RESEARCH ARTICLE • OPEN ACCESS

Eksplorasi Masalah Isoperimetrik pada Bangun Ruang

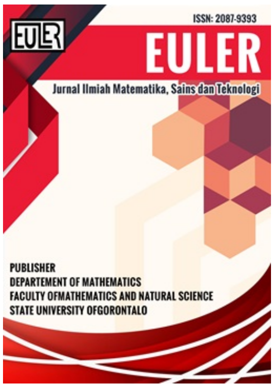
Amrizal Marwan Ali dan Denny Ivanal Hakim

Volume 12, Issue 1, Pages 16–25, June 2024

Diterima 13 April 2024, Direvisi 8 Mei 2024, Disetujui 12 Mei 2024, Diterbitkan 16 Mei 2024

To Cite this Article : A. M. Ali dan D. I. Hakim,"Eksplorasi Masalah Isoperimetrik pada Bangun Ruang", *Euler J. Ilm. Mat. Sains dan Teknol.*, vol. 12, no. 1, pp. 16–25, 2024, *https://doi.org/10.37905/euler.v12i1.24918*

JOURNAL INFO • EULER : JURNAL ILMIAH MATEMATIKA, SAINS DAN TEKNOLOGI



Homepage	:	http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/euler/index
Journal Abbreviation	:	Euler J. Ilm. Mat. Sains dan Teknol.
Frequency	:	Biannual (June and December)
Publication Language	:	English (preferable), Indonesia
DOI	:	https://doi.org/10.37905/euler
Online ISSN	:	2776-3706
Editor-in-Chief	:	Resmawan
Publisher	:	Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo
Country	:	Indonesia
OAI Address	:	http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/euler/oai
Google Scholar ID	:	QF_r-_gAAAAJ
Email	:	euler@ung.ac.id

Euler : Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi, Volume 12, Issue 1, Pages 16–25, June 2024 *https://doi.org/10.37905/euler.v12i1.24918*

Research Article

Eksplorasi Masalah Isoperimetrik pada Bangun Ruang

Amrizal Marwan Ali[1,*] **dan Denny Ivanal Hakim**[2]

[1]*Program Studi Magister Pengajaran Matematika, Institut Teknologi Bandung, Indonesia*
[2]*KK Analisis dan Geometri, Institut Teknologi Bandung, Indonesia*

ARTICLE HISTORY
Diterima 13 April 2024
Direvisi 8 Mei 2024
Disetujui 12 Mei 2024
Diterbitkan 16 Mei 2024

KATA KUNCI
Masalah Isoperimetrik
Bangun Ruang
Volume Maksimum
Luas Permukaan

KEYWORDS
Isoperimetric Problem
Three-dimensional Shapes
Maximum Volume
Surface Area

ABSTRAK. *Pada bangun datar, masalah isoperimetrik diartikan sebagai pencarian bentuk bangun datar yang akan menghasilkan luas terbesar di antara beberapa bangun datar yang kelilingnya sama. Dalam penelitian ini permasalahan isoperimetrik dapat diperluas menjadi pencarian bangun ruang dengan volume terbesar di antara bangun ruang yang memiliki luas permukaan yang sama. Penelitian ini bertujuan untuk memecahkan permasalahan isoperimetrik pada bangun ruang yang diperoleh dengan membandingkan volume berbagai bentuk bangun ruang. Pada penelitian ini, pembahasan dibatasi pada bangun ruang berbentuk prisma dengan alas segi-n beraturan, limas dengan alas segi-n beraturan, tabung, kerucut, dan bola. Metode penelitian ini menggunakan konsep kalkulus, trigonometri dan aljabar untuk membuktikan teorema isoperimetrik dengan pendekatan sederhana dan elementer. Hasil penelitian ini adalah urutan volume maksimum suatu bangun ruang jika luas permukaannya sama dari terkecil ke terbesar yakni limas dengan alas segitiga sama sisi, limas dengan alas persegi, prisma dengan alas segitiga sama sisi, limas dengan alas segi-n beraturan ($n \geq 5$), kerucut, prisma dengan alas persegi, prisma dengan alas segi-n beraturan ($n \geq 5$), tabung, dan bola.*

ABSTRACT. *In two-dimensional figure, the isoperimetric problem is defined as finding two-dimensional figures that will produce the largest area among several two-dimensional figures with the same perimeter. In this research, the isoperimetric problem is extended to find the shape with the largest volume among the shapes that have the same surface area. The aim of this research is to solve isoperimetric problems in three-dimensional shapes obtained by comparing various shapes of three-dimensional shapes. The discussion in this research is limited to three-dimensional shapes in the form of prisms with regular n-sided bases, pyramids with regular n-sided bases, cylinders, cones, and spheres. This research method uses concepts from calculus, trigonometry and algebra to prove the isoperimetric theorem with a simple and elementary approach. The result of this research is that the order of the maximum volume of three-dimensional shapes if the surface area is the same from smallest to largest is a pyramid with an equilateral triangular base, a pyramid with a square base, a prism with an equilateral triangular base, a pyramid with a regular n-sided base (n≥5), cone, prism with square base, prism with regular n-sided base (n≥5), cylinder, and sphere.*

1. Pendahuluan

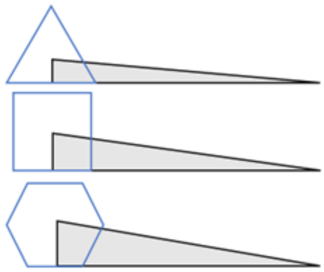
Kata isoperimetrik berasal dari iso dan perimetrik. Iso memiliki arti sama, dan perimetrik memiliki arti keliling. Masalah isoperimetrik bangun datar merupakan masalah berupa peninjauan beberapa bangun datar yang kelilingnya sama, kemudian mencari bangun datar yang mempunyai luas terbesar [1, 2]. Pappus dari Alexandria (290–350 M) membuktikan suatu teorema bahwa di antara bangun datar dengan keliling yang sama, luas lingkaran lebih besar dari luas poligon manapun [3]. Hal tersebut juga berkaitan dengan Teorema Isoperimetrik yang menyatakan bahwa "Lingkaran memiliki luas yang paling luas di antara semua bangun datar dengan keliling yang sama". Penyelesaian masalah isoperimetrik dari Teorema isoperimetrik tersebut menyatakan bahwa suatu lingkaran mempunyai luas terbesar dari semua bangun datar lain yang mempunyai keliling yang sama. Adapun kasus yang lebih khusus dari Teorema Isoperimetrik [1, 4]. Pertama, segitiga sama sisi mempunyai luas yang paling besar di antara semua segitiga yang kelilingnya sama. Kedua, poligon beraturan mempunyai luas yang terbesar di antara semua poligon dengan keliling yang sama [5]. Dalam bentuk sederhana kasus khusus masalah isoperimetrik pada bidang adalah penentuan segitiga dengan luas maksimum di antara semua segitiga yang kelilingnya tetap [6]. Beberapa teorema pada masalah isoperimetrik masih ada yang belum dibuktikan secara lebih rinci. Dengan demikian, perlu adanya bukti yang lebih rinci dan detail yang akan dibahas pada penelitian ini.

Berdasarkan pernyataan Pappus [7, 8] mengenai masalah isoperimetrik pada bangun datar, masalah tersebut dapat diamati dengan cara yang lebih mudah, seperti ditunjukkan pada Gambar 1. Jika K merupakan keliling dari segi-n dengan n merupakan jumlah sisi, dan t merupakan tinggi segitiga, maka $t = \dfrac{K}{2n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$. Oleh karena itu, semakin banyak jumlah sisi dari segi-n, maka semakin besar luas bangun tersebut dengan ke-

*Penulis Korespondensi.

