EULER: Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi
Journal Homepage: http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/Euler
DOI: https://doi.org/10.37905/euler.v11i2.23094
Desember 2023, Vol. 11, No. 2, pp. 351-360

Modifikasi Garis Singgung Untuk Mempercepat Iterasi Pada Metode Newton Raphson

Maxrizal[1*]
[1]Jurusan Sistem Informasi, Institut Sains Dan Bisnis Atma Luhur, Pangkalpinang, Indonesia
*Penulis Korespondensi. Email:maxrizal@atmaluhur.ac.id

Abstrak

Metode Newton Raphson merupakan salah satu metode untuk mencari solusi atau akar persamaan nonlinear. Metode ini dikenal lebih cepat konvergen dibandingkan dengan metode yang lain dan lebih efektif dalam menemukan akan ganda. Pada penelitian ini, akan ditunjukkan modifikasi Newton Raphson menggunakan modifikasi pada persamaan garis singgung. Hasil penelitian menunjukkan bahwa untuk setiap iterasi ke-n diperoleh selisih kecepatan modifikasi Newton Raphson sebesar Δ_{n+1}. Lebih lanjut, diperoleh konvergensi Newton Raphson adalah $e_{n+1} \approx Ae_n^2$ dan konvergensi untuk modifikasi Newton Raphson adalah $e_{n+1} \approx Be_n^2 + Ce_n^3$.

Kata Kunci: Newton Raphson; Persamaan Nonlinear; Modifikasi Newton

Abstract

The Newton-Raphson method is one of the methods to find solutions or roots of nonlinear equations. This method converges faster than other methods and is more effective in finding doubles. In this study, it will be shown that the Newton-Raphson modification uses modifications to the tangent equation. The results show that for every nth iteration, the speed difference of Newton Raphson modification is Δ_{n+1}. Furthermore, the convergence of Newton Raphson is $e_{n+1} \approx Ae_n^2$, and for Newton Raphson modification is $e_{n+1} \approx Be_n^2 + Ce_n^3$.

Keywords: *Newton Raphson; Nonlinear Equations; Newton Modification*

1. Pendahuluan

Suatu persamaan non linear $f(x) = 0$ dapat diselesaikan dengan beberapa metode numerik. Salah satu metode yang efektif dan populer adalah metode pencarian akar Newton Raphson. Metode ini memanfaatkan gradien garis singgung melalui suatu titik awal dengan absis x_0. Selanjutnya dengan menggunakan prinsip perulangan (iterasi), $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, solusi persamaan non linear dapat ditemukan hingga galat atau *error* tertentu. Pencarian akar juga dapat dihentikan jika hasil perhitungan suatu akar atau solusi telah konstan pada beberapa perulangan.

Metode Newton Raphson dikenal lebih cepat konvergen dibandingkan dengan metode Secant [1] dan lebih efektif dalam menemukan akan ganda [2]–[4]. Karena tingkat konvergensi dan iterasi yang relatif cepat maka metode Newton Raphson banyak dikembangkan untuk mencari solusi permasalahan persamaan nonlinear *fuzzy* [5], persamaan nonlinear atas bilangan kompleks [6]. mengestimasi volatilitas saham [7], [8]. Selain itu, metode Newton Raphson juga dimodifikasi berdasarkan formulanya untuk mendapatkan tingkat konvergensi yang lebih baik dari pada Newton Raphson asli [9]–[12].

Submit: 22 Oktober 2023, Direvisi: 12 Desember 2023, Disetujui: 14 Desember 2023

Chauhan [9] menambahkan konsep evaluasi bagi dua pada taksiran akar pada metode Newton Raphson. Dalam penelitiannya dipilih sebarang x_0 dan menghitung x_1 dengan konsep Newon Raphson. Selanjutnya, digunakan nilai fungsi $f(x_1)$ dan nilai evaluasi turunan pada $\frac{1}{2}(x_1 + x_0)$. Konsep modifikasi yang diperkenalkan ini merupakan perbaikan modifikasi pada yang dilakukan oleh McDougall dan Wotherpoon [11]. Lebih lanjut, Juhari [10] dalam penelitiannya juga mendeskripsikan metode modifikasi Newton Secant dengan memperbaiki garis. Walaupun tingkat konvergensinya lebih baik, secara komputasi akan memerlukan kerja komputasi yang cukup lama. Karena penelitian itu menggabungkan dan memodifikasi kedua algoritma dalam satu iterasi.

