

Analisis Dinamik Model *SIRC* pada Transmisi Hepatitis B dengan Sirosis Hati

Ririn Febriyanti^{1*}, Bayu Prihandono², Mariatul Kiftiah³

^{1,2,3}Program Studi Matematika, Universitas Tanjungpura, Pontianak, Indonesia

*Penulis Korespondensi. Email: ririnfebriyanti@student.untan.ac.id

Abstrak

Hepatitis B merupakan infeksi pada organ hati yang dapat menyebabkan sirosis hati. Sirosis hati dapat terjadi akibat terbentuknya jaringan parut pada individu yang terkena hepatitis B yang berkepanjangan. Transmisi hepatitis B dapat terjadi melalui dua cara yaitu horizontal dan vertikal. Dalam penelitian ini, permasalahan tersebut dimodelkan menggunakan model *SIRC*, dimana populasi dikelompokkan menjadi empat sub-populasi yaitu sub-populasi rentan (*S*), terinfeksi (*I*), sembuh atau mendapat kekebalan akibat vaksinasi (*R*) dan terkena sirosis hati (*C*). Dari analisis diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit (E_1), titik kesetimbangan endemik (E_2). Bilangan reproduksi dasar (R_0) diperoleh dengan menggunakan *Next Generation Matrix*. Hasil analisis menunjukkan jika $R_0 < 1$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik lokal, yang berarti bahwa transmisi hepatitis B pada sirosis hati tidak menyebar. Sedangkan jika $R_0 > 1$ yang berarti bahwa transmisi hepatitis B pada sirosis hati yang dipengaruhi oleh kontak antara individu rentan dan terinfeksi menyebar. Untuk mendukung hasil analisis secara analitik, diberikan simulasi numerik untuk menggambarkan perilaku dari model *SIRC*.

Kata Kunci: Virus Hepatitis B; Titik Kesetimbangan; Bilangan Reproduksi Dasar

Abstract

Hepatitis B is an infection of the liver that can cause liver cirrhosis. Liver cirrhosis can occur due to the formation of scar tissue in individuals who have prolonged hepatitis B. Transmission of hepatitis B can occur in two ways, namely horizontal and vertical. In this research, this problem is modeled in a mathematical model using the SIRC model, where the population is grouped into four sub-populations, namely susceptible (S), infected (I), cured or immune due to vaccination (R) and cirrhosis. liver (C). From the analysis, two equilibrium points were obtained, namely the disease-free equilibrium point (E_1), the endemic equilibrium point (E_2). The basic reproduction number (R_0) is obtained using the Next Generation Matrix. The analysis results show that if $R_0 < 1$, then the disease-free equilibrium point is locally asymptotically stable, which means that hepatitis B transmission in liver cirrhosis does not spread. Meanwhile, if $R_0 > 1$, then the disease-free equilibrium point is locally asymptotically stable, which means that hepatitis B transmission in liver cirrhosis does not spread. Meanwhile, if $R_0 > 1$, this means that hepatitis B transmission in liver cirrhosis is influenced by contact between susceptible and infectious individuals. To support the results of the analytical analysis, numerical simulations are provided to describe the behavior of the SIRC model.

Keywords: *Hepatitis B Virus; Equilibrium Point; Basic Reproduction Number*

1. Pendahuluan

Matematika merupakan ilmu pengetahuan yang bersifat deduktif, dimana konsep yang ada didalamnya memiliki sifat hirarki, terstruktur, logis, dan sistematis. Peran matematika yang diterapkan dalam ilmu lain sangat beragam, diantaranya ilmu Penerapan ilmu matematika ke bidang Pemodelan matematika. Pemodelan matematika merupakan penerapan yang bisa dilakukan dalam kehidupan sehari-hari. Pada dasarnya pemodelan matematika merupakan salah satu alat untuk

mempresentasikan masalah dalam dunia nyata ke bentuk persamaan matematika. Persamaan yang paling banyak digunakan ialah persamaan diferensial. Persamaan diferensial memuat satu atau lebih turunan dari suatu fungsi [1]. Pemodelan matematika pula banyak dikembangkan dalam berbagai bidang seperti dalam bidang sains.

Perkembangan model matematika dalam bidang sains banyak digunakan dalam berbagai bidang ilmu seperti ilmu fisika, biologi, kesehatan, ilmu sosial dan lainnya. Salah satu model matematika yang dikembangkan ialah model epidemi. Epidemi merupakan suatu kondisi yang mirip dengan wabah atau dapat dikatakan bahwa penyakit menular yang dengan cepat berjangkit dan menimbulkan banyak korban. Model matematika mengenai epidemiologi ini akan memungkinkan untuk memprediksi dinamika pada suatu populasi, dengan faktor-faktor epidemi, dinamika awal, dan dampak dari adanya vaksinasi [2]. Penyakit yang berpotensi menjadi epidemi di suatu wilayah misalnya pada penyakit HIV/AIDS, hepatitis, tuberkolosis dan lainnya. Penyakit-penyakit tersebut mampu menjadi wabah dalam suatu populasi karena penyebarannya yang sangat cepat. Salah satu model epidemi dalam penyebaran penyakit ialah penyebaran penyakit hepatitis B yang dapat menyebabkan sirosis hati. Penyebaran penyakit ini dapat dirumuskan kedalam model matematika.

Hepatitis B adalah suatu penyakit peradangan pada organ hati. Umumnya hepatitis B disebabkan oleh suatu virus, yaitu virus hepatitis B (HBV) virus ini termasuk *family Hepadnaviridae*. Infeksi hepatitis B dibagi menjadi dua fase yaitu infeksi akut dan infeksi kronis. Hepatitis B akut merupakan infeksi jangka pendek yang terjadi dalam jangka waktu kurang dari 6 bulan pertama setelah seseorang masa inkubasi, hepatitis B kronis merupakan penyakit yang terjadi diakibatkan berkembangnya hepatitis B akut yang menjadi sirosis hati atau kanker hati [3]. Menurut WHO, pada tahun 2015 diperkirakan sekitar 240 juta orang hidup dengan hepatitis B akut dan 780.000 orang meninggal setiap tahunnya akibat terinfeksi virus hepatitis B, 650.000 diakibatkan oleh sirosis hati dan kanker hati dan 130.000 yang diakibatkan oleh hepatitis B akut. Indonesia menduduki peringkat ke-3 dengan jumlah penderita yang terkena hepatitis di dunia yang berjumlah 13 juta penduduk, sedangkan Kalimantan Barat pada tahun 2017 terdapat 689 orang yang terinfeksi virus hepatitis B akut maupun kronis dan sebanyak 25 orang yang terkena sirosis hati akibat hepatitis B [4]. Dalam penelitian ini membahas tentang transmisi hepatitis B terhadap sirosis hati di kota Pontianak dimana transmisi merupakan penularan virus hepatitis B yang akan berkembang menjadi sirosis hati.

Transmisi atau penularan hepatitis B dibagi menjadi dua yaitu, transmisi secara horizontal dan vertikal. transmisi secara horizontal dapat terjadi melalui cairan tubuh, penggunaan alat suntik yang tercemar, tato, transfusi darah, penggunaan pisau cukur dan sikat gigi secara bersama dengan orang yang terinfeksi hepatitis B, transmisi secara vertikal yaitu, melalui ibu yang terkena hepatitis B pada bayi [3]. Di Indonesia hepatitis B pencegahan infeksi hepatitis B dapat dilakukan dengan pemberian vaksinasi hepatitis B pada bayi, anak-anak dan orang dewasa dan dapat juga dengan cara menghindari interaksi antara penderita hepatitis B.