Email : *amrizalmarwanali@gmail.com* (A. M. Ali)
Homepage : http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/euler/index / E-ISSN : 2776-3706

liling yang sama (alas segitiga). Artinya untuk bangun datar yang memiliki keliling yang sama, luas lingkaran lebih besar dari semua segi-n beraturan. Diperoleh ketaksamaan $K^2 \geq 2\pi A$ yang merupakan penyelesaian permasalahan isoperimetrik bangun datar, dimana K adalah keliling bangun datar dan A adalah luas bangun datar [7, 9]. Ketaksamaan ini menjadi kesamaan ketika bangun datar berbentuk lingkaran [10].



Gambar 1. Luas segi-n beraturan sebagai luas dari segitiga

Masalah isoperimetrik pada bangun datar kemudian diperluas menjadi masalah isoperimetrik pada bangun ruang. Kazarinoff menyebutkan masalah isoperimetrik pada bangun ruang dalam bukunya yang berjudul *Geometric Inequalities* [5]. Terdapat dua pernyataan yang ekuivalen, pertama, dari semua bangun ruang dengan luas permukaan yang sama, bola mempunyai volume terbesar. Kedua, dari semua bangun ruang dengan volume yang sama, bola mempunyai luas permukaan terkecil. Perhatikan salah satu pernyataan bahwa di antara semua bangun ruang dengan luas permukaan sama, bangun ruang bola memiliki volume yang terbesar. Hal tersebut memperkuat masalah isoperimetrik pada bangun ruang bahwa bola merupakan bangun ruang yang memiliki volume maksimum dari semua bangun ruang yang memiliki luas permukaan yang sama. Namun Kazarinoff tidak menjelaskan secara rinci terkait solusi masalah isoperimetik pada bangun ruang dan tidak ada bukti dari kedua pernyataan tersebut.

Pernyataan lain yang disebutkan oleh Kazarinoff mengenai isoperimetrik pada bangun ruang yaitu pada bangun ruang prisma. Pernyataan tersebut berbunyi "Dari semua prisma segi empat dengan volume yang sama, kubus mempunyai luas permukaan terkecil" [5]. Berbeda dengan dua pernyataan sebelumnya yang tidak ada buktinya, pernyataan tersebut dibuktikan Kazarinoff. Pembuktian yang dilakukan yaitu dengan mengubah sisi-sisi prisma segi sempat sebarang menjadi persegi dengan menjaga luas permukaannya tetap. Akibat dari pernyataan tersebut adalah dari semua bangun prisma dengan alas segi empat dengan luas permukaan yang sama, kubus mempunyai volume terbesar.

Pada referensi lain dibahas mengenai pengoptimalan sebuah prisma segi empat beraturan [11]. Beberapa pertanyaan yang diberikan dalam bangun tiga dimensi, diantaranya yaitu dari semua prisma segi empat dengan volume yang diberikan, yang mana memiliki luas permukaan terkecil? Atau, yang setara, dari semua prisma segi empat dengan luas permukaan yang diberikan, yang mana memiliki volume terbesar? Jawaban untuk kedua pertanyaan ini adalah sebuah kubus. Pada sumber lain juga dibahas bahwa dari sebuah prisma segi empat yang memiliki volume yang diberikan dan luas permukaan terkecil yang mungkin (untuk meminimalkan jumlah bahan yang dibutuhkan untuk memproduksi kotak tersebut). Diketahui bahwa solusi untuk masalah ini, atau "kotak optimal" adalah sebuah kubus [12]. Terdapat teorema yang dibuktikan, "dari semua prisma dimensi$-n$ dengan volume V dan kubus dengan dimensi$-(n-1)$ sebagai alasnya, kubus memiliki luas permukaan yang paling kecil yang mungkin. Dalam referensi lain dijelaskan masalah minimalisasi keliling yang sama dalam ruang tiga dimensi: mencari ubin n-hedral dengan volume satuan yang meminimalkan luas permukaan [13]. Poligon yang paling umum yang mengisi bidang adalah persegi, segitiga, dan segi enam beraturan. Misalkan kita memperkecil semua ubin poligon di alam semesta menjadi luas satuan. Maka ubin mana yang memiliki keliling terkecil? Sudah diketahui bahwa poligon optimal dengan empat sisi adalah persegi, dan segitiga optimal adalah segitiga sama sisi. Pada penelitian lain membahas mengenai pembuktian masalah isoperimetrik pada prisma tegak dan prisma miring dengan alas berbentuk persegi panjang, segitiga siku-siku, dan segi enam dengan cara penerapan ketaksamaan aljabar dan trigonometri yang paling elementer [14]. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa prisma tegak dengan alas berbentuk persegi panjang, segitiga siku-siku, dan segi enam akan memberikan volume yang lebih besar daripada prisma miring, jika luas permukaan keduanya sama.

Dari beberapa referensi yang telah disebutkan, belum ada yang membahas yang lebih detail masalah isoperimetrik pada bangun ruang. Selain itu, pembahasan masalah isoperimetrik masih terbatas pada bangun ruang tertentu, misalnya prisma dan kubus. Kemudian, belum ada yang membahas bangun-bangun ruang lain, misalnya limas dan bangun ruang sisi lengkung. Masalah isoperimetrik pada bangun ruang yang disebutkan oleh Kazarinoff merupakan salah satu masalah yang menarik untuk dibahas lebih detail. Masalah isoperimetrik pada bangun ruang yang disimpulkan bahwa bola merupakan bangun ruang yang memiliki volume maksimum dari semua bangun ruang yang memiliki luas permukaan yang sama, pernyataan inilah yang menjadi kajian yang menarik.

Pada penelitian ini, masalah isoperimetrik dapat diperluas dengan pertanyaan, di antara bangun ruang dengan luas permukaan yang sama, bangun ruang apa yang akan menghasilkan volume terbesar. Rumusan masalah pada penelitian ini adalah dari berbagai bentuk bangun ruang yang diketahui memiliki luas permukaan yang sama, bagaimana urutan bangun ruang dari volume terkecil hingga volume terbesar. Masalah isoperimetrik pada penelitian ini akan dibahas secara lebih rinci dan detail. Selain itu, bangun-bangun ruang yang lebih bervariasi akan dibahas seperti prisma, limas, tabung, dan kerucut. Tujuan penelitian ini adalah untuk memecahkan masalah Isoperimetrik pada bangun ruang yang diperoleh dengan membandingkan volume berbagai bentuk bangun ruang. Penelitian ini membatasi pembahasan pada bangun ruang berbentuk prisma dengan alas segi-n beraturan, tabung, limas dengan alas segi-n beraturan, kerucut, dan bola.

2. Metode

Metode pada penelitian ini menggunakan konsep kalkulus, trigonometri, dan aljabar untuk membuktikan teorema isoperimetrik dengan pendekatan yang sederhana dan elementer. Adapun langkah-langkah untuk memecahkan masalah isoperimetrik pada bangun ruang sebagai berikut:

1. Menentukan persamaan yang digunakan untuk menghitung luas permukaan dan volume dari bangun ruang yang akan

ditinjau,
2. Menyatakan volume bangun ruang sebagai fungsi dari besaran yang terlibat dalam persamaan luas permukaan,
3. Menggunakan turunan fungsi volume untuk menghitung ukuran optimum sehingga diperoleh nilai maksimum volume dari bangun ruang yang dipilih, dan
4. Menyimpulkan hasil dari pembuktian dengan menyatakan nilai maksimum volume dari bangun ruang dalam luas permukaan.