Selain itu, terdapat modifikasi varian metode Newton dengan menggunakan interpolasi Lagrange orde dua [13], dan matriks Jacobian [12]. Penelitian lainnya mengembangkan metode Newton-Steffensen dengan melibatkan interpolasi Lagrange dan selisih terbagi untuk menghilangkan fungsi turunan dan meningkatkan orde konvergensi [14]. Beberapa penelitian ini memodifikasi Newton Raphson dengan menggabungkan dengan metode lain seperti Secant dan Interpolasi Lagrange. Selanjutnya, terdapat penelitian tentang penentuan nilai awal pada metode Newton-Raphson yang dimodifikasi, dengan tujuannya untuk mengetahui pengaruh dalam menentukan akar persamaan yang memiliki akar ganda [15].

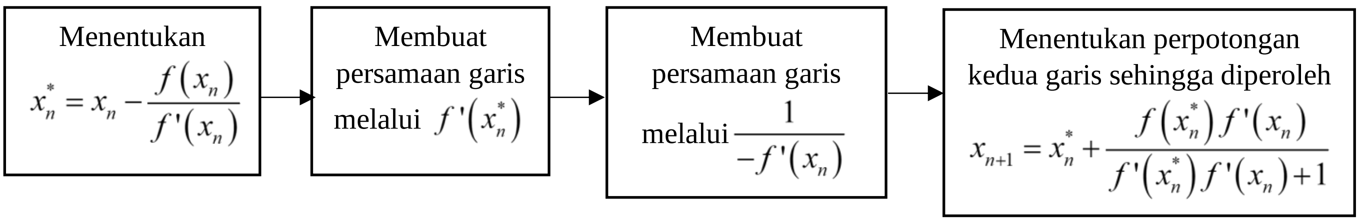
Pada penelitan ini, dikembangkan metode Newton Raphson dengan memberi modifikasi pada garis singgung kurva $f(x)$. Modifikasi dilakukan dengan membuat garis baru yang berpotongan tegak lurus dengan garis singgung pertama. Selanjutnya, perpotongan garis itu dengan persamaan garis singgung yang kedua merupakan taksiran untuk akar atau solusi. Tujuan utama penelitian ini adalah melakukan modifikasi pada metode Newton Raphson untuk menghasilkan iterasi lebih cepat sehingga diperoleh solusi dari suatu persamaan non linear dengan tingkat konvergensi yang lebih baik.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian studi pustaka. Kami memodifikasi metode Newton Raphson dengan dengan menambahkan parameter berupa suatu persaman garis singgung untuk memunculkan titik taksiran baru. Berikut algoritma baku untuk metode Newton Raphson:

1) Menetukan nilai awal atau *initial point* x_0
2) Menghitung $f(x_0)$ dan tentukan fungsi turunan pertama $f'(x_0)$
3) Jika $f'(x_0) \neq 0$, hitung nilai taksiran akar yaitu $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
4) Cek konvergensi terhadap x toleransi atau lakukan iterasi sampai ditemukan x_i yang konstan.

Pada penelitian ini, dilakukan modifikasi pada metode Newton Raphson dengan mengubah formula untuk taksiran dengan menambahkan suatu parameter x_n^*. Konsep ini diperoleh dengan menganalisis beberapa sifat dari garis singgung kurva.



