

Dimensi Partisi Graf Hasil Amalgamasi Sisi Graf Roda dengan Graf Bintang

Ahmad Syukur Daming dan Yuliani



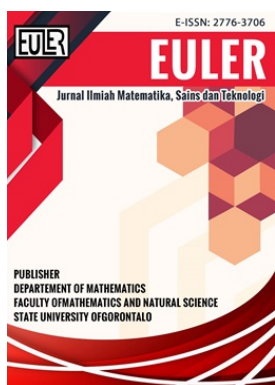
Volume 12, Issue 2, Pages 139–144, Dec 2024

Diterima 26 September 2024, Direvisi 1 November 2024, Disetujui 6 November 2024, Diterbitkan 1 Desember 2024

To Cite this Article : A. S. Daming dan Y. Yuliani, "Dimensi Partisi Graf Hasil Amalgamasi Sisi Graf Roda dengan Graf Bintang", *Euler J. Ilm. Mat. Sains dan Teknol.*, vol. 12, no. 2, pp. 139–144, 2024, <https://doi.org/10.37905/euler.v12i2.27683>

© 2024 by author(s)

JOURNAL INFO • EULER : JURNAL ILMIAH MATEMATIKA, SAINS DAN TEKNOLOGI

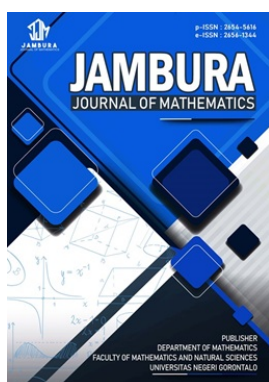


	Homepage	:	http://ejournal.ung.ac.id/index.php/euler/index
	Journal Abbreviation	:	Euler J. Ilm. Mat. Sains dan Teknol.
	Frequency	:	Biannual (June and December)
	Publication Language	:	English (preferable), Indonesia
	DOI	:	https://doi.org/10.37905/euler
	Online ISSN	:	2776-3706
	License	:	Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
	Publisher	:	Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo
	Country	:	Indonesia
	OAI Address	:	http://ejournal.ung.ac.id/index.php/euler/oai
	Google Scholar ID	:	QF_r-gAAAAJ
	Email	:	euler@ung.ac.id

JAMBURA JOURNAL • FIND OUR OTHER JOURNALS



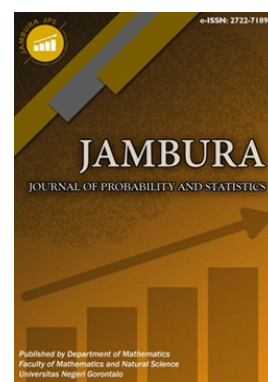
Jambura Journal of Biomathematics



Jambura Journal of Mathematics



Jambura Journal of Mathematics Education



Jambura Journal of Probability and Statistics

Dimensi Partisi Graf Hasil Amalgamasi Sisi Graf Roda dengan Graf Bintang

Ahmad Syukur Daming^{1,*} dan Yuliani¹

¹Program Studi Matematika, Universitas Cokroaminoto Palopo, Palopo, Indonesia

ARTICLE HISTORY

Diterima 26 September 2024
Direvisi 1 November 2024
Disetujui 6 November 2024
Diterbitkan 1 Desember 2024