3. Hasil dan Pembahasan

Sebelum membahas tentang isoperimetrik pada bangun ruang, akan dibahas terlebih dahulu mengenai beberapa istilah bangun ruang yang merujuk pada [16]. *Solid* (benda padat) adalah bagian ruang yang terbatas yang dibatasi oleh permukaan. *Section* (penampang benda padat) adalah bangun datar yang dipotong dari benda padat tersebut dengan cara melewati bidang tersebut. Polihedron adalah benda padat yang dibatasi oleh bidang. Rusuk dari polihedron adalah perpotongan bidang pembatas. Sisi adalah bagian dari bidang pembatas yang terdapat di sisinya. Sisinya berbentuk poligon. Titik sudut adalah perpotongan dari rusuk-rusuknya.

Selanjutnya, dijelaskan mengenai beberapa pengertian dari bangun-bangun ruang yang juga merujuk pada [16]. Kubus (*Cube*) adalah polihedron yang semua enam sisinya merupakan persegi. Balok (*Rectangular Parallelepiped*) adalah polihedron yang semua ukuran sisinya merupakan persegi panjang. Prisma adalah polihedron yang dua permukaannya poligon pada bidang sejajar, dan permukaan lainnya adalah jajargenjang. Berikut sifat-sifat prisma: (1) alasnya adalah poligon yang kongruen. Lateral area (luas lateral/luas sisi samping) adalah jumlah dari luas sisi tanpa alas, (2) perpotongan sisi lateral disebut rusuk lateral. Rusuk lateral sama dan sejajar, (3) *section* (perpotongan) dari prisma yang dibuat oleh bidang-bidang sejajar yang memotong semua sisi lateralnya adalah poligon, (4) tinggi prisma adalah jarak tegak lurus antara bidang-bidang alasnya, (5) *right section* (bagian siku-siku) prisma adalah bagian yang tegak lurus ke sisi lateral, dan (6) prisma beraturan adalah prisma yang sisi-sisinya tegak lurus terhadap alasnya, sisi sampingnya berbentuk persegi panjang.

Prisma dibentuk dari dua segi-n yang kongruen dan terletak pada bidang sejajar sehingga sisi-sisi yang bersesuaian pada kedua segi-n tersebut sejajar, sedangkan titik-titik sudut yang bersesuaian pada kedua segi-n dihubungkan oleh sebuah garis lurus. Nama dari prisma didasarkan pada bentuk alasnya [17].

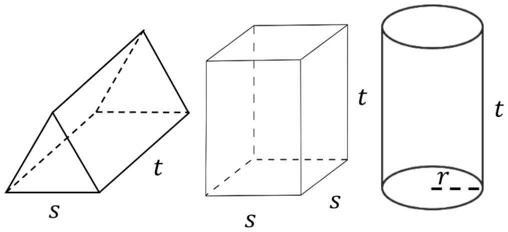
Silinder adalah benda padat yang dibatasi oleh permukaan silinder tertutup dan dua bidang sejajar. Silinder sirkular adalah silinder yang mempunyai bagian siku-siku berbentuk lingkaran. Silinder sirkular siku-siku (tabung) adalah silinder sirkular yang elemen-elemennya tegak lurus terhadap alasnya [16]. Tabung adalah bangun ruang yang dibatasi oleh dua sisi yang kongruen dan sejajar yang berbentuk lingkaran serta sebuah sisi lengkung [18].

Limas adalah polihedron yang salah satu sisinya, disebut alas, adalah poligon dengan sejumlah sisi dan sisi lainnya adalah segitiga yang mempunyai titik sudut yang sama. Limas beraturan adalah limas yang alasnya berbentuk poligon beraturan dan semua rusuk lateralnya kongruen [17]. Kerucut adalah benda padat yang dibatasi oleh suatu permukaan berbentuk kerucut (permukaan lateral) yang diretriksnya berupa kurva tertutup, dan suatu bidang (alas) yang memotong semua unsurnya. Kerucut sirkular siku-siku (kerucut) adalah kerucut sirkular (berbentuk lingkaran) yang sumbunya tegak lurus terhadap alasnya. Kerucut merupakan bangun ruang sisi lengkung yang menyerupai limas segi-n beraturan yang bidang alasnya berbentuk lingkaran. Oleh karena itu, kerucut ini sering kali disebut dengan limas Istimewa [18].

Masalah isoperimetrik pada bangun ruang yang akan ditinjau adalah prisma dengan alas segi-n beraturan, tabung, limas dengan alas segi-n beraturan, kerucut, dan bola.

3.1. Prisma dan Tabung

Pada subtopik yang pertama akan dikaji bentuk prisma dengan alas segitiga sama sisi, prisma dengan alas persegi, hingga prisma segi-n beraturan dan tabung. Berikut pada Gambar 2 merupakan ilustrasi prisma dengan alas segitiga sama sisi, prisma dengan alas persegi, dan tabung.



Gambar 2. Prisma dengan alas segitiga sama sisi, prisma dengan alas persegi, dan tabung

Teorema 1 membahas mengenai prisma dengan alas segitiga sama sisi dengan luas permukaan tertentu dan diperoleh volume terbesarnya.

Teorema 1. *Misalkan suatu prisma dengan alas segitiga sama sisi dengan panjang sisi s dan tinggi prisma t yang luas permukaannya adalah A. Volume terbesar prisma ini adalah $\frac{A}{6}\sqrt{\frac{2\sqrt{3}A}{27}}$ yang tercapai ketika $s = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}A}{9}}$ dan $t = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}A}{27}}$.*

Bukti. Luas permukaan prisma dapat dinyatakan sebagai

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\cdot s\cdot\frac{s\sqrt{3}}{2}\right) + (3st).$$

Dari persamaan tersebut, diperoleh

$$t = \frac{2A - \sqrt{3}s^2}{6s}.$$

Volume prisma dengan alas segitiga sama sisi adalah

$$V(s) = \left(\frac{1}{2}\cdot s\cdot\frac{s\sqrt{3}}{2}\right)\cdot t = \frac{\sqrt{3}As}{12} - \frac{s^3}{8}.$$

Menentukan nilai s agar volume maksimum, melalui turunan terhadap s, yaitu

$$V'(s) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}A}{12} - \frac{3s^2}{8} = 0$$

diperoleh

$$s=\sqrt{\frac{2\sqrt{3}A}{9}} \text{ dan } t=\sqrt{\frac{2\sqrt{3}A}{27}}.$$

Menggunakan uji turunan pertama, diperoleh

$$s=\sqrt{\frac{2\sqrt{3}A}{9}}$$

mengakibatkan volume maksimum. Jadi, volume maksimum prisma dengan alas segitiga sama sisi adalah

$$V=\left(\frac{1}{2}\cdot s\cdot\frac{s\sqrt{3}}{2}\right)\cdot t=\frac{A}{6}\sqrt{\frac{2\sqrt{3}A}{27}}.$$

□

Selanjutnya, Teorema 2 membahas mengenai prisma dengan alas persegi dengan luas permukaan tertentu dan diperoleh volume terbesarnya.