Model matematika banyak dikembangkan oleh beberapa peneliti dalam mengamati dan mempelajari dinamika penyebaran dinamika penularan hepatitis. Humolungo and Paudi [5] membahas tentang model matematika *SIUC* dengan menambahkan parameter vaksinasi. Zhang dan Zhou [6] membahas tentang model penyebaran hepatitis B dengan tipe *SEICR* serta menerapkan laju penularan secara vertikal dan horizontal. Selanjutnya Dano dan Keno [7] membahas tentang model matematika *SICRA* pada kasus pemodelan efek gabungan infeksi hepatitis B dan konsumsi alkohol berat terhadap perkembangan dinamika sirosis hati dengan menambahkan sub-populasi individu yang mengonsumsi alkohol. Beberapa pembahasan model serupa terkait penebaran hepatitis B dilakukan dengan metode dan pertimbangan berbeda [8][9][10].

Model matematika yang dibahas dalam penelitian ini mengacu pada model Zhang and Zhou [6] dan model Dano dan Keno [7]. Modifikasi dilakukan dengan menambahkan kelas populasi sirosis hati yang tidak dipertimbangkan pada model sebelumnya. Sirosis hati adalah kondisi medis yang ditandai oleh adanya kerusakan parah pada jaringan hati yang menghambat fungsi normal hati dan dapat menyebabkan berbagai komplikasi serius. Sirosis hati biasanya merupakan tahap akhir dari berbagai penyakit hati kronis seperti hepatitis. Pada penelitian ini, dibahas model tipe SIRC pada penyebaran Hepatitis B dengan mempertimbangkan adanya sirosis hati.

2. Metode Penelitian

Penelitian dilakukan melalui studi literatur yang terkait dengan pemodelan matematika dan penyakit hepatitis B yang berkembang menjadi sirosis hati.

Adapun langkah-langkah penelitian dilakukan sebagai berikut:

- 1) Membentuk model matematika transmisi hepatitis B pada sirosis hati.
- 2) Menentukan titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik.
- 3) Melakukan analisis kestabilan titik kesetimbangan model.
- 4) Menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0) menggunakan *Next Generation Matrix*.
- 5) Melakukan simulasi numerik dan interpretasinya.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Model matematika

Total populasi (N) pada model matematika transmisi hepatitis B pada sirosis hati dengan populasi tertutup ini dikelompokkan menjadi empat subpopulasi: *susceptible* (S) merupakan subpopulasi individu rentan terhadap virus hepatitis B, *Infected* (I) merupakan sub-populasi individu yang telah terinfeksi virus hepatitis B, *Removed* (R) merupakan sub-populasi individu yang telah sembuh atau mendapatkan kekebalan akibat vaksinasi, dan *Cirrhosis of the liver* (C) merupakan subpopulasi individu hepatitis B yang menjadi berkembang menjadi individu sirosis hati sehingga disebut model *SIRC*.

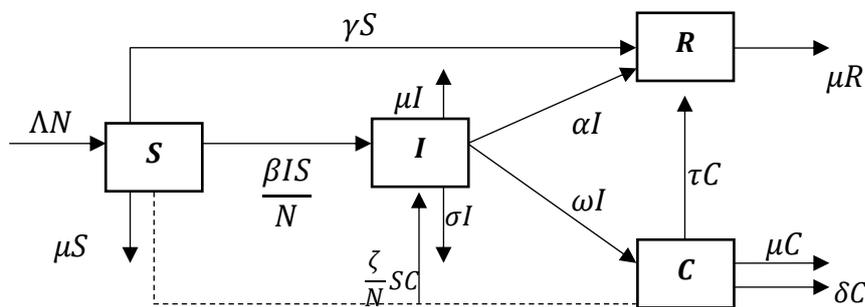
Asumsi-asumsi yang digunakan dalam proses pemodelan penyebaran virus hepatitis B pada sirosis hati sebagai berikut:

1. Populasi bersifat tertutup, artinya perubahan individu hanya bergantung pada kelahiran dan kematian alami. Tidak ada migrasi ataupun emigrasi didalam populasi.
2. Populasi bersifat homogen, artinya setiap individu mempunyai kemungkinan yang sama melakukan kontak dengan individu dalam satu populasi.
3. Virus ditularkan melalui interaksi antara individu terinfeksi dan individu rentan.
4. Diasumsikan bahwa efisiensi vaksinasi adalah 100% dan dapat diartikan setiap individu yang divaksinasi akan kebal dari penyakit dan masuk ke subpopulasi R.
5. Individu dewasa yang terkena infeksi hepatitis B akut dapat sembuh dengan sendirinya dan memberi kekebalan secara permanen karena telah memiliki antibodi terhadap virus hepatitis B.
6. Individu yang telah sembuh tidak akan tertular virus hepatitis B.
7. Penyakit sirosis hati dapat terjadi akibat terbentuknya jaringan parut pada individu hepatitis B yang berkepanjangan.
8. Individu yang terkena sirosis hati dapat sembuh.

Tabel 1. Keterangan parameter

Pernyataan	Simbol
Tingkat kelahiran alami	Λ
Tingkat kontak antar individu terinfeksi dan individu rentan	β
Tingkat kematian alami	μ
Tingkat populasi individu rentan divaksinasi	γ
Tingkat individu terinfeksi menjadi sirosis hati	ω
Tingkat kematian akibat sirosis hati	δ
Tingkat kesembuhan alami dari individu terinfeksi	α
Tingkat kematian individu terinfeksi	σ
Tingkat kesembuhan individu yang terkena sirosis hati	τ
Tingkat penularan dari individu sirosis hati ke individu rentan	ζ

Secara sekamatis, Dinamika Transmisi hepatitis B pada sirosis hati dideskripsikan dalam diagram alir yang disajikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram Alir Transmisi Hepatitis B pada sirosis hati

Berdasarkan Gambar 1, dapat dikonstruksikan model matematika transmisi hepatitis B pada sirosis hati yang berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut;

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \Lambda N - \frac{\beta}{N} SI - \gamma S - \mu S - \frac{\zeta}{N} SC \\
 \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta}{N} SI - \alpha I - \omega I - \sigma I - \mu I + \frac{\zeta}{N} SC \\
 \frac{dC}{dt} &= \omega I - \tau C - (\mu + \delta)C \\
 \frac{dR}{dt} &= \tau C + \gamma S + \alpha I - \mu R
 \end{aligned} \tag{1}$$

3.2 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit (E_1) menunjukkan bahwa dalam suatu populasi tidak ada populasi yang terinfeksi hepatitis B, yang dapat diartikan tidak ada kontak antara sub-populasi yang tidak terkena hepatitis B dan yang terkena hepatitis B. akibatnya sub-populasi positif hepatitis B tidak akan meningkat sehingga pada suatu waktu sub-populasi terinfeksi hepatitis B, sub-populasi yang berkembang menjadi sirosis hati akan hilang atau habis. sehingga diperoleh

$$I = C = 0. \tag{2}$$

Selanjutnya dengan mensubsitusikan persamaan (2) ke sistem (1) sehingga diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit sebagai berikut $E_1 = (S_1, I_1, R_1, C_1) = \left(\frac{\Lambda N}{(\gamma + \mu)}, 0, \frac{\gamma \Lambda N}{(\gamma + \mu)\mu}, 0 \right)$.