Gambar 1. Langkah-langkah modifikasi metode Newton Raphson

Selanjutnya, digunakan software Matlab dalam mengolah data perhitungan iterasi, akar atau solusi, dan galat.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Modifikasi Newton Raphson

Metode Newton Raphson menggunakan gradien garis singgung dari suatu titik pada suatu kurva $f(x)$. Metode ini menggunakan suatu nilai awal x_0 dan menghitung nilai taksiran dengan rumus

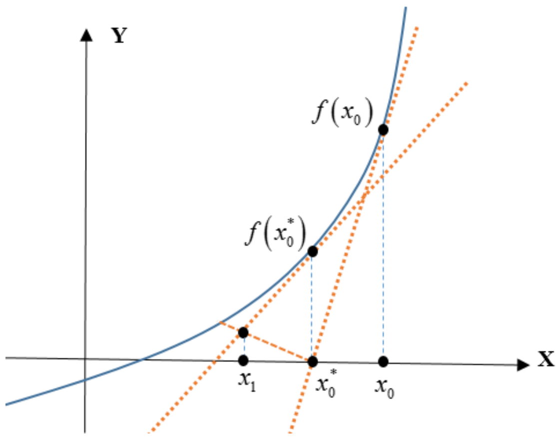
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Langkah-langkah iterasi untuk Newton Raphson, yaitu:

1) Tentukan nilai awal atau *initial point* x_0
2) Hitung $f(x_0)$ dan tentukan fungsi turunan pertama $f'(x_0)$
3) Jika $f'(x_0) \neq 0$, hitung nilai taksiran akar yaitu $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
4) Cek konvergensi terhadap x toleransi atau lakukan iterasi sampai ditemukan x_i yang konstan.

Perhatikan bahwa pada metode Newton Raphson, harus dipenuhi syarat $f'(x_n) \neq 0$. Selanjutnya, pada penelitian ini, kami menambahkan suatu langkah untuk membuat konvergensi pada Newton Raphson menjadi lebih cepat.

Berdasarkan Gambar 2, terdapat suatu fungsi nonlinear $f(x)$. Dipilih sebarang $(x_0, f(x_0))$. Kita memiliki garis singgung l_1 yang melalui titik $(x_0, f(x_0))$ yaitu $m_1 = f'(x_0)$. Selanjutnya dibentuk $x_0^* = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ yang merupakan persamaan pada Newton Raphson biasa.



Gambar 2. Ilustrasi Modifikasi Newton Raphson yang diusulkan

Dengan demikian diperoleh garis singgung l_2 yang melalui $(x_0^*, f(x_0^*))$ dengan gradien $m_2 = f'(x_0^*)$. Kita bentuk garis singgung l_2, yaitu

$$y - f(x_0^*) = m_2(x - x_0^*)$$
$$y = f'(x_0^*)(x - x_0^*) + f(x_0^*)$$

Selanjutnya dibentuk persamaan garis l_3 yang melalui $\left(x_0^*, 0\right)$ dan tegak lurus garis singgung l_1, dengan gradien $m_1^* = \dfrac{1}{-f'\left(x_0\right)}$. Kita bentuk

$$y - 0 = m_1^*\left(x - x_0^*\right)$$
$$y = \frac{1}{-f'\left(x_0\right)}\left(x - x_0^*\right)$$

Perhatikan bahwa kita akan mencari perpotongan antara garis singgung l_2 dan garis l_3. Kita misalkan titik potong keduanya adalah $\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$

$$\frac{1}{-f'\left(x_0\right)}\left(x_1 - x_0^*\right) = f'\left(x_0^*\right)\left(x_1 - x_0^*\right) + f\left(x_0^*\right)$$
$$-f\left(x_0^*\right) = \left(f'\left(x_0^*\right) + \frac{1}{f'\left(x_0\right)}\right)\left(x_1 - x_0^*\right)$$
$$x_1 = x_0^* + \frac{f\left(x_0^*\right) f'\left(x_0\right)}{f'\left(x_0^*\right) f'\left(x_0\right) + 1}$$