Teorema 2. *Misalkan suatu prisma dengan alas persegi dengan panjang sisi s dan tinggi prisma t yang luas permukaannya adalah A. Volume terbesar prisma ini adalah $\frac{A}{6}\sqrt{\frac{A}{6}}$ yang tercapai ketika $s=\sqrt{\frac{A}{6}}$ dan $t=\sqrt{\frac{A}{6}}$.*

Bukti. Luas permukaan prisma dapat dinyatakan sebagai

$$A=2(s^2)+(4st).$$

Dari persamaan tersebut, diperoleh

$$t=\frac{A-2s^2}{4s}.$$

Volume prisma dengan alas persegi,

$$V(s)=s^2t=\frac{As}{4}-\frac{s^3}{2}.$$

Menentukan nilai s agar volume maksimum, melalui turunan terhadap s,

$$V'(s)=0\Leftrightarrow\frac{A}{4}-\frac{3s^2}{2}=0.$$

Diperoleh

$$s=\sqrt{\frac{A}{6}} \text{ dan } t=\sqrt{\frac{A}{6}}.$$

Menggunakan uji turunan pertama, diperoleh $\sqrt{\frac{A}{6}}=\sqrt{\frac{2\sqrt{3}A}{9}}$ mengakibatkan volume maksimum. Jadi, volume maksimum prisma dengan alas persegi adalah

$$V=s^2t=\frac{A}{6}\sqrt{\frac{A}{6}}.$$

□

Selanjutnya, Teorema 3 membahas mengenai tabung dengan luas permukaan tertentu dan diperoleh volume terbesarnya.

Teorema 3. *Misalkan suatu tabung dengan panjang jari-jari r dan tinggi tabung t yang luas permukaannya adalah A. Volume terbesar tabung adalah $\frac{A}{6}\sqrt{\frac{2A}{3\pi}}$ yang akan tercapai ketika $r=\sqrt{\frac{A}{6\pi}}$ dan $t=\sqrt{\frac{2A}{3\pi}}$.*

Bukti. Luas permukaan tabung dapat dinyatakan sebagai

$$A=2\pi r^2+2\pi rt\Leftrightarrow A=2\pi r\left(r+t\right).$$

Dari persamaan tersebut, diperoleh

$$t=\frac{A}{2\pi r}-r.$$

Volume tabung,

$$V(r)=\pi r^2t=\frac{A}{2}r-\pi r^3.$$

Menentukan nilai r agar volume maksimum, melalui turunan terhadap r, yaitu

$$V'\left(r\right)=0\Leftrightarrow\frac{A}{2}-3\pi r^2=0$$

Diperoleh

$$r=\sqrt{\frac{A}{6\pi}} \text{ dan } t=\sqrt{\frac{2A}{3\pi}}$$

Menggunakan uji turunan pertama, diperoleh $r=\sqrt{\frac{A}{6\pi}}$ mengakibatkan volume maksimum. Jadi, volume maksimum tabung adalah $V=\pi r^2t=\frac{A}{6}\sqrt{\frac{2A}{3\pi}}$. □

Selanjutnya, Teorema 4 membahas mengenai prisma dengan alas segi-n beraturan dengan luas permukaan tertentu dan diperoleh volume terbesarnya. Pada bangun segi-n beraturan, diketahui bahwa s adalah sisi dari bangun segi-n dan r adalah jari-jari lingkaran yang memuat segi-n. Hubungan antara s dan r adalah $s=r\cdot 2\sin\frac{\pi}{n}$ [19].

Teorema 4. *Misalkan suatu prisma dengan alas segi-n beraturan dengan $n\geq 3$, panjang sisi s, r adalah jari-jari lingkaran yang memuat segi-n dan tinggi prisma t yang luas permukaannya adalah A. Volume terbesar prisma dengan alas segi-n beraturan adalah $\frac{A\sqrt{A}}{6\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2\cos\frac{\pi}{n}}{n\sin\frac{\pi}{n}}}$ yang akan tercapai ketika $r=\sqrt{\frac{A}{3n\sin\frac{2\pi}{n}}}$ dan $t=\sqrt{\frac{A\sin\frac{2\pi}{n}}{3n\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^2}}$.*

Bukti. Luas permukaan prisma dapat dinyatakan sebagai

$$A=2\left(\frac{n}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}\right)+\left(nst\right).$$

Subtitusi $s = r \cdot 2 \sin \dfrac{\pi}{n}$, diperoleh

$$A = 2\left(\frac{n}{2}r^2 \sin\frac{2\pi}{n}\right) + \left(n\left(r \cdot 2\sin\frac{\pi}{n}\right) \cdot t\right).$$

Misalkan

$$\sin\frac{2\pi}{n} = P \text{ dan } \sin\frac{\pi}{n} = Q.$$

Dari persamaan luas permukan tersebut, diperoleh

$$t = \frac{A - nr^2P}{2nrQ}.$$

Volume prisma dengan alas segi-n beraturan adalah

$$V(r) = \left(\frac{n}{2}r^2P\right).t = \frac{AP}{4Q}r - \frac{nP^2}{4Q}r^3.$$

Menentukan nilai r agar volume maksimum, melalui turunan terhadap r, yaitu

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{AP}{4Q} - \frac{3nP^2}{4Q}r^2 = 0.$$

diperoleh

$$r = \sqrt{\frac{A}{3nP}} = \sqrt{\frac{A}{3n \sin\frac{2\pi}{n}}},$$

$$t = \sqrt{\frac{AP}{3nQ^2}} = \sqrt{\frac{A \sin\frac{2\pi}{n}}{3n\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^2}}, \text{ dan}$$

$$s = 2r \cdot Q = \sqrt{\frac{4AQ^2}{3nP}} = \sqrt{\frac{4A\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^2}{3n \sin\frac{2\pi}{n}}}.$$

Menggunakan uji turunan pertama, diperoleh

$$r = \sqrt{\frac{A}{3n \sin\frac{2\pi}{n}}},$$

mengakibatkan volume maksimum. Jadi, volume maksimum prisma dengan alas segi-n beraturan adalah

$$V = \left(\frac{n}{2}r^2P\right) \cdot t = \frac{A\sqrt{A}}{6\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2 \cos\frac{\pi}{n}}{n \sin\frac{\pi}{n}}}.$$

□

Sebelum membahas hubungan antara bangun prisma dengan alas segi-n beraturan dan tabung, akan ditunjukkan terlebih dahulu Lemma 1 dan Lemma 2 yang akan berguna pada teorema berikutnya. Lemma tersebut membahas mengenai suatu fungsi monoton naik dan terbatas di atas.

Lemma 1. *Fungsi* $f(x) = \dfrac{\cos\frac{\pi}{x}}{x \sin\frac{\pi}{x}}$ *merupakan fungsi monoton naik untuk* $x \geq 3$.

Bukti. Misalkan

$$f(x) = \frac{\cos\frac{\pi}{x}}{x \sin\frac{\pi}{x}} = \frac{\cot\frac{\pi}{x}}{x} \text{ dengan } x \geq 3.$$

Akan ditunjukkan $f(x)$ monoton naik,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\pi.\csc^2\left(\frac{\pi}{x}\right) - x.\cot\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x^3} \\ &= \frac{\frac{\pi}{\sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} - \frac{x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}}{x^3} \\ &= \frac{\pi - \frac{x}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)}{x^3 \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}. \end{aligned}$$

Misalkan $t = \dfrac{1}{x}$. Dari $x \geq 3$, maka $0 < t \leq \frac{1}{3}$. Misalkan $y_1 = 2\pi t$ dan $y_2 = \sin(2\pi t)$. Untuk $0 < t \leq \dfrac{1}{3}$, maka berlaku $0 < y_2 < y_1$ atau $0 < \sin(2\pi t) < 2\pi t$. Selanjutnya, diperoleh

$$\frac{x}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{x}\right) = \frac{\sin(2\pi t)}{2t} < \frac{2\pi t}{2t} = \pi,$$

sehingga

$$f'(x) = \frac{\pi - \frac{x}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)}{x^3\sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} > \frac{\pi - \pi}{x^3 \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} = 0.$$

Jadi, $f'(x) > 0$, sehingga $f(x)$ monoton naik. Dengan demikian, $f(x)$ naik pada $[3, \infty)$. □

Lemma 2. *Fungsi* $f(x) = \dfrac{\cos\frac{\pi}{x}}{x \sin\frac{\pi}{x}}$ *merupakan fungsi terbatas di atas untuk* $x \geq 3$.