3.3 Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik penyakit (E_2) menunjukkan dalam suatu populasi ada individu yang terinfeksi penyakit [11], artinya sub-populasi hepatitis B, dan sirosis hati selalu ada. Sehingga diperoleh

$$I \neq 0, R \neq 0 \quad (3)$$

Selanjutnya dengan mensubsitusikan persamaan (3) ke sistem (1) sehingga diperoleh titik kesetimbangan endemik sebagai berikut $E_2 = (S_2, I_2, C_2, R_2)$ dengan

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{(\alpha + \omega + \sigma + \mu)N}{\beta} \\ I_2 &= \frac{N(\Lambda\beta - \alpha\gamma - \alpha\mu - \gamma\mu - \gamma\omega - \gamma\sigma - \mu^2 - \mu\omega - \mu\sigma)}{\beta(\alpha + \omega + \sigma + \mu)} \\ C_2 &= \frac{N\omega(\Lambda\beta - \alpha\gamma - \alpha\mu - \gamma\mu - \gamma\omega - \gamma\sigma - \mu^2 - \mu\omega - \mu\sigma)}{\beta(\alpha\delta + \alpha\mu + \delta\mu + \delta\omega + \delta\sigma + \mu^2 + \mu\omega + \mu\sigma + \mu\tau + \omega\tau + \sigma\tau)} \\ R_2 &= \left(\frac{\gamma N(\alpha + \omega + \sigma + \mu)}{\beta\mu} \right) + \left(\frac{N\alpha\omega(\Lambda\beta - \alpha\gamma - \alpha\mu - \gamma\mu - \gamma\omega - \gamma\sigma - \mu^2 - \mu\omega - \mu\sigma)}{\beta\mu(\alpha\delta + \alpha\mu + \delta\mu + \delta\omega + \delta\sigma + \mu^2 + \mu\omega + \mu\sigma + \mu\tau + \omega\tau + \sigma\tau)} \right) \end{aligned}$$

3.4 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar yang dilambangkan dengan R_0 adalah suatu ambang batas terjadinya wabah penyakit dan disebut juga rasio atau angka Reproduksi Dasar [12]. Dengan bilangan Reproduksi Dasar dapat ditentukan ada atau tidaknya penyebaran penyakit dalam suatu populasi. Bilangan Reproduksi Dasar dicari dengan menentukan nilai eigen terbesar dari metode *Next Generation Matrix* [13]. Dalam menentukan metode *Next Generation Matrix* Langkah pertama yang harus dilakukan adalah ambil persamaan-persamaan yang menggambarkan kasus terinfeksi yaitu pada sistem I dan C ,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta}{N}SI - \alpha I - \omega I - \sigma I - \mu I + \frac{\zeta}{N}SC \\ \frac{dC}{dt} &= \omega I - \tau C - (\mu + \delta)C \end{aligned}$$

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah ambil persamaan-persamaan yang menggambarkan kasus terinfeksi yaitu pada sistem I dan C

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\frac{dI}{dt})}{\partial I} & \frac{\partial(\frac{dI}{dt})}{\partial C} \\ \frac{\partial(\frac{dC}{dt})}{\partial I} & \frac{\partial(\frac{dC}{dt})}{\partial C} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Langkah selanjutnya melakukan pelinearan terhadap sistem terinfeksi pada titik ekuilibrium bebas penyakit

$$\begin{aligned} J_{(I,C)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial(\frac{\beta}{N}SI - \alpha I - \omega I - \sigma I - \mu I + \frac{\zeta}{N}SC)}{\partial I} & \frac{\partial(\frac{\beta}{N}SI - \alpha I - \omega I - \sigma I - \mu I + \frac{\zeta}{N}SC)}{\partial C} \\ \frac{\partial(\omega I - (\mu + \delta)C)}{\partial I} & \frac{\partial(\omega I - \tau C - (\mu + \delta)C)}{\partial C} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\beta}{N}S - \alpha - \omega - \sigma - \mu & \frac{\zeta}{N}S \\ \omega & -(\tau + \mu + \delta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

Substitusikan titik bebas penyakit yang telah diperoleh yaitu $(S_1, I_1, R_1, C_1) = \left(\frac{\Lambda N}{(\gamma + \mu)}, 0, \frac{\gamma \Lambda N}{(\gamma + \mu)\mu}, 0\right)$ kedalam matriks Jacobian sehingga

$$= \begin{bmatrix} \frac{\beta}{N} \left(\frac{\Lambda N}{(\gamma + \mu)}\right) - \alpha - \omega - \sigma - \mu & \frac{\zeta}{N} \left(\frac{\Lambda N}{(\gamma + \mu)}\right) \\ \omega & -(\tau + \mu + \delta) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Langkah selanjutnya, dekomposisi matriks Jacobian (J) menjadi $J = F - V$, dengan F matriks transmisi dengan V matriks transisi maka diperoleh

$$F = \begin{bmatrix} \left(\frac{\beta \Lambda}{(\gamma + \mu)}\right) & \frac{\zeta \Lambda}{(\gamma + \mu)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad V = \begin{bmatrix} \alpha + \omega + \sigma + \mu & 0 \\ -\omega & (\tau + \mu + \delta) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Langkah selanjutnya menghitung V^{-1} sehingga diperoleh

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{(\tau + \mu + \delta)(\gamma + \mu)}{(\alpha + \omega + \sigma + \mu)(\tau + \mu + \delta)} & -\frac{\zeta \Lambda}{(\alpha + \omega + \sigma + \mu)(\tau + \mu + \delta)} \\ -\frac{\omega(\gamma + \mu)}{(\alpha + \omega + \sigma + \mu)(\tau + \mu + \delta)} & -\frac{(\alpha + \omega + \sigma + \mu)(\gamma + \mu)}{(\alpha + \omega + \sigma + \mu)(\tau + \mu + \delta)} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Langkah selanjutnya menghitung R_0 dengan $R_0 = \rho(FV^{-1})$ sehingga diperoleh

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\beta \Lambda}{(\gamma + \mu)}\right) \frac{(\tau + \mu + \delta)(\gamma + \mu)}{(\alpha + \omega + \sigma + \mu)(\tau + \mu + \delta)(\gamma + \mu)} + \left(\frac{\zeta \Lambda}{(\gamma + \mu)}\right) \frac{\omega(\gamma + \mu)}{(\alpha + \omega + \sigma + \mu)(\tau + \mu + \delta)(\gamma + \mu)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Langkah selanjutnya mencari nilai eigen matriks dengan cara $\lambda I - FV^{-1}$ sehingga diperoleh dari persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \det|\lambda I - FV^{-1}| &= 0 \\ \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \left(\frac{\beta \Lambda}{(\gamma + \mu)}\right) \frac{(\tau + \mu + \delta)(\gamma + \mu)}{(\alpha + \omega + \sigma + \mu)(\tau + \mu + \delta)(\gamma + \mu)} + \left(\frac{\zeta \Lambda}{(\gamma + \mu)}\right) \frac{\omega(\gamma + \mu)}{(\alpha + \omega + \sigma + \mu)(\tau + \mu + \delta)(\gamma + \mu)} & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ |\lambda I - FV^{-1}| = 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda + \left(\frac{\beta \Lambda}{(\gamma + \mu)}\right) \frac{(\tau + \mu + \delta)(\gamma + \mu)}{(\alpha + \omega + \sigma + \mu)(\tau + \mu + \delta)(\gamma + \mu)} + \left(\frac{\zeta \Lambda}{(\gamma + \mu)}\right) \frac{\omega(\gamma + \mu)}{(\alpha + \omega + \sigma + \mu)(\tau + \mu + \delta)(\gamma + \mu)} & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0 \\ \frac{(\alpha + \omega + \sigma + \mu)(\tau + \mu + \delta)(\gamma + \mu)\lambda - \Lambda(\zeta\omega + \tau\beta + \mu\beta + \delta\beta)\lambda}{(\alpha + \omega + \sigma + \mu)(\tau + \mu + \delta)(\gamma + \mu)} &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $\lambda_1 = -\frac{(\alpha + \omega + \sigma + \mu)(\tau + \mu + \delta)(\gamma + \mu)}{(\alpha + \omega + \sigma + \mu)(\tau + \mu + \delta)(\gamma + \mu)}$ dan $\lambda_2 = \frac{\Lambda(\zeta\omega + \tau\beta + \mu\beta + \delta\beta)}{(\alpha + \omega + \sigma + \mu)(\tau + \mu + \delta)(\gamma + \mu)}$