KATA KUNCI

Graf
Dimensi Partisi
Amalgamasi Titik
Graf Roda
Graf Bintang

KEYWORDS

Graf
Partition Dimension
Vertex Amalgamation
Whell Graph
Star Graph

ABSTRAK. Penelitian ini membahas tentang analisis dimensi partisi dari graf hasil amalgamasi sisi antara graf roda W_n dan graf bintang S_m , di mana dimensi partisi merupakan parameter penting dalam teori graf yang berfungsi untuk mengukur jumlah minimum partisi yang dapat membedakan setiap pasangan simpul melalui himpunan titik pendukung. Proses amalgamasi dilakukan dengan menggabungkan satu sisi dari graf roda dan satu sisi dari graf bintang, sehingga membentuk graf baru. Penelitian ini menggunakan pendekatan teoritis dan algoritmik untuk menghitung dimensi partisi dari graf hasil amalgamasi tersebut, dengan fokus pada pengaruh jumlah simpul pada kedua graf penyusunnya terhadap perubahan dimensi partisi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa $pd(amal_s(W_n, S_m; v_1 v_2, u_0 u_1)) = 3$ jika $4 \leq n \leq 7$ dan $m = 3$, dan 4 jika $n = 3$ dan $3 \leq m \leq 4$, sedangkan jika $n \geq 8$ dan $3 \leq m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, maka diperoleh $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

ABSTRACT. This study discusses the analysis of the partition dimension of the graph resulting from the edge amalgamation between the wheel graph W_n and the star graph S_m , where the partition dimension is an important parameter in graph theory that serves to measure the minimum number of partitions required to distinguish every pair of vertices through a set of supporting vertices. The amalgamation process is carried out by merging one edge of the wheel graph with one edge of the star graph, thus forming a new graph. This research employs theoretical and algorithmic approaches to calculate the partition dimension of the resulting amalgamated graph, focusing on the influence of the number of vertices in both constituent graphs on the changes in the partition dimension. The results show that $pd(amal_s(W_n, S_m; v_1 v_2, u_0 u_1)) = 3$ when $4 \leq n \leq 7$ and $m = 3$, and 4 when $n = 3$ dan $3 \leq m \leq 4$, whereas if $n \geq 8$ and $3 \leq m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, then $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ is obtained.



This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License. *Editorial of EULER:* Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo, Jln. Prof. Dr. Ing. B. J. Habibie, Bone Bolango 96554, Indonesia.

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika diskret yang mempelajari hubungan antar objek yang dinyatakan melalui simpul (*vertex*) dan sisi (*edge*). Dalam representasi graf, objek-objek ini saling berhubungan secara struktural dan dapat dimodelkan untuk berbagai keperluan, seperti jaringan komputer, analisis hubungan sosial, hingga pemodelan sirkuit listrik. Secara formal, sebuah graf adalah pasangan himpunan terurut (V, E) , dan ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, dengan V adalah himpunan tidak kosong yang anggotanya disebut titik dan E adalah himpunan pasangan-pasangan tidak terurut dari anggota V yang disebut sisi [1]. Salah satu konsep yang menjadi fokus dalam teori graf adalah bagaimana kita dapat memisahkan dan menganalisis struktur graf melalui pembagian atau partisi simpul-simpulnya.

Dimensi partisi graf adalah salah satu konsep yang penting dalam analisis graf. Dimensi partisi pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk pada tahun 1998 [2]. Mereka mengelompokkan semua titik di G ke dalam sejumlah kelas partisi dan menentukan jarak setiap titik terhadap setiap kelas partisi tersebut. Misalkan terdapat sebuah graf terhubung G dengan $V(G)$

adalah himpunan titik-titiknya, $S \subseteq V(G)$ dan $v \in V(G)$. Jarak antara v dengan S yang dinotasikan $d(v, S)$ didefinisikan sebagai $d(v, S) = \min\{d(v, x) | x \in S\}$. Misalkan terdapat sebuah graf terhubung G dan k buah partisi $\Pi = S_1, S_2, \dots, S_k$ dari $V(G)$ dan $v \in V(G)$. Koordinat v terhadap Π didefinisikan sebagai $r(v | \Pi) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k))$. Jika untuk setiap dua titik berbeda $u, v \in V(G)$ berlaku $r(u | \Pi) \neq r(v | \Pi)$, maka Π disebut k -partisi pembeda dari $V(G)$. Nilai minimum k agar terdapat k -partisi pembeda dari $V(G)$ adalah dimensi partisi (partition dimension) dari G atau sering dinotasikan dengan $pd(G)$ [1].