Perhatikan bahwa untuk suatu nilai awal x_0, kita telah menemukan persamaan rekursif baru untuk memodifikasi Newton Raphson yaitu

$$\begin{cases} x_n^* = x_n - \dfrac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)} \\ x_{n+1} = x_n^* + \dfrac{f\left(x_n^*\right) f'\left(x_n\right)}{f'\left(x_n^*\right) f'\left(x_n\right) + 1} \end{cases}$$

Dengan demikian, langkah-langkah iterasi untuk modifikasi Newton Raphson, yaitu:

1) Tentukan nilai awal atau initial point x_0
2) Hitung $f\left(x_0\right)$ dan tentukan fungsi turunan pertama $f'\left(x_0\right)$
3) Jika $f'\left(x_0\right) \neq 0$, hitung nilai taksiran akar yaitu $x_n^* = x_n - \dfrac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}$
4) Hitung nilai taksiran akar yaitu $x_{n+1} = x_n^* + \dfrac{f\left(x_n^*\right) f'\left(x_n\right)}{f'\left(x_n^*\right) f'\left(x_n\right) + 1}$
5) Cek konvergensi terhadap x toleransi atau lakukan iterasi sampai ditemukan x_i yang konstan.

3.2 Analisis Konvergensi Newton Raphson dan Modifikasi Newton Raphson

Pada bagian ini, kita menganalisa formula Newton Raphson asli dan Modifikasi Newton Raphson dari iterasi ke-0 sampai ke-3, sebagai sampel. Pada iterasi ke-0, kedua metode, baik itu Newton Raphson asli ataupun Modifikasi Newton Raphson diberikan nilai awal yang sama yaitu x_0. Selanjutnya, kita mengamati perbedaan pada iterasi ke-1 sampai ke-3. Kita dapat melihat bahwa setiap iterasi ke-$n+1$ pada Modifikasi Newton Raphson pasti memuat Newton Rapshon asli. Berikut ini hasil analisa disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Perbandingan Newton Raphson dan Modifikasi Newton Raphson

Iterasi ke-	Newton Raphson	Modifikasi Newton Raphson
0	x_0	x_0
1	$x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$	$x_1 = \left(x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right) + \dfrac{f\left(x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right) f'(x_0)}{f'\left(x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right) f'(x_0) + 1}$
2	$x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$	$x_2 = \left(x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right) + \dfrac{f\left(x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right) f'(x_1)}{f'\left(x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right) f'(x_1) + 1}$
3	$x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$	$x_3 = \left(x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}\right) + \dfrac{f\left(x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}\right) f'(x_2)}{f'\left(x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}\right) f'(x_2) + 1}$

Jika kita misalkan $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ pada Newton Raphson asli maka $\hat{x}_1$ pada Modifikasi Newton Raphson adalah $\hat{x}_1 = x_1 + \dfrac{f(x_1) f'(x_0)}{f'(x_1) f'(x_0) + 1}$. Hal ini juga berlaku untuk semua iterasi, sehingga untuk $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ pada Newton Raphson asli maka pada Modifikasi Newton Raphson adalah $\hat{x}_{n+1} = x_{n+1} + \dfrac{f(x_{n+1}) f'(x_n)}{f'(x_{n+1}) f'(x_n) + 1}$. Dengan demikian untuk setiap iterasi ke-n diperoleh selisih kecepatan Modifikasi Newton Raphson sebesar

$$\hat{x}_{n+1} - x_{n+1} = \left(x_{n+1} + \frac{f(x_{n+1}) f'(x_n)}{f'(x_{n+1}) f'(x_n) + 1}\right) - x_{n+1}$$

atau

$$\Delta_{n+1} = \frac{f(x_{n+1}) f'(x_n)}{f'(x_{n+1}) f'(x_n) + 1}.$$

Jadi berdasarkan analisis formula, Modifikasi Newton Raphson lebih cepat mencapai konvergensi sebesar Δ_{n+1}.