Karena bilangan reproduksi dasar diperoleh dari radius spektral atau nilai eigen terbesar, maka diperoleh:

$$R_0 = \frac{\Lambda(\zeta\omega + \tau\beta + \mu\beta + \delta\beta)}{(\alpha + \omega + \sigma + \mu)(\tau + \mu + \delta)(\gamma + \mu)} \quad (10)$$

3.5 Analisis Titik Keseimbangan

Sistem (1) merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear, sehingga untuk menentukan kestabilan pada titik keseimbangan perlu pelinearisasian, karena untuk mengetahui kestabilan masing-masing masing titik keseimbangan model dapat menggunakan sistem yang telah dilinearisasikan. Dengan melinearisasikan sistem (1) diperoleh matriks Jacobian berikut

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{\beta I}{N} - \gamma - \mu & -\frac{\beta}{N} S & 0 & -\frac{\zeta}{N} S \\ \frac{\beta I}{N} + \frac{\zeta}{N} C & \frac{\beta}{N} S - \alpha - \omega - \sigma - \mu & 0 & \frac{\zeta}{N} S \\ \gamma & \alpha & -\mu & \tau \\ 0 & \omega & 0 & -(\tau + \mu + \delta) \end{bmatrix} \quad (11)$$

Teorema 1. Jika $R_0 < 1$, dan $\beta\Lambda\left(\frac{\zeta\omega}{\beta} + \tau + \mu + \delta\right) < (\alpha + \omega + \sigma + \mu)(\tau + \mu + \delta)(\gamma + \mu)$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit E_1 stabil asimtotik lokal.

Bukti: Diketahui $R_0 < 1$. Akan dibuktikan kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit dari sistem (1) stabil asimtotik lokal. Pertama akan ditentukan matriks jacobian dari sistem (1). Hal ini dilakukan dengan linearisasi dis ekitar titik kesetimbangan dari sistem (1) yaitu, langkah selanjutnya substitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit $E_1 = (S_1, I_1, R_1, C_1) = \left(\frac{\Lambda N}{(\gamma + \mu)}, 0, \frac{\gamma \Lambda N}{(\gamma + \mu)\mu}, 0\right)$ ke dalam matriks jacobian (3) sehingga:

$$J = \begin{bmatrix} -\gamma - \mu & -\frac{\beta}{N}\left(\frac{\Lambda N}{(\gamma + \mu)}\right) & 0 & -\frac{\zeta}{N}\left(\frac{\Lambda N}{(\gamma + \mu)}\right) \\ 0 & \frac{\beta}{N}\left(\frac{\Lambda N}{(\gamma + \mu)}\right) - \alpha - \omega - \sigma - \mu & 0 & \frac{\zeta}{N}\left(\frac{\Lambda N}{(\gamma + \mu)}\right) \\ \gamma & \alpha & -\mu & \tau \\ 0 & \omega & 0 & -(\tau + \mu + \delta) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$J_{(E_1)} = \begin{bmatrix} -\gamma - \mu & -\frac{\beta}{N}\left(\frac{\Lambda N}{(\gamma + \mu)}\right) & 0 & -\frac{\zeta}{N}\left(\frac{\Lambda N}{(\gamma + \mu)}\right) \\ 0 & \frac{\beta}{N}\left(\frac{\Lambda N}{(\gamma + \mu)}\right) - \alpha - \omega - \sigma - \mu & 0 & \frac{\zeta}{N}\left(\frac{\Lambda N}{(\gamma + \mu)}\right) \\ \gamma & \alpha & -\mu & \tau \\ 0 & \omega & 0 & -(\tau + \mu + \delta) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Langkah selanjutnya menggunakan ekspansi kofaktor, diketahui J mempunyai $\lambda_1 = -\gamma - \mu < 0$. Selanjutnya selidiki nilai eigen dari sub-matrik J_1

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{N}\left(\frac{\Lambda N}{(\gamma + \mu)}\right) - \alpha - \omega - \sigma - \mu & 0 & \frac{\zeta}{N}\left(\frac{\Lambda N}{(\gamma + \mu)}\right) \\ \alpha & -\mu & \tau \\ \omega & 0 & -(\tau + \mu + \delta) \end{bmatrix}$$

sistem disekitar titik kesetimbangan E_1 akan stabil asimtotik jika sub-matriks J_1 mempunyai trace negatif ($tr(J_1) < 0$) dan determinanya positif ($det(J_1) > 0$) (orang), yang berarti

$$\begin{aligned} tr(J_1) < 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{N}\left(\frac{\Lambda N}{(\gamma + \mu)}\right) - \alpha - \omega - \sigma - \mu\right) + (-\mu) + (-\tau - \mu - \delta) < 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\beta\Lambda}{(\gamma + \mu)}\right) < \alpha + \omega + \sigma + \tau + \delta + 3\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (det(J_1) > 0) &\Leftrightarrow \mu \left(\left(\left(\frac{\beta\Lambda}{(\gamma + \mu)} \right) - \alpha - \omega - \sigma - \mu \right) (-(\tau + \mu + \delta)) \left(\left(\frac{\zeta\Lambda}{(\gamma + \mu)} \right) \right) (\omega) \right) > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\mu(\beta\Lambda(\tau + \mu + \delta) + \zeta\Lambda\omega)}{(\gamma + \mu)(\tau + \mu + \delta)(\alpha + \omega + \sigma + \mu)} < 1 \end{aligned}$$

Oleh karena itu, jika $\left(\frac{\beta\Lambda}{(\gamma + \mu)}\right) < \alpha + \omega + \sigma + \tau + \delta + 3\mu$ dan $\frac{\beta\Lambda(\tau + \mu + \delta) + \zeta\Lambda\omega}{(\gamma + \mu)(\tau + \mu + \delta)(\alpha + \omega + \sigma + \mu)} < 1$ maka $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$ dan $\lambda_4 < 0$. Sehingga terbukti jika, $\left(\frac{\beta\Lambda}{(\gamma + \mu)}\right) < \alpha + \omega + \sigma + \tau + \delta + 3\mu$ dan $R_0 < 1$ maka sistem disekitar titik kesetimbangan stabil asimtotik lokal. ■

Setelah analisis R_0 disekitar titik kesetimbangan bebas penyakit, selanjutnya akan ditentukan kriteria kestabilan sistem disekitar titik kesetimbangan E_2 . Untuk menganalisis kestabilan sistem

disekitar titik kesetimbangan E_2 , substitusikan E_2 kedalam *matrix Jacobian* nilai eigen (λ) dari sistem (1) pada titik kesetimbangan E_2 diperoleh jika dan hanya jika $|J_{(E_2)} - \lambda I| = 0$, dengan I merupakan matriks identitas [14].