Hingga saat ini teori graf sebagai bagian dari matematika diskrit telah mengalami perluasan materi, salah satu sifat penting dari graf adalah dimensi partisi [3]. Salah satu operasi pada graf yang sering digunakan adalah amalgamasi, baik pada titik maupun sisi [4, 5]. Operasi ini dapat digunakan untuk menghasilkan graf baru dengan sifat-sifat yang berbeda dari graf aslinya. Misalkan G_1 dan G_2 adalah dua graf terhubung. Amalgamasi titik dari graf G_1 dan graf G_2 dengan menggabungkan titik $u \in E(G_1)$ dan titik $v \in E(G_2)$, dinotasikan dengan $amal_t(G_1, G_2; u, v)$. Amalgamasi sisi dari graf G_1 dan graf G_2

*Penulis Korespondensi.

dengan menggabungkan sisi $v_1v_2 \in E(G_1)$ dan sisi $u_0u_1 \in E(G_2)$, dinotasikan dengan $amal_s(G_1, G_2; v_1v_2, u_0u_1)$ [2]. Dalam penelitian ini, kita akan berfokus pada amalgamasi sisi antara dua graf yang berbeda, yaitu graf roda dan graf bintang. Kedua graf ini memiliki struktur yang unik, di mana graf roda terdiri dari simpul pusat yang terhubung dengan simpul-simpul lainnya membentuk roda, sementara graf bintang memiliki simpul pusat yang menghubungkan seluruh simpul lainnya tanpa membentuk siklus.

Penelitian sebelumnya telah banyak membahas mengenai operasi amalgamasi pada berbagai jenis graf, baik dalam konteks aplikasi praktis maupun analisis teoritis. Penelitian tentang dimensi partisi graf telah dilakukan untuk beberapa jenis graf khusus seperti graf lengkap [6], graf siklus [7], graf lintasan [8], graf bintang [9], dan graf roda [10]. Selain itu terdapat juga penelitian dimensi partisi graf hasil dari operasi graf seperti comb [11], kartesian [12], dan amalgamasi [1]. Hanif [13] telah menemukan dimensi partisi dari graf lolipop dan graf jahangir diperumum. Liza [14] menemukan dimensi partisi dari graf persahabatan. Daming [1] telah meneliti tentang dimensi partisi graf hasil amalgamasi siklus berorde sama dan Hasmawati [15] telah meneliti dimensi partisi graf kincir angin belanda untuk siklus orde besar. Asmiati [16] telah meneliti tentang dimensi partisi graf amalgamasi bintang yang dihubungkan suatu lintasan. Faisal [11] menemukan dimensi partisi graf hasil operasi comb graf lingkaran dan graf lintasan. Khairiah, dkk. [17] menemukan dimensi partisi dari graf sisir. Haspika [18] menemukan dimensi partisi pada graf grid. Rumahorbo, dkk. [19] menemukan dimensi partisi pada graf payung. Anggriani [20] juga telah menentukan dimensi partisi pada graf sunlet dan amalgamasi graf sunlet. Namun, penelitian tersebut masih terbatas dan belum ada hasil penelitian yang menyajikan dimensi partisi hasil operasi amalgamasi sisi terhadap dua graf yang berbeda, seperti antara graf roda (W_n) dengan graf bintang (S_m).

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menganalisis dan menentukan dimensi partisi dari graf hasil amalgamasi sisi antara graf roda dan graf bintang. Berbeda dengan penelitian sebelumnya, dalam artikel secara khusus tidak hanya melihat satu graf atau operasi graf dengan dua graf yang sama terutama dimensi partisi seperti graf roda (W_n) dengan graf bintang (S_m) dengan menggunakan operasi amalgamasi sisi. Dengan melakukan penelitian ini, diharapkan dapat ditemukan pola atau sifat-sifat khusus dari graf hasil amalgamasi tersebut, serta kontribusi yang signifikan dalam pengembangan teori graf, khususnya dalam konteks dimensi partisi dan operasi amalgamasi.