Selanjutnya, kita akan menganalisa konvergensi dari Newton Raphson. Kita misalkan $x_n = e_n + \alpha$ dan $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$. Berdasarkan formula Newton Raphson, kita peroleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\alpha + e_{n+1} = (\alpha + e_n) - \frac{f(\alpha + e_n)}{f'(\alpha + e_n)}$$

$$e_{n+1} = e_n - \frac{\left[f(\alpha) + e_n f'(\alpha) + \dots \right]}{\left[f'(\alpha) + e_n f''(\alpha) + \dots \right]}$$

Karena $f(\alpha) = 0$ maka

$$e_{n+1} = e_n - \frac{e_n f'(\alpha)}{f'(\alpha) + e_n f''(\alpha)}$$

$$e_{n+1} = -\frac{e_n f'(\alpha) + e_n^2 f''(\alpha) - e_n f'(\alpha)}{f'(\alpha) + e_n f''(\alpha)}$$

$$e_{n+1} = \frac{e_n^2 f''(\alpha)}{f'(\alpha) + e_n f''(\alpha)}$$

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \left(1 + \frac{e_n f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^{-1}$$

Karena $\left(1 + \frac{e_n f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^{-1} = \left(1 - \frac{e_n f''(\alpha)}{f'(\alpha)} - \dots \right)$ maka

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \left(1 - \frac{e_n f''(\alpha)}{f'(\alpha)} - \dots \right)$$

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^2} \approx \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

$$e_{n+1} \approx \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} e_n^2$$

Dengan demikian, konvergensi pada Newton Raphson adalah $e_{n+1} \approx A e_n^2$, dengan $A = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$. Selanjutnya, kita akan menguraikan konvergensi pada modifikasi Newton Raphson. Perhatikan bahwa berlaku $\begin{cases} x_n^* = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} = x_n^* + \dfrac{f(x_n^*) f'(x_n)}{f'(x_n^*) f'(x_n) + 1} \end{cases}$. Berdasarkan formula ini, formula Newton Raphson asli termuat di dalamnya. Kita misalkan $x_n = e_n + \alpha$ dan $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$. Kita misalkan $x_n^* = e_n^* + \alpha$ yang merupakan nilai dari Newton Raphson asli.

$$x_{n+1} = x_n^* + \frac{f\left(x_n^*\right) f'\left(x_n\right)}{f'\left(x_n^*\right) f'\left(x_n\right)+1}$$

$$\alpha + e_{n+1} = \left(\alpha + e_n^*\right) + \frac{f\left(\alpha + e_n^*\right) f'\left(\alpha + e_n\right)}{f'\left(\alpha + e_n^*\right) f'\left(\alpha + e_n\right)+1}$$

$$e_{n+1} = e_n^* + \frac{\left(f\left(\alpha\right)+e_n^* f'\left(\alpha\right)+\ldots\right)\left(f'\left(\alpha\right)+e_n f''\left(\alpha\right)+\ldots\right)}{\left(f'\left(\alpha\right)+e_n^* f''\left(\alpha\right)+\ldots\right)\left(f'\left(\alpha\right)+e_n f''\left(\alpha\right)+\ldots\right)+1}$$

Karena $f\left(\alpha\right)=0$ maka

$$e_{n+1} \approx e_n^* + \frac{e_n^* f'\left(\alpha\right)^2 + e_n^* e_n f'\left(\alpha\right) f''\left(\alpha\right)}{f'\left(\alpha\right)^2 + \left(e_n^* + e_n\right) f'\left(\alpha\right) f''\left(\alpha\right) + e_n^* e_n f''\left(\alpha\right)^2 + 1}$$

$$e_{n+1} \approx e_n^* + \left[e_n^* f'\left(\alpha\right)^2 + e_n^* e_n f'\left(\alpha\right) f''\left(\alpha\right)\right]\left[1 + f'\left(\alpha\right)^2 + \left(e_n^* + e_n\right) f'\left(\alpha\right) f''\left(\alpha\right) + e_n^* e_n f''\left(\alpha\right)^2\right]^{-1}$$