$$J = \begin{bmatrix} -\gamma - \mu & -\frac{\beta}{N} \left(\frac{\Lambda N}{(\gamma + \mu)} \right) & 0 & -\frac{\zeta}{N} \left(\frac{\Lambda N}{(\gamma + \mu)} \right) \\ 0 & \frac{\beta}{N} \left(\frac{\Lambda N}{(\gamma + \mu)} \right) - \alpha - \omega - \sigma - \mu & 0 & \frac{\zeta}{N} \left(\frac{\Lambda N}{(\gamma + \mu)} \right) \\ \gamma & \alpha & -\mu & \tau \\ 0 & \omega & 0 & -(\tau + \mu + \delta) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$|J_{(E_2)} - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} \end{bmatrix} = 0$$

Dengan

$$\begin{aligned} J_{11} &= -\beta \frac{\Lambda(R_0 - 1)}{R_0(\alpha + \omega + \sigma + \mu)} - \gamma - \mu - \lambda & J_{11} &= \gamma \\ & & J_{12} &= \alpha \\ J_{12} &= -\frac{\beta\Lambda}{R_0(\gamma + \mu)} & J_{13} &= -\mu - \lambda \\ J_{13} &= 0 & J_{14} &= \tau \\ J_{14} &= -\frac{\zeta\Lambda}{R_0(\gamma + \mu)} & J_{21} &= 0 \\ & & J_{22} &= \omega \\ & & J_{23} &= 0 \\ J_{21} &= \beta \frac{\Lambda(R_0 - 1)}{R_0(\alpha + \omega + \sigma + \mu)} + \frac{\zeta\Lambda(R_0 - 1)}{R_0(\alpha + \omega + \sigma + \mu)(\tau + \mu + \delta)} & J_{24} &= -(\tau + \mu + \delta) - \lambda \\ J_{22} &= \frac{\beta N \Lambda}{R_0(\gamma + \mu)} - \alpha - \omega - \sigma - \mu - \lambda \\ J_{23} &= 0 \\ J_{24} &= \frac{\zeta N \Lambda}{R_0(\gamma + \mu)} \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^4 a_0 + \lambda^3 a_1 + \lambda^2 a_2 + \lambda a_3 + a_4 = 0$$

dengan

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \alpha + \delta + \gamma + 4\mu + \omega + p - r + \sigma + \tau$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \delta\alpha + \alpha\gamma + 3\mu\alpha + p\alpha + \tau\alpha + \delta\gamma + 3\mu\delta + \delta\omega + \delta p - \delta r + \delta\sigma + 3\gamma\mu + \gamma\omega - \gamma r + \gamma\sigma + \gamma\tau \\ &\quad + 6\mu^2 + 3\mu\omega + 3\mu p - 3\mu r + 3\mu\sigma + 3\mu\tau + \omega p - \omega s + \tau\omega + p\sigma + \tau p + q r - \tau r \\ &\quad + \tau\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \alpha\delta\gamma + 2\alpha\delta\mu + \alpha\delta p + 2\alpha\gamma\mu + \alpha\gamma\tau + 3\mu^2\alpha + 2\alpha\mu p + 2\alpha\mu\tau + \alpha p\tau + 2\delta\gamma\mu + \delta\gamma\omega - \delta\gamma r \\ &\quad + \delta\gamma\sigma + 3\mu^2\delta + 2\delta\mu\omega + 2\delta\mu p - 2\delta\mu r + 2\delta\mu\sigma + \delta\omega p + \delta p\sigma + \delta q r + 3\gamma\mu^2 \\ &\quad + 2\gamma\mu\omega - 2\gamma\mu r + 2\gamma\mu\sigma + 2\gamma\mu\tau - \gamma\omega s + \gamma\omega\tau - \gamma r\tau + \gamma\sigma\tau + 4\mu^3 + 3\mu^2\omega \\ &\quad + 3\mu^2 p - 3\mu^2 r + 3\mu^2\sigma + 3\mu^2\tau + 2\mu\omega p - 2\mu\omega s + 2\mu\omega\tau + 2\mu p\sigma + 2\mu p\tau + 2\mu q r \\ &\quad - 2\mu r\tau + 2\mu\sigma\tau - 2\omega p s + \omega p\tau - \omega q s + p\sigma\tau + q r\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4 = & \alpha\delta\gamma\mu + \alpha\delta\mu^2 + \alpha\mu^2p + \alpha\mu^2\tau + \alpha\mu p\tau + \delta\gamma\mu^2 + \delta\gamma\mu\omega - \delta\gamma\mu r + \delta\gamma\mu\sigma + \delta\mu^2\omega + \delta\mu^2p \\
& - \delta\mu^2r + \delta\mu^2\sigma + \delta\mu\omega p + \delta\mu p\sigma + \delta\mu q r + \gamma\mu^3 + \gamma\mu^2\omega - \gamma\mu^2r + \gamma\mu^2\sigma + \gamma\mu^2\tau \\
& + \gamma\mu^2p\alpha - \gamma\mu\omega s + \gamma\mu\omega\tau - \gamma\mu r\tau + \gamma\mu\sigma\tau + \mu^4 + \mu^3\omega + \mu^3p - \mu^3r + \mu^3\sigma + \mu^3\tau \\
& + \mu^3\tau\alpha + \mu^2\omega p - \mu^2\omega s + \mu^2\omega\tau + \mu^2p\sigma + \mu^2p\tau + \mu^2q r - \mu^2r\tau + \mu^2\sigma\tau - 2\mu\omega p s \\
& + \mu\omega p\tau - \mu\omega q s + \mu p\sigma\tau + \mu q r\tau + \alpha\delta\mu + \alpha\gamma\mu
\end{aligned}$$

Teorema 2. Jika $R_0 > 1$ dan $\beta\Lambda\left(\frac{\zeta\omega}{\beta} + \tau + \mu + \delta\right) > (\alpha + \omega + \sigma + \mu)(\tau + \mu + \delta)(\gamma + \mu)$ maka sistem 1 disekitar titik ekuilibrium E_2 stabil asimtotik lokal.

Bukti: Akan dibuktikan semua nilai eigen dari matriks Jacobian pada titik ekuilibrium E_2 mempunyai bagian real yang negatif, akan dibuktikan semua akar-akar dari persamaan karakteristik mempunyai bagian real yang negatif, akan dibuktikan jika determinan dari matriks Hurwitz bernilai positif maka persamaan karakteristik merupakan Polinomial Hurwitz, akan dibuktikan $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_4 > 0$ dan $a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1^2a_4 > 0$

Akan ditunjukkan bahwa $a_0 > 0$ dimana $a_0 = 1$ maka $a_0 > 0$ terpenuhi.

