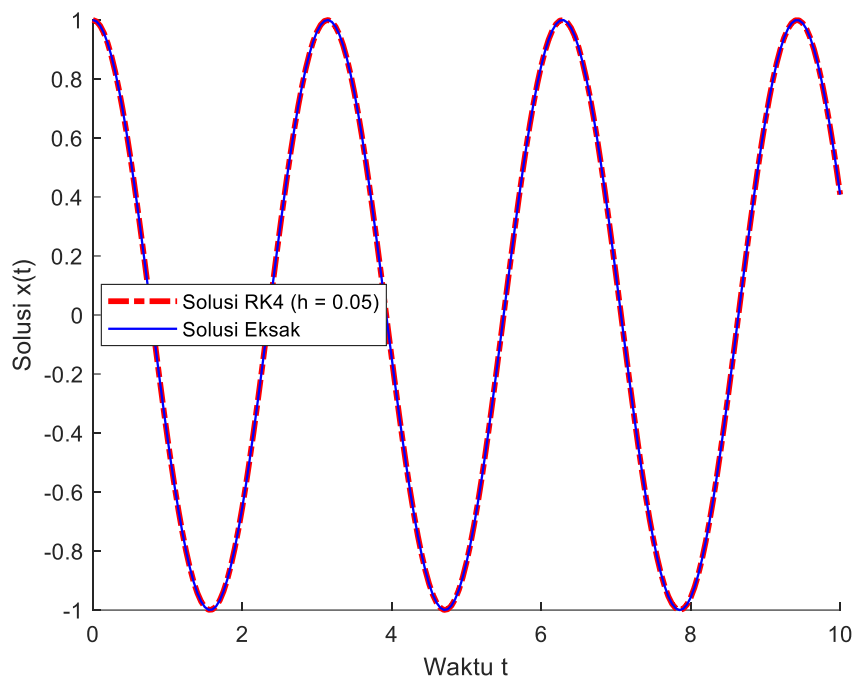


Gambar 3. Solusi persamaan osilasi dengan metode euler

Gambar 3 menunjukkan solusi persamaan osilasi menggunakan pendekatan skema numerik Euler dengan 3 langkah pendekatan yang berbeda, yaitu $h = 0,05$; $h = 0,025$; dan $h = 0,01$. Dapat dilihat bahwa langkah h yang diperkecil menyebabkan akurasi atau konvergensi metode euler semakin baik. Hal ini disebabkan karena metode Euler menggunakan pendekatan linearisasi dengan langkah waktu h , yang mengasumsikan bahwa perubahan dalam nilai fungsi $x(t)$ dalam interval h sebanding dengan gradien (laju perubahan) di titik awal. Semakin kecil nilai h , nilai aproksimasi akan semakin dekat dengan perilaku solusi yang sebenarnya. Namun perlu diperhatikan bahwa pemilihan langkah h yang kecil menyebabkan proses *looping* membutuhkan waktu yang lebih lama untuk menampilkan hasil aproksimasi karena semakin banyak langkah yang harus dijalankan.