Karena $\left[1 + f'\left(\alpha\right)^2 + \left(e_n^* + e_n\right) f'\left(\alpha\right) f''\left(\alpha\right) + \ldots\right]^{-1} = \left[1 - f'\left(\alpha\right)^2 - e_n f'\left(\alpha\right) f''\left(\alpha\right) - \ldots\right]$ maka

$$e_{n+1} \approx e_n^* + \left[e_n^* f'\left(\alpha\right)^2 + e_n^* e_n f'\left(\alpha\right) f''\left(\alpha\right)\right]\left[1 - f'\left(\alpha\right)^2 - e_n f'\left(\alpha\right) f''\left(\alpha\right) - \ldots\right]$$

$$e_{n+1} \approx e_n^* + \left[e_n^* f'\left(\alpha\right)^2 + e_n^* e_n f'\left(\alpha\right) f''\left(\alpha\right)\right]$$

Perhatikan bahwa $e_n^* \approx A e_n^2$ dengan $A = \dfrac{f''\left(\alpha\right)}{f'\left(\alpha\right)}$, sehingga

$$e_{n+1} \approx e_n^* + \left[e_n^* f'\left(\alpha\right)^2 + e_n^* e_n f'\left(\alpha\right) f''\left(\alpha\right)\right]$$

$$e_{n+1} \approx \frac{f''\left(\alpha\right)}{f'\left(\alpha\right)} e_n^2 + \left[\frac{f''\left(\alpha\right) f'\left(\alpha\right)^2}{f'\left(\alpha\right)} e_n^2 + \frac{f''\left(\alpha\right) f'\left(\alpha\right) f''\left(\alpha\right)}{f'\left(\alpha\right)} e_n^2 e_n\right]$$

$$e_{n+1} \approx \frac{f''\left(\alpha\right)}{f\left(\alpha\right)} e_n^2 + f''\left(\alpha\right) f'\left(\alpha\right) e_n^2 + f''\left(\alpha\right)^2 e_n^3$$

$$e_{n+1} \approx \left[\frac{f''\left(\alpha\right)}{f\left(\alpha\right)} + f''\left(\alpha\right) f'\left(\alpha\right)\right] e_n^2 + f''\left(\alpha\right)^2 e_n^3$$

$$e_{n+1} \approx B e_n^2 + C e_n^3$$

Dengan demikian, konvergensi pada modifikasi Newton Raphson adalah $e_{n+1} \approx B e_n^2 + C e_n^3$, dengan $B = \left[\dfrac{f''\left(\alpha\right)}{f\left(\alpha\right)} + f''\left(\alpha\right) f'\left(\alpha\right)\right]$ dan $C = f''\left(\alpha\right)^2$. Secara umum, kita peroleh konvergensi Newton Raphson adalah $e_{n+1} \approx A e_n^2$ dan konvergensi untuk modifikasi Newton Raphson adalah $e_{n+1} \approx B e_n^2 + C e_n^3$.

3.3 Contoh Perhitungan Newton Raphson dan Modifikasi Newton Raphson

Pada bagian ini, kita akan mencari solusi persamaan nonlinear $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2$. Perhatikan bahwa $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$. Kita akan memberikan beberapa nilai awal a dan b. Kita menghentikan iterasi jika telah ditemukan x_n yang konstan.

Tabel 2. Perbandingan Perhitungan Newton Raphson (NR) dan Modifikasi Newton Raphson (MNR) untuk $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2$

f_i	x_0	Metode	n	x_n	$f(x_n)$	Galat ε
	2	MNR	2	2,190	0,000	0,002
		NR	3	2,190	0,000	0,002
	10	MNR	6	2,190	0,000	0,000
		NR	9	2,190	0,001	0,003
$f(x) = x^4 - 2x^3 - 2$	50	MNR	8	2,190	0,001	0,007
		NR	15	2,190	0,000	0,001
	100	MNR	10	2,190	0,000	0,000
		NR	18	2,190	0,000	0,000
	500	MNR	12	2,190	0,001	0,007
		NR	23	2,190	0,001	0,000

Keterangan:

f_i : persamaan nonlinear dengan $i = 1, 2, 3, \ldots$

x_0 : nilai awal

n : banyak iterasi

x_n : solusi atau akar dari fungsi

$f(x_n)$: fungsi dari solusi

ε : error $\varepsilon = \frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|}$

Berdasarkan Tabel 2., kita dapat menyimpulkan bahwa tingkat konvergensi Modifikasi Newton Raphson lebih baik. Selain itu, pada beberapa nilai awal galat yang dihasilkan oleh Modifikasi Newton Raphson semakin kecil.