Akan ditunjukkan bahwa $a_1 > 0$ dimana

$$a_1 = \alpha + \delta + \gamma + 4\mu + \omega + p - q + \sigma$$

$$\text{Dimana } p = \frac{\Lambda(R_0-1)}{R_0(\alpha+\omega+\sigma+\mu)}, r = \frac{\beta\Lambda}{R_0(\gamma+\mu)}, q = \frac{\zeta\Lambda(R_0-1)}{R_0(\alpha+\omega+\sigma+\mu)(\tau+\mu+\delta)} \text{ dan } s = \frac{\zeta\Lambda}{R_0(\gamma+\mu)} \text{ sehingga}$$

$$a_1 = \alpha + \delta + \gamma + 4\mu + \omega + \frac{\Lambda(R_0 - 1)}{R_0(\alpha + \omega + \sigma + \mu)} - \frac{\beta N \Lambda}{R_0} + \sigma + \tau$$

$$\text{Karena } R_0 = \frac{\Lambda(\zeta\omega + \tau\beta + \mu\beta + \delta\beta)}{(\alpha + \omega + \sigma + \mu)(\tau + \mu + \delta)(\gamma + \mu)},$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\alpha + \omega + \sigma + \mu)(\tau + \mu + \delta)(\gamma + \mu)R_0}{\Lambda} = \Lambda\zeta\omega + \beta\Lambda(\tau + \mu + \delta) \text{ maka}$$

$$\begin{aligned}
a_1 = & \frac{1}{\zeta\omega + \delta\beta + \mu\beta + \tau\beta} (\gamma\zeta\omega + \gamma\beta\delta + \gamma\beta\mu + \gamma\beta\tau + \gamma(R_0)\beta\delta + \gamma(R_0)\beta\mu + \gamma(R_0)\beta\tau \\
& + \mu(R_0)\beta\delta + \mu(R_0)\beta\mu + \mu(R_0)\beta\tau + \zeta\alpha\omega + \zeta\delta\omega + 4\zeta\mu\omega + \zeta\omega^2 + \zeta\omega\sigma + \zeta\omega\tau \\
& + \beta\delta^2 + 4\beta\delta\mu + 2\beta\delta\tau + 3\beta\mu^2 + 4\beta\mu\tau + \beta\tau^2
\end{aligned}$$

Karena $R_0 > 1$, sehingga syarat $a_1 > 0$ terpenuhi

Akan ditunjukkan bahwa $a_4 > 0$ dimana

$$\begin{aligned}
a_4 = & \alpha\delta\gamma\mu + \alpha\delta\mu^2 + \alpha\delta\mu p + \alpha\gamma\mu^2 + \alpha\gamma\mu\tau + \alpha\mu^3 + 2\mu^2p + \alpha\mu^2\tau + \alpha\mu p\tau + \delta\gamma\mu^2 + \delta\gamma\mu\omega \\
& - \delta\gamma\mu q + \delta\gamma\mu\sigma + \delta\gamma\mu\tau + \delta + \delta\mu^2\omega + \delta p - \delta\mu^2q + \delta\mu^2\sigma + \delta\mu\omega p + \delta\mu p\sigma \\
& + \delta\mu q r + \gamma\mu^3 + \gamma\mu^2\omega - \gamma\mu^2q + \gamma\mu^2\sigma + \gamma\mu^2\tau + \gamma\mu\omega\tau - \gamma\mu q\tau + \gamma\mu\sigma\tau + \mu^4 \\
& + \mu^3\omega + \mu^3p - \mu^3q + \mu^3\tau + \mu^2\omega p + \mu^2p\sigma + \mu^2p\tau + \mu^2q r - \mu^2q\tau + \mu^2\sigma\tau \\
& + \mu\omega p\tau + \mu p\sigma\tau + \mu q r\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\gamma r\delta + \delta\mu r + \gamma\mu r + \gamma\omega s + \gamma r\tau + \mu^2r + \mu\omega s + \mu r\tau + 2\omega p s + \omega q s} (\alpha\delta\gamma + \alpha\delta\mu + \alpha\mu p + \alpha\mu\tau \\
& + \alpha p\tau + \gamma\delta\mu + \omega\gamma\delta + \sigma\gamma\delta + \delta\mu\omega + \delta\mu p + \delta\mu\sigma + \omega p\delta + \sigma p\delta + q r\delta + \gamma\mu^2 \\
& + \omega\gamma\mu + \gamma\mu\sigma + \gamma\mu\tau + \gamma\mu p\alpha + \omega\gamma\tau + \sigma\gamma\tau + \mu^3 + \omega\mu^2 + p\mu^2 + \mu^2\sigma + \tau\mu^2 \\
& + \mu^2\tau\alpha + \omega p\mu + \mu\omega\tau + \mu p\sigma + p\tau\mu + \mu q r + \mu\sigma\tau + \omega p\tau + \sigma p\tau + q r\tau + \alpha\delta + \alpha\gamma \\
& > 1
\end{aligned}$$

Karena $R_0 > 1$, sehingga syarat $a_4 > 0$ terpenuhi

Selanjutnya, akan dibuktikan $a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1^2a_4 > 0$

Bukti:

$$\frac{m_1^2n_4 + m_1m_2m_3 + 2m_1m_4n_1 + m_1n_2n_3 + m_2n_1n_3 + m_3n_1n_2 + n_1^2n_4 + 2m_3n_3}{m_1^2m_4 + m_1m_3n_3 + m_1m_3n_2 + 2m_1n_1n_4 + m_1m_3n_1 + m_4n_1^2 + n_1n_2n_3 + m_3^2 + n_3^2} > 1$$

dimana :

$$m_1 = \alpha\delta\gamma + 2\alpha\delta\mu + \alpha\delta\rho + 2\alpha\gamma\mu + \alpha\gamma\tau + 3\alpha\mu^2 + 2\alpha\mu\rho + 2\alpha\mu\tau + \alpha\rho\tau + 2\delta\gamma\mu + \delta\gamma\omega$$

$$m_2 = \alpha + \delta + \gamma + 4\mu + \omega + \rho + \sigma$$

$$m_3 = \alpha\delta + \alpha\gamma + 3\alpha\mu + \alpha\rho + \alpha\tau + \delta\gamma + 3\delta\mu + \delta\omega + \delta\rho + \delta\sigma + 3\gamma\mu + \gamma\omega + \gamma\sigma + \gamma\tau + 6\mu^2 + 3\mu\omega + 3\mu\sigma + 3\mu\tau + \omega\rho + \omega\tau + \rho\gamma + \rho\tau + \sigma\tau$$

$$m_4 = \alpha\delta\gamma\mu + \alpha\delta\mu^2 + \alpha\delta\mu\rho + \alpha\gamma\mu^2 + \alpha\gamma\mu\tau + \alpha\mu^3 + \alpha\mu^2\rho + \alpha\mu^2\tau + \alpha\mu\rho\tau + \delta\gamma\mu^2 + \delta\gamma\mu\omega + \delta\gamma\mu\sigma + \delta\mu^3 + \delta\mu^2\omega + \delta\mu^2\rho + \delta\mu^2\sigma + \delta\mu\omega\rho + \delta\mu\rho\sigma + \gamma\mu^3 + \gamma\mu^2\omega + \gamma\mu^2\sigma + \gamma\mu^2\tau + \gamma\mu\omega\tau + \gamma\mu\sigma\tau + \mu^4 + \mu^3\omega + \mu^3\rho + \mu^3\sigma + \mu^3\tau + \mu^2\omega\rho + \mu^2\omega\tau + \mu^2\rho\sigma + \mu^2\rho\tau + \mu^2\sigma\tau + \mu\rho\sigma\tau$$

$$n_1 = q$$

$$n_2 = \delta q + \gamma q + 3\mu\rho + 3\mu\gamma + q\tau$$

$$n_3 = \delta\gamma q + 2\gamma\mu q + \gamma q\tau + 3\mu^2 q + 2\mu q\tau$$

$$n_4 = \delta\gamma\mu q + \delta\mu^2 q + \gamma\mu^2 q + \gamma\mu q\tau + \mu^3 q + \mu^2 q\tau$$