Bukti. Misalkan

$$f(x) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)} \text{ dengan } x \geq 3.$$

Akan ditunjukkan $f(x)$ terbatas di atas. Misalkan

$$x = \frac{\pi}{t} \text{ dan } t = \frac{\pi}{x}, \text{ dengan } x \geq 3, \text{ maka } 0 < t \leq \frac{\pi}{3}.$$

Misalkan $y_1 = t$ dan $y_2 = \tan t$. Untuk $0 < t \leq \dfrac{\pi}{3}$, maka berlaku $0 < y_1 < y_2$ atau $0 < t < \tan t$. Karena $0 < t < \tan t$, maka $0 < \dfrac{t}{\tan t} < 1$, sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)} &\Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{t}\right) = \frac{\cos t}{\frac{\pi}{t}\sin t} \\ &\Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{t}\right) = \frac{t \cos t}{\pi \sin t} \end{aligned}$$

Akibatnya, $f\left(\dfrac{\pi}{t}\right) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{t}{\tan t} < \dfrac{1}{\pi}1 = \dfrac{1}{\pi}$. Jadi, $f(x)$ terbatas di atas. □

Pernyataan pada Lemma 1 dan Lemma 2 mengakibatkan pernyataan "$\{a_n\}$ terbatas dan monoton naik, sehingga berlaku $\{a_n\}$ konvergen" [20]. Selanjutnya Teorema 5 dan Teorema 6 membahas hubungan antara bangun ruang prisma dengan alas segi-n dan tabung.

Teorema 5. *Misalkan bangun ruang prisma dengan alas segi-n beraturan dan tabung. Jika kedua bangun memiliki luas permukaan yang sama yaitu A, maka volume maksimum prisma dengan alas segi-n beraturan selalu lebih kecil dari volume maksimum tabung.*

Bukti. Volume maksimum prisma dengan alas segi-n beraturan adalah $V(n) = \frac{A\sqrt{A}}{6\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2\cos\frac{\pi}{n}}{n\sin\frac{\pi}{n}}}$ dan volume maksimum tabung adalah $V = \frac{A}{6}\sqrt{\frac{2A}{3\pi}}$. Akan ditunjukkan bahwa volume maksimum prisma dengan alas segi-n beraturan selalu lebih kecil dari volume maksimum tabung. Berdasarkan Lemma 2, diketahui bahwa fungsi $f(x) = \frac{\cos\frac{\pi}{x}}{x\sin\frac{\pi}{x}}$ terbatas di atas, maka $f(x) < \frac{1}{\pi}$. Akibatnya

$$V(n) = \frac{A\sqrt{A}}{6\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2\cos\frac{\pi}{n}}{n\sin\frac{\pi}{n}}} < \frac{A}{6}\sqrt{\frac{2A}{3\pi}} = V_{\text{maksimum tabung}}.$$

Dengan demikian, volume maksimum prisma dengan alas segi-n beraturan selalu lebih kecil dari volume maksimum tabung. □

Selanjutnya, Teorema 6 membahas mengenai kekonvergenan dari hubungan antara bangun ruang prisma dengan alas segi-n dan tabung.

Teorema 6. *Misalkan bangun ruang prisma dengan alas segi-n beraturan dan tabung. Jika kedua bangun memiliki luas permukaan yang sama yaitu A, maka volume maksimum prisma dengan alas segi-n beraturan akan konvergen ke volume maksimum tabung.*

Bukti. Volume maksimum prisma dengan alas segi-n beraturan adalah $V(n) = \frac{A\sqrt{A}}{6\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2\cos\frac{\pi}{n}}{n\sin\frac{\pi}{n}}}$ dan volume maksimum tabung adalah $V = \frac{A}{6}\sqrt{\frac{2A}{3\pi}}$. Akan ditunjukkan bahwa volume maksimum prisma dengan alas segi-n beraturan akan konvergen ke volume maksimum tabung. Berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 2, diketahui bahwa fungsi $f(x) = \frac{\cos\frac{\pi}{x}}{x\sin\frac{\pi}{x}}$ monoton naik dan terbatas di atas, maka $V(n)$ monoton naik dan terbatas di atas. Akibatnya $\{V(n)\}$ konvergen.

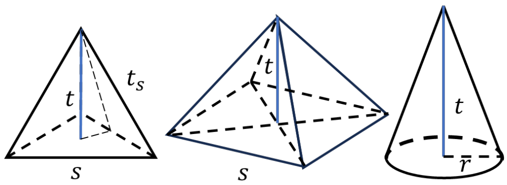
Misalkan $n = \frac{1}{y}$, maka $y = \frac{1}{n}$, dengan $\lim_{y\to 0^+}\frac{\sin y}{y} = 1$. Diperoleh

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} V(n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{A\sqrt{2A}}{6\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n\sin\frac{\pi}{n}}}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{A\sqrt{2A}}{6\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\cos\pi y}{\frac{\sin\pi y}{y}}}\\ &= \frac{A\sqrt{2A}}{6\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{\pi}}.\end{aligned}$$

Dengan demikian, volume maksimum prisma dengan alas segi-n beraturan akan konvergen ke volume maksimum tabung. □

3.2. Limas, Kerucut, dan Bola

Pada subtopik yang kedua dikaji bentuk limas dengan alas segitiga sama sisi, limas dengan alas persegi, hingga limas segi-n beraturan dan kerucut. Ilustrasi limas dengan alas segitiga sama sisi, limas dengan alas persegi, dan kerucut disajikan pada Gambar 3.



Gambar 3. Limas dengan alas segitiga sama sisi, Limas dengan alas persegi, dan kerucut

Teorema 7 membahas mengenai limas dengan alas segitiga sama sisi dengan luas permukaan tertentu dan diperoleh volume terbesarnya.

Teorema 7. *Misalkan suatu limas dengan alas segitiga sama sisi dengan panjang sisi s dan tinggi prisma t yang luas permukaannya adalah A. Volume terbesar limas ini adalah $\frac{A}{12}\sqrt{\frac{2A\sqrt{3}}{9}}$ yang tercapai ketika $s = \sqrt{\frac{A}{\sqrt{3}}}$ dan $t = \sqrt{\frac{2A\sqrt{3}}{9}}$.*

Bukti. Luas permukaan limas dapat dinyatakan sebagai

$$A = \left(\frac{1}{2}\cdot s\cdot\frac{s\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(\frac{s\cdot t_s}{2}\right).$$

Subtitusi $t_s = \sqrt{t^2 + \frac{1}{12}s^2}$, diperoleh

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 + \frac{3}{2}s\left(\sqrt{t^2+\frac{1}{12}s^2}\right).$$

Dari persamaan tersebut, diperoleh $t = \sqrt{\frac{4A^2 - 2\sqrt{3}As^2}{9s^2}}$. Volume limas dengan alas segitiga sama sisi adalah,

$$V(s) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot s\cdot\frac{s\sqrt{3}}{2}\right)t = \frac{\sqrt{3}}{36}\left(\sqrt{4A^2s^2 - 2\sqrt{3}As^4}\right).$$

Menentukan nilai s agar volume maksimum, melalui turunan terhadap s adalah

$$V'(s) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{72} \cdot \frac{(8A^2 s - 8\sqrt{3}As^3)}{\sqrt{4A^2s^2 - 2\sqrt{3}As^4}} = 0.$$

Diperoleh $s = \sqrt{\frac{A}{\sqrt{3}}}$ dan $t = \sqrt{\frac{2A\sqrt{3}}{9}}$. Menggunakan uji turunan pertama, diperoleh $s = \sqrt{\frac{A}{\sqrt{3}}}$ mengakibatkan volume maksimum. Jadi, volume maksimum limas dengan alas segitiga sama sisi adalah

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{s\sqrt{3}}{2}\right) t = \frac{A}{12}\sqrt{\frac{2A\sqrt{3}}{9}}.$$

□

Selanjutnya, Teorema 8 membahas mengenai limas dengan alas persegi dengan luas permukaan tertentu dan diperoleh volume terbesarnya.