Selanjutnya, kita menerapkan Modifikasi Newton Raphson untuk mencari akar dari suatu bilangan. Kita akan mencari nilai dari $\sqrt[3]{12}$. Kita perlu memisalkan menjadi $x = 12^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x^3 - 12$. Kita peroleh persamaan non-linear $f(x) = x^3 - 12$. Dengan demikian, $f'(x) = 3x^2$.

Tabel 3. Perbandingan Perhitungan Newton Raphson (NR) dan Modifikasi Newton Raphson (MNR) untuk $f(x) = x^3 - 12$

f_i	x_0	Metode	n	x_n	$f(x_n)$	Galat ε
	1	MNR	4	2,289	0,000	0,000
		NR	6	2,289	0,000	0,000
$\sqrt[3]{12}$	10	MNR	4	2,289	0,000	0,003
		NR	7	2,289	0,000	0,000
	100	MNR	7	2,289	0,000	0,001
		NR	12	2,289	0,000	0,003

Keterangan:

f_i : persamaan nonlinear dengan $i = 1, 2, 3, \ldots$

x_0 : nilai awal

n : banyak iterasi

x_n : solusi atau akar dari fungsi

$f(x_n)$: fungsi dari solusi

ε : error $\varepsilon = \dfrac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|}$

Berdasarkan Tabel 3, kita peroleh bahwa $\sqrt[3]{12} = 2,289428485$, dengan tingkat konvergensi yang lebih baik pada Modifikasi Newton Raphson.

4. Kesimpulan

Penelitian ini menghasilkan modifikasi pada Newton Raphson dengan memodifikasi garis singgung. Hasil penelitian menunjukkan bahwa diperoleh formula untuk Modifikasi Newton Raphson yaitu $x_n^* = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ dan $x_{n+1} = x_n^* + \dfrac{f(x_n^*) f'(x_n)}{f'(x_n^*) f'(x_n) + 1}$. Perhatikan bahwa untuk metode Newton Raphson asli selalu termuat pada iterasi modifikasi Newton Raphson. Untuk setiap iterasi ke-n diperoleh selisih kecepatan Modifikasi Newton Raphson sebesar $\Delta_{n+1} = \dfrac{f(x_{n+1}) f'(x_n)}{f'(x_{n+1}) f'(x_n) + 1}$. Lebih lanjut, kita peroleh bahwa konvergensi Newton Raphson adalah $e_{n+1} \approx Ae_n^2$ dan konvergensi untuk modifikasi Newton Raphson adalah $e_{n+1} \approx Be_n^2 + Ce_n^3$.

Referensi

[1] E. Sunandar and I. Indrianto, "Perbandingan Metode Newton-Raphson & Metode Secant Untuk Mencari Akar Persamaan Dalam Sistem Persamaan Non-Linier," *Petir*, vol. 13, no. 1, pp. 72–79, 2020, doi: https://doi.org/10.33322/petir.v13i1.893.

[2] P. Batarius, "Perbandingan Metode Newton-Raphson Modifikasi dan Metode Secant Modifikasi Dalam Penentuan Akar Persamaan," *Prosiding, Semin. Nas. Ris. Dan Teknol. Terap.*, vol. 8, no. Ritektra 8, pp. 53–63, 2018.