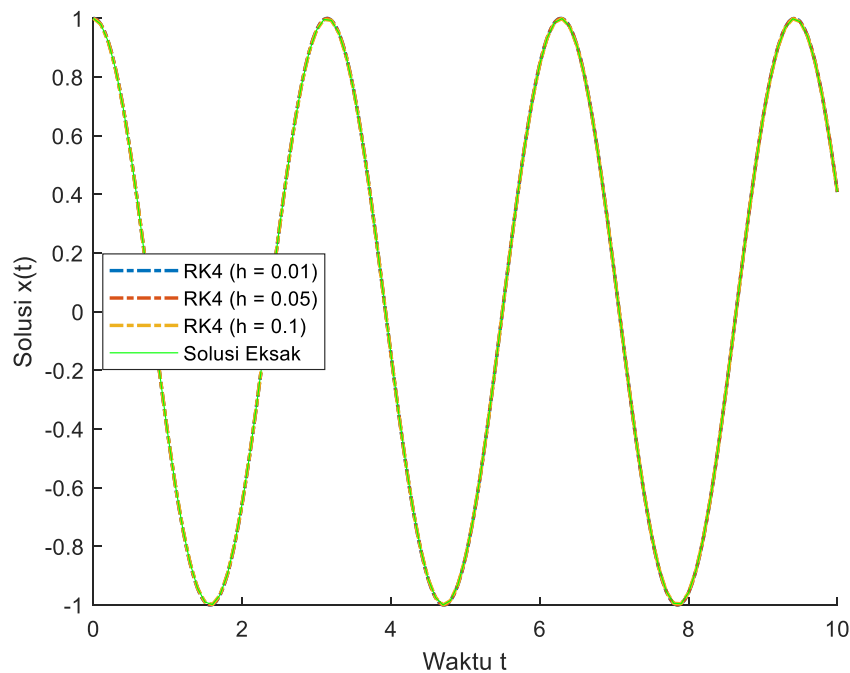
3.4.2 Penyelesaian dengan Skema Numerik Runge-Kutta Orde 4

Penyelesaian dengan skema numerik Runge-Kutta orde 4 diberikan pada Gambar 4.



Gambar 4. Solusi persamaan osilasi dengan metode Runge-Kutta orde 4

Gambar 4 menampilkan ilustrasi solusi persamaan osilasi menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 dengan langkah $h = 0,05$. Skema ini menghasilkan solusi aproksimasi $0,408096657111826$. Dengan solusi eksak $0,408082061813392$, diperoleh kesalahan relatif sebesar $0,000035765596677$. Hasil ini memberikan konfirmasi dengan jelas bahwa aproksimasi dengan metode Runge-Kutta orde 4 jauh lebih akurat daripada aproksimasi metode euler. Pemilihan nilai h relatif tidak berpengaruh secara signifikan pada metode RK4, seperti ditunjukkan pada Gambar 5.



Gambar 5. Solusi persamaan osilasi dengan metode RK4

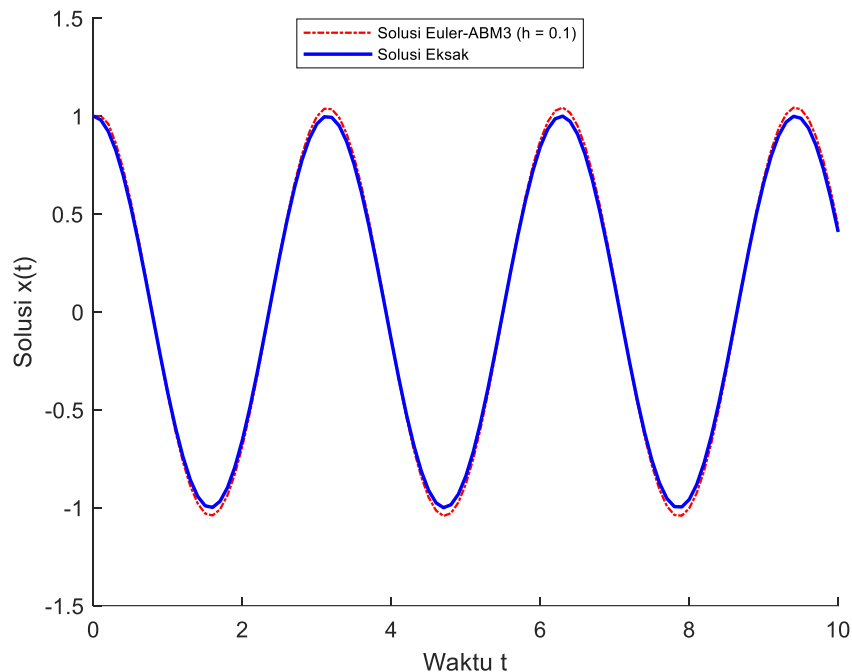
Gambar 5 menunjukkan perilaku solusi persamaan Osilator Harmonik dengan menggunakan variasi langkah pada metode Runge-Kutta orde 4. Dengan mengambil variasi langkah yang relatif

lebih besar dari metode Euler, yaitu $h = 0,01$; $h = 0.05$; dan $h = 0,1$, terlihat perilaku solusi tidak mengalami perubahan yang signifikan. Hal ini disebabkan karena tingkat akurasi metode Runge-Kutta orde 4 memiliki orde akurasi yang tinggi sehingga relatif stabil dibandingkan dengan metode numerik lainnya.