Teorema 8. *Misalkan suatu limas dengan alas persegi dengan panjang sisi s dan tinggi prisma t yang luas permukaannya adalah A. Volume terbesar prisma ini adalah $\frac{A}{12}\sqrt{\frac{A}{2}}$ yang tercapai ketika $s = \sqrt{\frac{A}{4}}$ dan $t = \sqrt{\frac{A}{2}}$.*

Bukti. Luas permukaan limas dapat dinyatakan sebagai

$$A = s^2 + 4\left(\frac{s \times t_s}{2}\right).$$

Subtitusi $t_s = \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}s^2}$, diperoleh $A = s^2 + 2s\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}s^2}$. Dari persamaan tersebut, diperoleh $t = \sqrt{\frac{A^2 - 2As^2}{4s^2}}$. Volume limas dengan alas persegi adalah

$$V(s) = V = \frac{1}{3}s^2 t = \frac{1}{6}\left(\sqrt{A^2s^2 - 2As^4}\right).$$

Menentukan nilai s agar volume maksimum, melalui turunan terhadap s, diperoleh $V'(s) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{12} \cdot \frac{(2A^2 s - 8As^3)}{\sqrt{A^2s^2 - 2As^4}} = 0$. Selanjutnya, diperoleh $s = \sqrt{\frac{A}{4}}$ dan $t = \sqrt{\frac{A}{2}}$. Menggunakan uji turunan pertama, diperoleh $s = \sqrt{\frac{A}{4}}$, yang mengakibatkan volume maksimum. Jadi, volume maksimum limas dengan alas persegi adalah $V = \frac{1}{3}s^2 t = \frac{A}{12}\sqrt{\frac{A}{2}}$. □

Selanjutnya, Teorema 9 membahas mengenai kerucut dengan luas permukaan tertentu dan diperoleh volume terbesarnya.

Teorema 9. *Misalkan suatu kerucut dengan panjang jari-jari r dan tinggi kerucut t yang luas permukaannya adalah A. Volume terbesar kerucut adalah $\frac{A}{12}\sqrt{\frac{2A}{\pi}}$ yang akan tercapai ketika $r = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$ dan $t = \sqrt{\frac{2A}{\pi}}$.*

Bukti. Luas permukaan kerucut dapat dinyatakan sebagai $A = \pi r^2 + \pi rs$. Subtitusi $s = \sqrt{r^2 + t^2}$, diperoleh $A = \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + t^2}$. Dari persamaan tersebut, diperoleh

$$t = \sqrt{\frac{A^2 - 2A\pi r^2}{\pi^2 r^2}}.$$

Volume kerucut adalah

$$V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 t = \frac{1}{3}\left(\sqrt{A^2r^2 - 2A\pi r^4}\right).$$

Menentukan nilai r agar volume maksimum, melalui turunan terhadap r, yaitu

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \cdot \frac{(2A^2 r - 8A\pi r^3)}{\sqrt{A^2r^2 - 2A\pi r^4}} = 0.$$

Selanjutnya, diperoleh $r = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$ dan $t = \sqrt{\frac{2A}{\pi}}$. Menggunakan uji turunan pertama, diperoleh $r = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$ mengakibatkan volume maksimum. Jadi, volume maksimum kerucut adalah $V = \frac{1}{3}\pi r^2 t = \frac{A}{12}\sqrt{\frac{2A}{\pi}}$. □

Selanjutnya, Teorema 10 membahas mengenai limas dengan alas segi-n beraturan dengan luas permukaan tertentu dan diperoleh volume terbesarnya. Serupa dengan bangun prisma, pada limas juga akan dihitung bangun limas dengan alas segi-n beraturan. Pada bangun segi-n beraturan, diketahui bahwa s adalah sisi dari bangun segi-n dan r adalah jari-jari lingkaran yang memuat segi-n. Hubungan antara s dan r adalah $s = r \cdot 2 \sin \frac{\pi}{n}$ [19].

Teorema 10. *Misalkan suatu limas dengan alas segi-n beraturan dengan $n \geq 3$, panjang sisi s, r adalah jari-jari lingkaran yang memuat segi-n dan tinggi limas t yang luas permukaannya adalah A. Volume terbesar limas dengan alas segi-n beraturan adalah $\frac{A\sqrt{A}}{12}\sqrt{\frac{2\cos\frac{\pi}{n}}{n\sin\frac{\pi}{n}}}$ yang akan tercapai ketika $r = \sqrt{\frac{A}{2n\left(\sin\frac{2\pi}{n}\right)}}$ dan $t = \sqrt{\frac{A\left(\sin\frac{2\pi}{n}\right)}{n\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^2}}$.*

Bukti. Luas permukaan limas dapat dinyatakan sebagai

$$A = \frac{n}{2}r^2 \sin\frac{2\pi}{n} + n\left(\frac{s \cdot t_s}{2}\right).$$

Subtitusi $s = 2r \sin \dfrac{\pi}{n}$, diperoleh

$$A = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n} + n \left(\frac{2r \sin \frac{\pi}{n} \cdot t_s}{2} \right).$$

Misalkan

$$\begin{aligned} \sin \frac{2\pi}{n} &= P, \\ \sin \frac{\pi}{n} &= Q, \text{ dan} \\ \left(\cos \frac{\pi}{n}\right)^2 &= 1 - \left(\sin \frac{\pi}{n}\right)^2 = 1 - Q^2. \end{aligned}$$

Selanjutnya, misalkan t_s adalah tinggi sisi lateral, maka diperoleh $t_s = \sqrt{t^2 + r^2 - r^2Q^2}$, sehingga

$$A = \frac{n}{2} r^2 P + n \left(\frac{2rQ \times \sqrt{t^2 + r^2 - r^2Q^2}}{2} \right).$$

Dari persamaan tersebut, diperoleh

$$t = \sqrt{\frac{4A^2 - 4AnPr^2}{4n^2r^2Q^2}}.$$

Volume limas dengan alas segi-n beraturan adalah

$$V(r) = \frac{1}{3} \left(\frac{n}{2} r^2 P \right) t = \frac{P}{6Q} \left(\sqrt{A^2r^2 - AnPr^4} \right).$$

Menentukan nilai r agar volume maksimum, melalui turunan terhadap r, yaitu

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{P}{12Q} \cdot \frac{(2A^2r - 4AnPr^3)}{\sqrt{A^2r^2 - AnPr^3}} = 0.$$

Selanjutnya, diperoleh

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{A}{2nP}} = \sqrt{\frac{A}{2n\left(\sin \frac{2\pi}{n}\right)}} \\ t &= \sqrt{\frac{AP}{nQ^2}} = \sqrt{\frac{A\left(\sin \frac{2\pi}{n}\right)}{n\left(\sin \frac{\pi}{n}\right)^2}}, \text{ dan} \\ s &= r \cdot 2Q = \sqrt{\frac{2A\left(\sin \frac{\pi}{n}\right)^2}{n\left(\sin \frac{2\pi}{n}\right)}}. \end{aligned}$$

Menggunakan uji turunan pertama, diperoleh

$$r = \sqrt{\frac{A}{2n\left(\sin \frac{2\pi}{n}\right)}}$$

mengakibatkan volume maksimum. Jadi, volume maksimum limas dengan alas segi-n beraturan adalah

$$V = \frac{1}{3} \left(\frac{n}{2} r^2 P \right) t = \frac{A\sqrt{A}}{12} \sqrt{\frac{2 \cos \frac{\pi}{n}}{n \sin \frac{\pi}{n}}}.$$

□

Selanjutnya Teorema 11 dan Teorema 12 membahas hubungan antara bangun ruang limas dengan alas segi-n dan kerucut. Serupa dengan bangun ruang prisma dengan alas segi-n yang berhubungan dengan tabung, pada bangun ruang limas dengan alas segi-n beraturan juga berhubungan dengan kerucut.