2. Metode

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif, di mana prinsip-prinsip pembuktian deduktif dalam logika matematika diterapkan untuk menghasilkan dan membuktikan teorema baru. Langkah-langkah yang dilakukan meliputi konstruksi graf hasil amalgamasi sisi antara graf roda dan graf bintang, kemudian menghitung dimensi partisi graf hasil amalgamasi tersebut. Perhitungan dilakukan dengan menganalisis jarak antar simpul dan mempartisi simpul berdasarkan jarak uniknya. Hasil dari perhitungan ini dibandingkan dengan dimensi partisi graf roda dan graf bintang sebelum amalgamasi untuk mengidentifikasi perubahan struktural. Teorema terkait dimensi partisi pada graf hasil amalgamasi kemudian dirumuskan dan dibuktikan

secara deduktif.

Dalam penentuan dimensi partisi untuk graf hasil amalgamasi titik antara graf roda (W_n) dengan graf bintang (S_m) diperlukan beberapa sifat seperti yang disajikan pada lemma, dan proposisi berikut.

Lemma 1. *Diberikan G graf terhubung dengan partisi pembeda Π dari $V(G)$, untuk $u, v \in V(G)$, jika $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka u dan v merupakan elemen yang berbeda dari Π .*

Proposisi 1. [7] *Diberikan G graf terhubung dengan order $n \geq 2$, maka $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika $G = P_n$.*

Lemma 1 dan Proposisi 1 akan digunakan untuk pembuktian teorema terutama dalam menentukan batas bawah dari dimensi partisi graf $amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1)$.

3. Hasil dan Pembahasan

Graf yang dihasilkan dari amalgamasi sisi antara graf roda dan graf bintang disimbolkan dengan $amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1)$ adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan sisi $v_1v_2 \in V(W_n)$ dan titik-titik $u_0u_1 \in V(S_m)$ menjadi satu sisi ab , di mana ab adalah sisi umum dari graf W_n dan S_m .

Graf hasil amalgamasi sisi $amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1)$ adalah graf $G(V, E)$ dengan

$$V(amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1)) = \{a, b, v_0, v_i | 3 \leq i \leq n\} \cup \{u_j | 2 \leq j \leq m\},$$

sedangkan sisi $amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1)$ didefinisikan dengan

$$E(amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1)) = \{v_0a, v_0b, v_0v_i | 3 \leq i \leq n\} \cup \{ab, v_i v_{i+1}, av_n | 3 \leq i \leq n-1\} \cup \{au_j | 2 \leq j \leq m\},$$

Jumlah titik dan sisi masing-masing adalah $|amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1)| = n + m$ dan $|amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1)| = 2n + m - 1$.

3.1. Dimensi Partisi Graf $amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1)$ jika $4 \leq n \leq 7$ dan $m = 3$

Pada teorema berikut diberikan dimensi partisi graf $amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1)$ jika $4 \leq n \leq 7$ dan $m = 3$.

Teorema 1. *Jika $4 \leq n \leq 7$ dan $m = 3$ maka $pd(amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1)) = 3$.*

Bukti. Untuk batas atas $pd(amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1))$ untuk $4 \leq n \leq 7$ dan $m = 3$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π_1 pada graf $amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1)$. Misalkan ambil partisi pembeda $\Pi_1 = \{S_1, S_2, S_3\}$ sedemikian sehingga:

$$S_1 = \{a, b, v_0, u_2, v_i | i = 3, n \geq 5\},$$

$$S_2 = \{v_i | i = n - 1 \text{ atau } (i = 4, 5 \text{ jika } n \geq 6)\},$$

$$S_3 = \{v_i, u_3 | i = n \text{ atau } (i = 6, 7 \text{ jika } n = 7)\}.$$

Selanjutnya dilakukan representasi semua $V(amal_s(W_n, S_m; v_1 v_2, u_0 u_1))$ terhadap Π_1 sebagai berikut:

$$r(a|\Pi) = (0, 2, 1)$$

$$r(b|\Pi) = (0, 1, 2) \text{ untuk } n = 4 \text{ dan } (0, 2, 2,) \text{ untuk } n \geq 5$$

$$r(v_0|\Pi) = (0, 1, 1)$$

$$r(u_2|\Pi) = (0, 3, 2)$$

$$r(v_3|\Pi) = \begin{cases} (1, 0, 1) & \text{jika } n = 4 \\ (0, 1, 2) & \text{jika } n \geq 5 \end{cases}$$

$$r(v_4|\Pi) = \begin{cases} (1, 1, 0) & \text{jika } n = 4 \\ (1, 0, 1) & \text{jika } n = 5 \\ (1, 0, 2) & \text{jika } n \geq 6 \end{cases}$$