Kedua metode ini selanjutnya digunakan untuk mengestitasi 2 solusi awal yang diperlukan pada metode ABM3. Hasil aproksimasi metode Euler-ABM3 dan metode RK4-ABM3 dibahas pada subbab selanjutnya.

3.4.3 Skema Numerik Euler dan Prediktor-Korektor ABM Orde 3

Penyelesaian dengan skema numerik Adam-Bashforth-Moulton orde 3 yang melibatkan metode Euler diberikan pada Gambar 6.



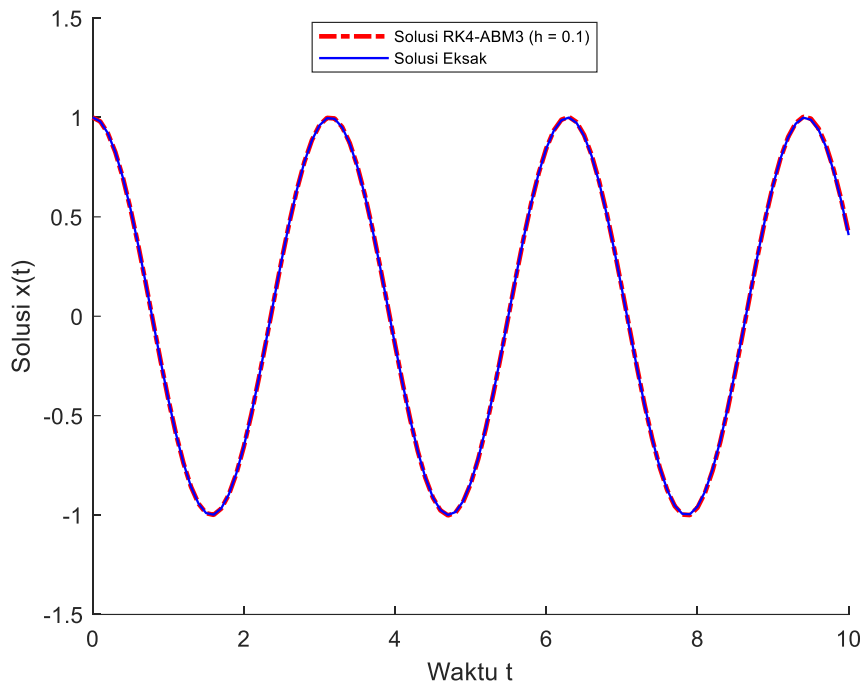
Gambar 6. Solusi persamaan osilasi dengan metode Euler-ABM3

Gambar 6 menampilkan ilustrasi solusi persamaan osilasi menggunakan kombinasi metode Euler dan metode prediktor-korektor Adam-Bashforth-Moulton orde 3 dengan langkah $h = 0,1$. Skema ini menghasilkan solusi aproksimasi 0.436701812926024. Dengan solusi eksak 0,408082061813392, diperoleh kesalahan relatif sebesar 0.070132342954392. Hasil ini memberikan konfirmasi bahwa aproksimasi dengan kombinasi metode Euler-ADM3 memberikan hasil yang cukup akurat. Secara visual terlihat bahwa kombinasi metode ini lebih akurat secara signifikan dari metode Euler dan hampir mendekati akurasi metode Runge-Kutta orde 4. Hasil aproksimasi secara numerik menunjukkan bahwa tingkat akurasi metode ini masih lebih rendah dibandingkan dengan metode Runge-Kutta orde 4 karena menghasilkan kesalahan yang lebih besar.

Bagian selanjutnya menunjukkan penyelesaian persamaan diferensial secara numerik dengan kombinasi metode RK4 dengan metode ABM3.