Karena $a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1^2a_4 > 0$, sehingga syarat untuk $a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1^2a_4 > 1$ terpenuhi. dengan demikian terbukti bahwa pada saat $R_0 > 0$, titik kestimbangan endemik stabil asimtotik. Hal tersebut menunjukkan individu yang terinfeksi virus hepatitis B akan selalu ada dan tingkat penyebarannya stabil asimtotik lokal. ■

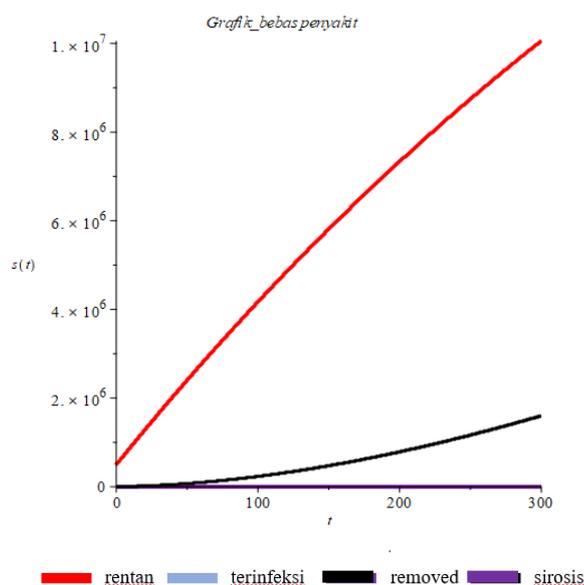
3.6 Simulasi Numerik

Simulasi dilakukan menggunakan program matematika dan dengan memberikan masing-masing nilai parameter. Simulasi ini bertujuan untuk memberikan gambaran geometris terkait dengan hasil transmisi hepatitis B pada sirosis hati yang telah dianalisis. Dalam penelitian transmisi hepatitis B pada sirosis hati dianalisis dengan menggunakan parameter-parameter yang diambil dari kota Pontianak dan diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Sedangkan masing-masing nilai parameter yang diberikan untuk memuat simulasi disajikan dalam Tabel 2 dan Tabel 3.

Tabel 2. Nilai parameter untuk Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Parameter	simbol	Nilai	Sumber
Tingkat kelahiran alami	Λ	0.06	[15]
Tingkat kontak antar individu terinfeksi dan individu rentan	β	0.00009	[15]
Tingkat kematian alami	μ	0.0005	[8]
Tingkat populasi individu rentan divaksinasi	γ	0.001	[16]
Tingkat individu terinfeksi menjadi sirosis hati	ω	0.000003	[4]
Tingkat kematian akibat sirosis hati	α	0.00002	[4]

Karena $R_0 = \frac{\Lambda(\zeta\omega + \tau\beta + \mu\beta + \delta\beta)}{(\alpha + \omega + \sigma + \mu)(\tau + \mu + \delta)(\gamma + \mu)}$, maka jika disubsitusikan nilai-nilai parameter pada Tabel 1 diperoleh $R_0 = 0.3423993061$. Hasil simulasi pada kondisi ini diperoleh



Gambar 2. Simulasi numerik titik kesetimbangan bebas penyakit

Berdasarkan Gambar 2 dapat dilihat jumlah sub-populasi rentan mengalami peningkatan, hal ini terjadi karena adanya kelahiran alami dari sub-populasi rentan dan tidak adanya individu yang terkena penyakit, sehingga dari $t = 0$ sub-populasi rentan terus meningkat. sub-populasi terinfeksi dalam kurung waktu mengalami penurunan, hal ini karena adanya tingkat sub-populasi terinfeksi yang sembuh secara alami serta adanya tingkat sub-populasi individu yang terinfeksi menjadi sirosis hati, sehingga menuju ke nol disekitar $t = 25$ bulan hingga seterusnya jumlah individu terinfeksi mengalami penurunan yang diakibatkan oleh adanya kematian alami serta kematian yang diakibatkan oleh sirosis hati. sub-populasi *removed* mengalami peningkatan. Hal ini terjadi karena meningkatnya individu pada sub-populasi rentan dengan tingkat vaksinasi dan terdapat individu yang terinfeksi menjadi *removed* yang diakibatkan adanya kesembuhan alami sehingga jumlah individu *removed* mengalami peningkatan, sehingga dari $t = 0$ sub-populasi rentan terus meningkat. sub-populasi sirosis hati mengalami penurunan, hal ini terjadi karena adanya tingkat kematian alami dan tingkat kematian yang diakibatkan sirosis hati serta terdapatnya tingkat individu yang sembuh dari sirosis hati, sehingga menuju ke nol sekitar $t = 10$ bulan sub-populasi rentan terus meningkat.

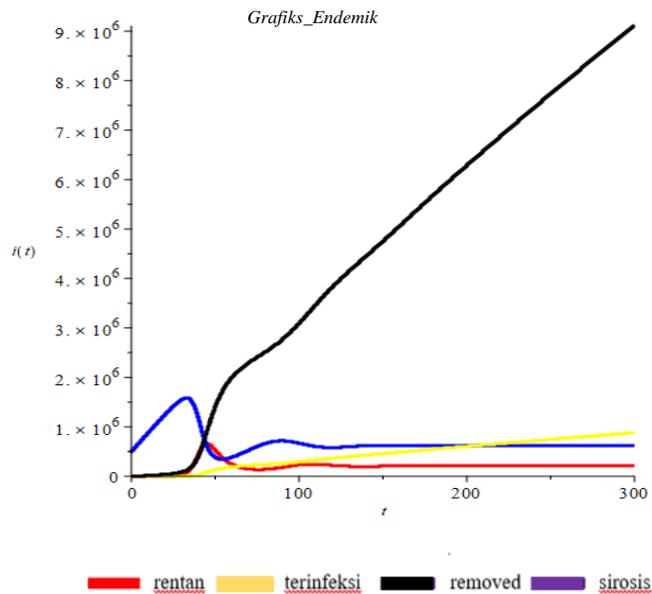
Berdasarkan hal tersebut, maka jumlah sub-populasi transmisi hepatitis B pada sirosis hati pada keadaan bebas penyakit akan stabil.

Selanjutnya melakukan simulasi pada parameter kesetimbangan endemik yang disajikan dalam Tabel 3.