[3] J. Ritonga and D. Suryana, "Perbandingan Kecepatan Konvergensi Akar Persamaan Non Linier Metode Titik Tetap dengan Metode Newton Raphson Menggunakan Matlab," *Inf. (Jurnal Inform. dan Sist. Informasi)*, vol. 11, no. 2, pp. 51–64, 2019, doi: https://doi.org/10.37424/informasi.v11i2.17.

[4] H. Y. Salwa, *et al.*, "Perbandingan Metode Newton Midpoint Halley, Metode Olver dan Metode Chabysave Dalam Penyelesaian Akar-Akar Persamaan Non-Linear," *Indones. J. Eng.*, vol. 3, no. 1, pp. 1–15, 2022.

[5] W. Megarani, D. Aziz, A. Amanto, and L. Zakaria, "Algoritma Penyelesaian Persamaan Nonlinear Fuzzy dengan Metode Modifikasi Newton-Raphson," *Siger*, vol. 1, no. 2, pp. 63–69, 2020, doi: http://dx.doi.org/10.23960%2Fjsm.v1i2.2676.

[6] A. S. H. Ong, "PenerapanMetode Newton Raphson Untuk Pencarian Akar Pada Fungsi Kompleks," *J. Sci. Technol. Trop.*, vol. 5, no. 1, p. 3, 2009, doi: https://doi.org/10.15548/jostech.v3i1.5685.

[7] I. A. E. Rahayuni, K. Dharmawan, and L. P. I. Harini, "Perbandingan Keefisienan Metode

Newton-Raphson, Metode Secant, Dan Metode Bisection Dalam Mengestimasi Implied Volatilities Saham," *E-Jurnal Mat.*, vol. 5, no. 1, p. 1, 2016, doi: https://doi.org/10.24843/MTK.2016.v05.i01.p113.

[8] D. Ferrari *et al.*, "Menguji Keefisienan Metode Newton-Raphson, Metode Secant, dan Metode Bisection dalam Memprediksi Implied Volatilities Saham PT. Bank Central Asia Tbk," *J. Komput. dan Teknol. Inf.*, vol. 1, no. 1, pp. 1–7, 2023, doi: https://doi.org/10.26714/.v1i1.11287.

[9] A. Chauhan, "A Study of Modified Newton-Raphson Method," *J. Univ. Shanghai Sci. Technol.*, vol. 23, no. 8, pp. 129–134, 2021, doi: https://doi.org/10.51201/jusst/21/08359.

[10] J. Juhari, "On the Modification of Newton-Secant Method in Solving Nonlinear Equations for Multiple Zeros of Trigonometric Function," *CAUCHY J. Mat. Murni dan Apl.*, vol. 7, no. 1, pp. 84–96, Nov. 2021, doi: https://doi.org/10.18860/ca.v7i1.12934.

[11] T. J. McDougall and S. J. Wotherspoon, "A simple modification of Newton's method to achieve convergence of order $1+\sqrt{2}$," *Appl. Math. Lett.*, vol. 29, pp. 20–25, Mar. 2014, doi: https://doi.org/10.1016/j.aml.2013.10.008.

[12] D. Wang and Z. Zhang, "High-efficiency nonlinear dynamic analysis for joint interfaces with Newton–Raphson iteration process," *Nonlinear Dyn.*, vol. 100, no. 1, pp. 543–559, 2020, doi: https://doi.org/10.1007/s11071-020-05522-9.

[13] Wartono and R. Rasela, "Modifikasi Varian Metode Newton dengan Orde Konvergensi Tujuh," *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 2, no. 2, pp. 32–38, 2016, doi: http://dx.doi.org/10.24014/jsms.v2i2.3136.

[14] Nizam M Y, "Modifikasi Metode Newton-Steffensen Bebas Turunan," vol. 2, no. November, pp. 390–396, 2015.

[15] P. Batarius, "Nilai Awal Pada Metode Newton-Raphson Yang Dimodifikasi Dalam Penentuan Akar Persamaan," *Pi Math. Educ. J.*, vol. 1, no. 3, pp. 108–115, 2018, doi: https://doi.org/10.33322/petir.v13i1.893.