Teorema 11. *Misalkan bangun ruang limas dengan alas segi-n beraturan dan kerucut. Jika kedua bangun memiliki luas permukaan yang sama yaitu A, maka volume maksimum limas dengan alas segi-n beraturan selalu lebih kecil dari volume maksimum kerucut.*

Bukti. Volume maksimum limas dengan alas segi-n beraturan adalah

$$V(n) = \frac{A\sqrt{A}}{12} \sqrt{\frac{2 \cos \frac{\pi}{n}}{n \sin \frac{\pi}{n}}},$$

dan volume maksimum kerucut adalah

$$V = \frac{A}{12} \sqrt{\frac{2A}{\pi}}.$$

Akan ditunjukkan bahwa volume maksimum limas dengan alas segi-n beraturan selalu lebih kecil dari volume maksimum kerucut. Berdasarkan Lemma 2, diketahui bahwa fungsi $f(x) = \dfrac{\cos \frac{\pi}{x}}{x \sin \frac{\pi}{x}}$ terbatas di atas, maka $f(x) < \dfrac{1}{\pi}$. Akibatnya

$$V(n) = \frac{A\sqrt{A}}{12} \sqrt{\frac{2 \cos \frac{\pi}{n}}{n \sin \frac{\pi}{n}}} < \frac{A}{12} \sqrt{\frac{2A}{\pi}} = V_{\text{maksimum kerucut}}.$$

Dengan demikian, volume maksimum limas dengan alas segi-n beraturan selalu lebih kecil dari volume maksimum kerucut. □

Selanjutnya, Teorema 12 membahas mengenai kekonvergenan dari hubungan antara bangun ruang limas dengan alas segi-n dan kerucut.

Teorema 12. *Misalkan bangun ruang limas dengan alas segi-n beraturan dan kerucut. Jika kedua bangun memiliki luas permukaan yang sama yaitu A, maka volume maksimum limas dengan alas segi-n beraturan akan konvergen ke volume maksimum kerucut.*

Bukti. Volume maksimum limas dengan alas segi-n beraturan adalah

$$V(n) = \frac{A\sqrt{A}}{12} \sqrt{\frac{2 \cos \frac{\pi}{n}}{n \sin \frac{\pi}{n}}},$$

dan volume maksimum kerucut adalah

$$V = \frac{A}{12} \sqrt{\frac{2A}{\pi}}.$$

Akan ditunjukkan bahwa volume maksimum limas dengan alas segi-n beraturan akan konvergen ke volume maksimum kerucut. Berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 2, diketahui bahwa fungsi $f(x) = \dfrac{\cos \frac{\pi}{x}}{x \sin \frac{\pi}{x}}$ monoton naik dan terbatas di atas, maka $V(n)$

monoton naik dan terbatas di atas. Akibatnya $\{V(n)\}$ konvergen. Misalkan $n = \frac{1}{y}$, maka $y = \frac{1}{n}$, dengan $\lim\limits_{y \to 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1$. Selanjutnya, diperoleh

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} V(n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{A\sqrt{2A}}{12}\sqrt{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n\sin\frac{\pi}{n}}} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{A\sqrt{2A}}{12}\sqrt{\frac{\cos \pi y}{\frac{\sin \pi y}{y}}} \\
&= \frac{A\sqrt{2A}}{12}\sqrt{\frac{1}{\pi}}.
\end{aligned}$$

Dengan demikian, volume maksimum limas dengan alas segi-n beraturan akan konvergen ke volume maksimum kerucut. $\square$

Selanjutnya, akan dilihat bangun ruang bola. Misalkan suatu bola dengan panjang jari-jari r yang luas permukaannya adalah A. Luas permukaan bola dapat dinyatakan sebagai $A = 4\pi r^2$, sehingga diperoleh $r = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$. Volume bola adalah $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{A\sqrt{A}}{6}\sqrt{\frac{1}{\pi}}$.

Dari seluruh bangun yang sudah dibahas di atas, diperoleh urutan bangun sebagai berikut. Misalkan bangun ruang bola, prisma dengan alas segi-n beraturan, tabung, limas dengan alas segi-n beraturan, kerucut. Jika bangun-bangun ruang tersebut memiliki luas permukaan yang sama, maka urutan volume maksimum bangun ruang dari yang terkecil ke yang terbesar tersebut adalah limas dengan alas segitiga sama sisi, limas dengan alas persegi, prisma dengan alas segitiga sama sisi, Limas dengan alas segi-n beraturan $(n \geq 5)$, kerucut, prisma dengan alas persegi, prisma dengan alas segi-n beraturan $(n \geq 5)$, tabung, dan bola.

Volume maksimum keluarga limas dan kerucut disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Volume maksimum keluarga limas dan kerucut

Bangun Ruang	Volume Maksimum	Taksiran Pengali $\frac{A\sqrt{A}}{6}$
Limas dengan Alas Segitiga Sama sisi	$V=\frac{A}{12}\sqrt{\frac{2\sqrt{3}A}{9}} = \frac{A\sqrt{A}}{6}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{18}}$	$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{18}} \approx 0,31020$
Limas dengan Alas Persegi	$V = \frac{A}{12}\sqrt{\frac{A}{2}} = \frac{A\sqrt{A}}{6}\sqrt{\frac{1}{8}}$	$\sqrt{\frac{1}{8}} \approx 0,35355$
Limas dengan Alas Segi Lima Beraturan	$V=\frac{A\sqrt{A}}{6} \cdot \sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})}}{10(5-\sqrt{5})}}$	$\sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})}}{10(5-\sqrt{5})}} \approx 0,37099$
Limas dengan Alas Segi Enam Beraturan	$V = \frac{A}{12}\sqrt{\frac{A\sqrt{3}}{3}} = \frac{A\sqrt{A}}{6}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{12}}$	$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{12}} \approx 0,37991$
Kerucut	$V=\frac{A\sqrt{A}}{6}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$	$\sqrt{\frac{1}{2\pi}} \approx 0,39894$

Pada Tabel 1 kolom ketiga taksiran pengali $\frac{A\sqrt{A}}{6}$ diperoleh dari $\frac{A}{6}$ luas permukaan dari volume maksimum prisma dan $\sqrt{A}$ adalah konstanta luas permukaan yang sama/tetap. Taksiran pengali $\frac{A\sqrt{A}}{6}$ dipilih agar volume maksimum dari bangun ruang dapat diamati dengan mudah untuk dibandingkan dengan bangun ruang lain. Jadi taksiran pengali $\frac{A\sqrt{A}}{6}$ dipilih sebagai pembanding.