Tabel 3. Nilai parameter untuk Titik Kesetimbangan Endemik

Parameter	Simbol	Nilai	Sumber
Tingkat kelahiran alami	Λ	0.06	[15]
Tingkat kontak antar individu terinfeksi dan individu rentan	β	0.009	[15]
Tingkat kematian alami	μ	0.0005	[8]
Tingkat populasi individu rentan divaksinasi	γ	0.001	[16]
Tingkat individu terinfeksi menjadi sirosis hati	ω	0.003	[4]
Tingkat kematian akibat sirosis hati	α	0.002	[4]

Karena $R_0 = \frac{\Lambda(\zeta\omega + \tau\beta + \mu\beta + \delta\beta)}{(\alpha + \omega + \sigma + \mu)(\tau + \mu + \delta)(\gamma + \mu)}$, maka jika disubsitusikan nilai-nilai parameter pada Tabel 2 diperoleh $R_0 = 6.332562986$. hasil simulasi pada kondisi ini diperoleh



Gambar 3. simulasi numerik titik kesetimbangan endemik

Berdasarkan Gambar 3. Dapat dilihat jumlah sub-populasi rentan stabil dalam waktu $t = 25$ bulan. Hal ini terjadi karena belum terdapat individu yang terkena terinfeksi hepatitis B. sehingga dalam kurung waktu $t = 25$ menuju ke $t = 50$ bulan sub-populasi rentan terus meningkat. Hal ini disebabkan adanya kelahiran alami, selanjutnya pada waktu $t = 5$ menuju ke $t = 75$ mengalami penurunan kembali. Hal ini disebabkan terjadinya individu yang terinfeksi hepatitis B yang jumlahnya terus meningkat, sehingga disekitar $t = 100$ bulan sub-populasi rentan terus meningkat. Selanjutnya sekitar $t = 125$ dengan adanya vaksinasi sub-populasi rentan akan menyebabkan stabilnya sub-populasi rentan. Sub-Populasi terinfeksi diawal grafik yang meningkat, hal ini karena adanya tingkat kontak interaksi antara individu terinfeksi dan individu rentan sehingga berpindahnya individu dari sub-populasi rentan menjadi terinfeksi mengakibatkan individu pada sub-populasi terinfeksi mengalami peningkatan, sehingga dari nol $t = 0$ terus meningkat. Sub-populasi *removed* mengalami peningkatan. Hal ini, terdapat akibat adanya individu yang terinfeksi menjadi sembuh yang diakibatkan adanya kesembuhan alami. Serta mengalami peningkatan. Hal ini terjadi karena meningkatnya individu pada sub-populasi rentan yang di vaksinasi, sehingga dari nol $t = 0$ sub-populasi *removed* terus meningkat. Sub-populasi sirosis hati awalnya meningkat, hal ini karena terdapat individu terinfeksi menjadi sirosis hati. Dalam kurung waktu $t =$ bulan jumlah individu terinfeksi mengalami penurunan, hal ini diakibatkan terjadinya kematian alami serta kematian yang diakibatkan sirosis hati, serta meningkat diakibatkan tidak adanya individu yang sembuh dalam kurung waktu sekitar $t = 100$.

Berdasarkan hal tersebut, maka jumlah sub-populasi transmisi hepatitis B pada sirosis hati pada keadaan endemik akan stabil dan menunjukan berkurangnya transmisi hepatitis B pada sirosis hati.

4. Kesimpulan

Model matematika transmisi hepatitis B pada sirosis hati memiliki 2 titik kesetimbangan yaitu, titik kesetimbangan bebas penyakit (E_1) yang stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan titik

kesetimbangan endemik (E_2) yang stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$. Model matematika transmisi hepatitis B pada sirosis hati menunjukkan apabila nilai reproduksi dasar kurang dari satu, penyakit hepatitis tidak akan menyebar, dengan kata lain untuk jangka waktu tertentu populasi akan bebas dari penyakit. Namun apabila adanya peningkatan interaksi antara individu terinfeksi dan individu rentan, akan mengakibatkan naiknya individu terinfeksi, dengan kata lain akan menjadi epidemi sehingga individu terinfeksi dan penularan akan tetap ada dalam populasi.

Referensi

- [1] I. S. Sair, "Solusi Numerik Model Penyebaran pada Penyakit Hepatitis B di Provinsi Sulawesi Selatan Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat," 2018.
- [2] T. Khan, Z. Ullah, N. Ali, and G. Zaman, "Modeling and control of the hepatitis B virus spreading using an epidemic model," *Chaos Solitons Fractals*, vol. 124, pp. 1–9, Jul. 2019, doi: 10.1016/j.chaos.2019.04.033.
- [3] CDC, "Hepatitis B FAQs | CDC," Centers for Disease Control and Prevention. Accessed: Feb. 18, 2023. [Online]. Available: <https://www.cdc.gov/hepatitis/hbv/bfaq.htm>
- [4] R. P. Triananda, M. A. Yuswar, and Robiyanto, "Pola penggunaan obat-obatan pada pasien Ssirosis hati rawat inap RSUD Dr. Soedarso Pontianak." *jurnal mahasiswa farmasi fakultas kedokteran Untan*, 2019.
- [5] K. Humolungo and R. Paudi, "Model Matematika SIUC pada Kasus Kanker Serviks dengan Vaksinasi," *Euler J. Ilm. Mat. Sains Dan Teknol.*, vol. 7, no. 1, pp. 32–36, Jun. 2019, doi: 10.34312/euler.v7i1.10331.
- [6] S. Zhang and Y. Zhou, "The analysis and application of an HBV model," *Appl. Math. Model.*, vol. 36, no. 3, pp. 1302–1312, 2012, doi: 10.1016/j.apm.2011.07.087.
- [7] L. B. Dano, K. P. Rao, and T. D. Keno, "Modeling the Combined Effect of Hepatitis B Infection and Heavy Alcohol Consumption on the Progression Dynamics of Liver Cirrhosis," *J. Math.*, vol. 2022, pp. 1–18, Apr. 2022, doi: 10.1155/2022/6936396.
- [8] M. A. Muniroh, T. Trisilowati, and W. M. Kusumawinahyu, "Analisis Dinamik Model Hepatitis B dengan Sirosis Hati," *Limits J. Math. Its Appl.*, vol. 19, no. 1, p. 101, May 2022, doi: 10.12962/limits.v19i1.11060.
- [9] S. Side, M. S. Wahyuni, and Muh. Rifki, "Solusi Numerik Model SIR pada Penyebaran Penyakit Hepatitis B dengan Metode Perturbasi Homotopi di Provinsi Sulawesi Selatan," *J. Math. Comput. Stat.*, vol. 3, no. 2, p. 79, Oct. 2020, doi: 10.35580/jmathcos.v3i2.20122.
- [10] N. 'Ain Supu, Saltina, K. Palalu, and R. Ismail, "Model Epidemi SICKR pada Penyebaran Penyakit Hepatitis B dan Kanker Hati," *Open Science Framework*, preprint, Jan. 2021. doi: 10.31219/osf.io/9j5er.
- [11] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, 3rd ed. in *Texts in applied mathematics*, no. 7. New York: Springer, 2001.
- [12] O. Diekmann, J. A. P. Heesterbeek, and M. G. Roberts, "The construction of next-generation matrices for compartmental epidemic models," *J. R. Soc. Interface*, vol. 7, no. 47, pp. 873–885, Jun. 2010, doi: 10.1098/rsif.2009.0386.
- [13] R. Resmawan dan N. Nurwan, "Konstruksi Bilangan Reproduksi Dasar pada Model Epidemik SEIRS-SEI Penyebaran Malaria dengan Vaksinasi dan Pengobatan," *Jurnal Matematika*

Integratif, vol. 13, no. 2, pp. 105-114, 2017. doi
: <https://doi.org/10.24198/jmi.v13.n2.12332.105-114>

- [14] R. C. Anton, “Aljabar Linear Elementer versi Aplikasi. Edisi 8 Jilid 1.”
- [15] BPS kota pontianak, “BPS Kota Pontianak.” Accessed: Jun. 20, 2023. [Online]. Available: <https://pontianakkota.bps.go.id/indicator/12/31/2/jumlah-penduduk.html>
- [16] Pontianak dataset, “Data Hasil Capaian Imunisasi HB0 Di Kota Pontianak - Satu data Kota Pontianak.” Accessed: Jun. 20, 2023. [Online]. Available: <https://data.pontianak.go.id/dataset/hasil-capaian-imunisasi-hb0>