3.4.4 Skema Numerik Runge-Kutta Orde 4 dan Prediktor-Korektor ABM Orde 3

Penyelesaian dengan skema numerik Adam-Bashforth-Moulton orde 3 yang melibatkan metode Runge-Kutta orde 4 diberikan pada Gambar 7.



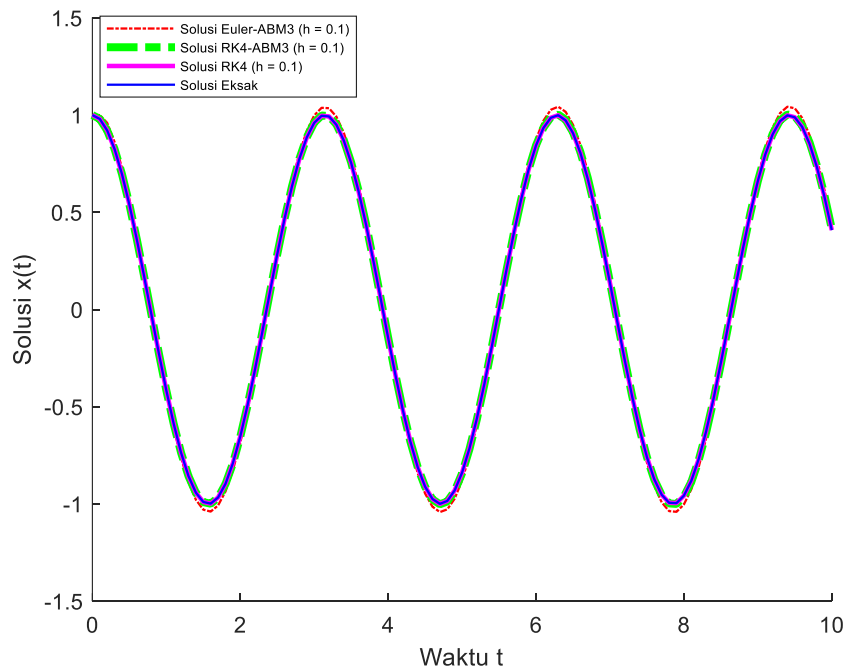
Gambar 7. Solusi persamaan osilasi dengan metode RK4-ABM3

Gambar 7 menampilkan ilustrasi solusi persamaan osilasi menggunakan kombinasi metode Runge-Kutta orde 4 dan metode prediktor-korektor Adam-Bashforth-Moulton orde 3 dengan langkah $h = 0,1$. Skema ini menghasilkan solusi aproksimasi 0.415323901362112. Dengan solusi eksak 0,408082061813392, diperoleh kesalahan relatif sebesar 0.017746037442908. Hasil ini memberikan konfirmasi bahwa aproksimasi dengan kombinasi metode RK4-ADM3 memberikan peningkatan akurasi yang cukup signifikan dibandingkan metode Euler-ABM3. Peningkatan akurasi dapat dilihat dari tingkat kesalahan yang jauh lebih kecil dibandingkan kesalahan pada metode Euler-ABM3.

3.4.5 Perbandingan Metode Runge-Kutta, Kombinasi Euler-ABM3 dan Kombinasi RK4-ABM3

Ilustrasi yang ditampilkan pada Gambar 8 menunjukkan bagaimana perbedaan akurasi skema numerik Runge-Kutta orde 4 jika dibandingkan dengan kombinasi metode Euler-ABM3 dan kombinasi metode RK4-ABM3 dengan langkah $h = 0.1$.