Volume maksimum dari prisma, tabung, dan bola disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Volume maksimum prisma, tabung, dan bola

Bangun Ruang	Volume Maksimum	Taksiran Pengali $\frac{A\sqrt{A}}{6}$
Prisma dengan Alas Segitiga Sama Sisi	$V=\frac{A\sqrt{A}}{6}\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{27}}$	$\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{27}} \approx 0,35818$
Prisma dengan Alas Persegi	$V=\frac{A\sqrt{A}}{6}\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}} \approx 0,40824$
Prisma dengan Alas Segi Enam Beraturan	$V=\frac{A\sqrt{A}}{6}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{9}}$	$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{9}} \approx 0,43869$
Tabung	$V=\frac{A\sqrt{A}}{6}\sqrt{\frac{2}{3\pi}}$	$\sqrt{\frac{2}{3\pi}} \approx 0,46065$
Bola	$V=\frac{A\sqrt{A}}{6}\sqrt{\frac{1}{\pi}}$	$\sqrt{\frac{1}{\pi}} \approx 0,56418$

Terdapat temuan yang menarik bahwa jika semua bangun ruang memiliki luas permukaan yang sama, volume maksimum prisma dengan alas segitiga sama sisi kurang dari volume maksimum limas dengan alas segi lima beraturan. Kemudian volume maksimum limas dengan alas segi-n beraturan kurang dari volume maksimum dengan alas persegi, karena volume maksimum kerucut kurang dari volume maksimum dengan alas persegi.

Dengan demikian, diperoleh bahwa urutan volume maksimum bangun ruang jika luas permukaannya sama dari yang terkecil ke yang terbesar adalah limas dengan alas segitiga sama sisi, limas dengan alas persegi, prisma dengan alas segitiga sama sisi, limas dengan alas segi-n beraturan $(n \geq 5)$, kerucut, prisma dengan alas persegi, prisma dengan alas segi-n beraturan $(n \geq 5)$, tabung, dan bola.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah diuraikan, diperoleh beberapa kesimpulan. Pertama, di antara prisma dengan alas segi-n beraturan dan segi-m beraturan dengan luas permukaan kedua bangun sama, jika $m < n$, maka volume maksimum prisma dengan alas segi-m beraturan lebih kecil dari volume maksimum prisma dengan alas segi-n beraturan. Kedua, di antara limas dengan alas segi-n beraturan dan segi-m beraturan dengan luas permukaan kedua bangun sama, jika $m < n$, maka volume maksimum limas dengan alas segi-m beraturan lebih kecil dari volume maksimum limas dengan alas segi-n beraturan. Ketiga, di antara prisma dengan alas segi-n beraturan dan tabung, dengan luas permukaan kedua bangun sama, volume maksimum prisma segi-n beraturan selalu lebih kecil dari volume maksimum tabung dan volume maksimum prisma segi-n beraturan akan konvergen ke volume maksimum tabung. Keempat, di antara limas dengan alas segi-n beraturan dan kerucut, dengan luas permukaan kedua bangun sama, volume maksimum limas segi-n beraturan selalu lebih kecil dari volume maksimum kerucut dan volume maksimum limas segi-n beraturan akan konvergen ke volume maksimum kerucut. Kelima, urutan volume maksimum bangun ruang jika luas permukaan yang sama dari yang terkecil ke yang terbesar adalah limas dengan alas segitiga sama sisi, limas dengan alas persegi, prisma dengan alas segitiga sama sisi, limas dengan alas segi-n beraturan ($n \geq 5$), kerucut, prisma dengan alas persegi, prisma dengan alas segi-n beraturan ($n \geq 5$), tabung, dan bola.

Kontribusi Penulis. **Amrizal Marwan Ali:** Identifikasi masalah, metodologi, analisis, penulisan naskah pdan tinjauan penulisan. **Denny Ivanal Hakim:** Konseptualisasi, tinjauan penulisan, dan supervisi. Semua penulis telah membaca dan menyetujui versi manuskrip yang diterbitkan.

Ucapan Terima Kasih. Para penulis menyampaikan terima kasih kepada editor dan reviewer atas pembacaan yang cermat, kritik yang mendalam, dan rekomendasi yang praktis untuk meningkatkan kualitas tulisan ini.

Pembiayaan. Penelitian ini tidak menerima pembiayaan eksternal

Konflik Kepentingan. Para penulis menyatakan tidak ada konflik kepentingan yang terkait dengan artikel ini.

Referensi

[1] R. F. Demar, "A Simple Approach to Isoperimetric Problems in the Plane," *Mathematics Magazine*, vol. 48, no. 1, p. 1, Jan. 1975, doi: https://doi.org/10.2307/2689287.

[2] J. Tanton, "The Isoperimetric Problem," *Math Horizons*, vol. 10, no. 3, pp. 23–26, Feb. 2003, doi: https://doi.org/10.1080/10724117.2003.12023658.

[3] I. Bulmer-Thomas, *Selections illustrating the history of Greek mathematics*, vol. 2. Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1939. Accessed: Jan. 11, 2024. [Online]. Available: https://archive.org/details/selectionsillust02bulmuoft/page/n3/mode/2up

[4] V. Blåsjö, "The Isoperimetric Problem," *The American Mathematical Monthly*, vol. 112, no. 6, p. 526, Jun. 2005, doi: https://doi.org/10.2307/30037526.

[5] N. D. Kazarinoff, *Geometric inequalities*. Yale University, 1961.

[6] J. A. Rizcallah, "Isoperimetric Triangles," *The Mathematics Teacher*, vol. 111, no. 1, pp. 70–74, Sep. 2017, doi: https://doi.org/10.5951/mathteacher.111.1.0070.

[7] G. Polya and G. Szego¨, "Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics," 1951. [online] https://www.jstor.org/stable/j.ctt1b9rzzn.

[8] S. Demjanenko, "The Isoperimetric Inequality: A History of the Problem, Proofs and Applications," 2008.

[9] A. Sitaram, "The isoperimetric problem," *Resonance 1997 2:9*, vol. 2, no. 9, pp. 65–68, Sep. 1997, doi: https://doi.org/10.1007/BF02834583.

[10] I. Chavel, *Isoperimetric Inequalities: Differential Geometric and Analytic Perspectives*. New York: Cambridge University Press, 2001. Accessed: Jan. 12, 2024. [Online]. Available: https://shorturl.at/foDO4.

[11] M. Nogin, "It is not a Coincidence! On Curious Patterns in Calculus Optimization Problems," Mar. 2016, Accessed: May 01, 2024. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/1603.08542.

[12] M Nogin, "Optimizing Prisms of All Shapes and Dimensions," *The College Mathematics Journal*, vol. 48, no. 3, pp. 199–203, May 2017, doi: https://doi.org/10.4169/college.math.j.48.3.199.

[13] P. Gallagher, W. Ghang, D. Hu, Z. Martin, and M. Miller, "Surface-area-minimizing n-hedral Tiles," *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal*, vol. 15, no. 1, p. 13, 2014.

[14] A. Setiawan, D. I. Hakim, and O. Neswan, "Perluasan Masalah Isoperimetrik pada Bangun Ruang," *Jambura Journal of Mathematics*, vol. 5, no. 2, pp. 380–403, Aug. 2023, doi: https://doi.org/10.34312/jjom.V5I2.20534.

[15] D. E. Varberg, E. J. Purcell, and S. E. Rigdon, *Calculus*, 9th ed. New Jersey: Prentice Hall, 2006.

[16] W. F. , B. J. R. Kern, *Solid mensuration : with proofs*, Second. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1938.

[17] D. C. Alexander and G. M. Koeberlein, *Elementary geometry for college students*. Boston: Cengage Learning, 2019.

[18] J. H. Lumbantoruan, *Bangun Datar dan Bangun Ruang*. Purbalingga: Penerbit CV.Eureka Media Aksara, 2021.

[19] E. Grigorieva, *Methods of Solving Complex Geometry Problems*. Springer International Publishing, 2013. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-00705-2.

[20] W. C. Bauldry, *Introduction to Real Analysis: An Educational Approach*. John Wiley and Sons, 2011. doi: https://doi.org/10.1002/9781118164419.