Gambar 8 menampilkan perilaku solusi persamaan Osilator Harmonik dengan menggunakan metode RK4, Euler-ABM3, dan RK4-ABM3 dalam mengaproksimasi solusi persamaan Osilator Harmonik. Dengan mengambil langkah yang sama, yaitu $h = 0,1$, Gambar 8 menunjukkan bahwa metode Runge-Kutta orde 4 sebagai metode dengan orde akurasi tertinggi menghasilkan nilai yang sangat stabil dan paling akurat dalam mengaproksimasi solusi persamaan Osilator Harmonik. Metode Adam-Bashforth-Moulton orde 3, meskipun memiliki orde akurasi yang lebih rendah dari metode RK4, namun dapat ditingkatkan akurasinya dengan memilih metode satu langkah yang tepat untuk mengaproksimasi beberapa solusi awalnya. Penggunaan kombinasi metode Euler-ABM3 pada dasarnya sudah menunjukkan akurasi yang cukup baik namun masih memiliki tingkat kesalahan yang cukup besar. Selanjutnya, penggunaan kombinasi metode RK4-ABM3 dapat meningkatkan akurasi secara signifikan dengan hasil yang mendekati ketelitian metode Runge-Kutta orde 4. Hasil simulasi ini menunjukkan bahwa pada kasus-kasus yang membutuhkan metode banyak langkah seperti metode ABM3, dapat digunakan metode satu langkah dengan akurasi yang tinggi seperti metode RK4 untuk meningkatkan akurasi dan stabilitas hasil aproksimasinya.



Gambar 8. Solusi persamaan osilasi dengan beberapa skema numerik

4. Kesimpulan

Persamaan Osilator Harmonik adalah salah satu bentuk terapan persamaan orde 2 yang dapat diselesaikan secara numerik menggunakan metode Euler, metode Runge-Kutta, dan metode Adam-Bashforth-Moulton. Metode Euler memiliki langkah sederhana tetapi kurang akurat dan sensitif terhadap variasi ukuran langkah h . Metode Runge-Kutta orde 4 (RK4) memberikan akurasi yang tinggi dan stabilitas yang sangat baik, sehingga dapat digunakan dalam berbagai konteks. Namun pada kasus yang membutuhkan metode banyak langkah seperti metode Adam-Bashforth-Moulton yang memiliki orde akurasi yang lebih rendah dari metode Runge-Kutta orde 4, dapat dikombinasikan dengan metode RK4 untuk menghasilkan nilai aproksimasi yang lebih akurat dan lebih stabil. Selain itu, perlu diperhatikan pemilihan langkah h yang tepat untuk mendapatkan hasil yang efektif dan efisien. Pemilihan langkah h yang semakin kecil dapat menghasilkan solusi yang akurat namun akan membutuhkan waktu yang lebih lama untuk menyelesaikan solusi persamaan. Oleh karena itu pemilihan metode dan pemilihan langkah h perlu disesuaikan dengan konteks persamaan yang akan diselesaikan.

Referensi

- [1] D. I. Lanlege, U. M. Garba, and A. Aluebho, "Using Modified Euler Method (MEM) for the solution of some First Order Differential Equations with Initial Value Problems (IVPs)," *Pacific Journal of science and technology*, vol. 16, no. 2, pp. 63-81, 2015.
- [2] R. U. Hurit dan B. B. F. Resi, "Penyelesaian Model SIR untuk Penyebaran Penyakit Hiv/Aids Menggunakan Metode Euler dan Metode Heun," in *ProSANDIKA UNIKAL (Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Matematika Universitas Pekalongan)*, 2022, pp. 381-390.
- [3] A. Prahmono, N. Nurhamidah, dan N. Nurhamidah, "Solusi Numerik Menggunakan Metode Euler Untuk Persamaan Gerak Jatuh Bebas Tanpa Gesekan Udara Pada Microsoft Excel 2013," *Al 'Ilmi: Jurnal Pendidikan MIPA*, vol. 12, no. 1, pp. 27-32, 2023.
- [4] Y. Enkekes dan L. Mardianto, "Metode Runge-Kutta Orde 4 Dalam Penyelesaian Persamaan Gelombang 1D Syarat Batas Dirichlet," *Indonesian Journal Of Applied Mathematics*, vol. 2, no. 1, pp. 1-8, 2022. doi: <https://doi.org/10.35472/indojam.v2i1.489>.

- [5] L. Trifina, A. Warsito, L. Lapono, dan A. Louk, "Visualisasi Fenomena Harmonis Dan Chaos Pada Getaran Tergandeng Berbasis Komputasi Numerik Runge Kutta," *Jurnal Fisika: Fisika Sains dan Aplikasinya*, vol. 8, no. 1, pp. 11-20, 2023. doi: <https://doi.org/10.35508/fisa.v8i1.11817>.
- [6] C. H. K. Yion, "SIR integrated model based on Runge-Kutta for Polio Vaccination Analysis," *Journal of Quality Measurement and Analysis JQMA*, vol. 19, no. 1, pp. 1-11, 2023.
- [7] S. Side, N. Syahirah, dan A. M. R. Y. Sap, "A Solusi Numerik Model SIRV Penyebaran Covid-19 dengan Menggunakan Metode Runge-Kutta di Kabupaten Pinrang," *Jurnal Matematika dan Statistika serta Aplikasinya*, vol. 11, no. 2, pp. 1-6, 2023.
- [8] D. Ludji and F. C. Buan, "Aplication of Order 4 Runge-Kutta Method to Modeling Monkeypox Transmission," *Jurnal Saintek Lahan Kering*, vol. 5, no. 2, pp. 24-26, 2023. doi: <https://doi.org/https://doi.org/10.32938/slk.v5i2.1981>.
- [9] I. Ahmadianfar, A. A. Heidari, A. H. Gandomi, X. Chu, and H. Chen, "RUN beyond the metaphor: An efficient optimization algorithm based on Runge Kutta method," *Expert Systems with Applications*, vol. 181, p.115079, 2021. doi: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.11507>.
- [10] F. Latip, A. Dorrah, dan S. Suharsono, "Perbandingan Metode Adams Bashforth-Moulton dan Metode Milne-Simpson dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial Euler Orde-8," in *Prosiding Seminar Nasional Metode Kuantitatif*, 2017, pp. 278-292.
- [11] D. Apriani, W. Wasono, dan M. Huda, "Penerapan Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Persamaan Logistik Dalam Memprediksi Pertumbuhan Penduduk di Provinsi Kalimantan Timur," *Eksponensial*, vol. 13, no. 2, pp. 95-102, 2022.
- [12] M. Imran, M. Cancan, S. Rashid, Y. Ali, dan N. Imran, "Graphical Comparison on Numerical Solutions of Initial Value Problem by Using Euler's Method, Modified Euler's Method and Runge-Kutta Method," *International Journal of Research Publication and Reviews*, vol. 3, no. 10, p. 1930, 2022.
- [13] N. Nurhamidah, F. Mabruroh, J. K. Putri, A. P. Sairi, dan A. N. Latifah, "Perbandingan Metode Euler dan Metode Runge-Kutta Orde 4 Pada Proses Pengisian dan Pengosongan Kapasitor," *Jurnal Inovasi dan Pembelajaran Fisika*, vol. 9, no. 2, pp. 185-196, 2022. doi: <https://doi.org/10.36706/jipf.v9i2.18531>.
- [14] S. D. Rahayu, A. Latip, dan W. Nurul, "Analisis Komparatif Metode Jacobian Dan Metode Euler Dalam Kasus Proyeksi Jumlah Penduduk," *JRMST: Jurnal Riset Matematika dan Sains Terapan*, vol. 2, no. 1, pp. 29-39, 2022.
- [15] M. T. Hossain, M. M. Miah, and M. B. Hossain, "Numerical study of kermack-mckendrik SIR model to predict the outbreak of ebola virus diseases using euler and fourth order runge-kutta methods," *American Scientific Research Journal for Engineering, Technology, and Sciences (ASRJETS)*, vol. 37, no. 1, pp. 1-21, 2017.
- [16] I. P. Sari, N. Nurhamidah, "Penyelesaian Rangkaian Listrik RLC Menggunakan Metode Runge Kutta dan Euler," *OPTIKA: Jurnal Pendidikan Fisika*, vol. 6, no. 2, pp. 142-149, 2022. doi: <https://doi.org/10.37478/optika.v6i2.1974>.