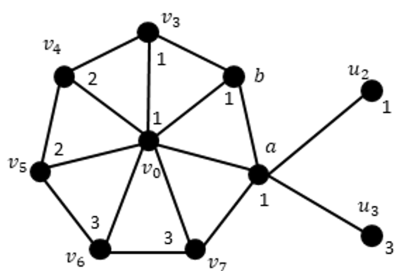
$$r(v_5|\Pi) = \begin{cases} (1, 1, 0) & \text{jika } n = 5 \\ (1, 0, 1) & \text{jika } n \geq 6 \end{cases}$$

$$r(v_6|\Pi) = \begin{cases} (1, 1, 0) & \text{jika } n = 6 \\ (1, 2, 0) & \text{jika } n = 7 \end{cases}$$

$$r(v_7|\Pi) = (1, 1, 0)$$

$$r(u_3|\Pi) = (1, 3, 0).$$

Terlihat dari hasil observasi bahwa $\forall V \in amal_s(W_n, S_m; v_1 v_2, u_0 u_1)$ memiliki representasi yang berbeda terhadap Π_1 sehingga Π_1 merupakan partisi pembeda dengan $|\Pi_1| = 3$. Jadi, $pd(amal_s(W_n, S_m; v_1 v_2, u_0 u_1)) \leq 3$. Untuk menentukan batas bawah, berdasarkan Proposisi 1 bahwa graf dengan $pd(G) = 2$ jika dan hanya $G = P_n$ sehingga dapat dipastikan bahwa $pd(amal_s(W_n, S_m; v_1 v_2, u_0 u_1)) \geq 3$. Jadi $pd(amal_s(W_n, S_m; v_1 v_2, u_0 u_1)) = 3$, jika $4 \leq n \leq 7$ dan $m = 3$. \square



Gambar 1. Graf $amal_s(W_7, S_3; v_1 v_2, u_0 u_1)$ dengan $|\Pi| = 3$

Gambar 1 menunjukkan graf hasil amalgamasi sisi antara graf roda W_7 dan graf bintang S_3 . Pada graf ini, terdapat sisi ab yang merupakan gabungan dari sisi $v_1 v_2 \in W_7$ dengan sisi $u_0 u_1 \in S_3$. Graf ini memiliki partisi pembeda Π dengan kardinalitas 3, yang menunjukkan bahwa terdapat tiga kelas dalam partisi yang dapat membedakan representasi setiap titik, sehingga dimensi partisi Graf $amal_s(W_7, S_3; v_1 v_2, u_0 u_1) = 3$.

Selanjutnya, diberikan teorema untuk menunjukkan dimensi partisi graf $amal_s(W_n, S_m; v_1 v_2, u_0 u_1)$ jika $n = 3$ dan $3 \leq m \leq 4$.

Teorema 2. Jika $n = 3$ dan $3 \leq m \leq 4$ maka $pd(amal_s(W_n, S_m; v_1 v_2, u_0 u_1)) = 4$.

Bukti. Untuk batas atas $pd(amal_s(W_n, S_m; v_1 v_2, u_0 u_1))$ untuk $n = 3$ dan $3 \leq m \leq 4$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π_2 pada graf $amal_s(W_n, S_m; v_1 v_2, u_0 u_1)$. Misalkan ambil partisi pembeda $\Pi_2 = \{S_1, S_2, S_3\}$ sedemikian sehingga

$$S_1 = \{a, v_0, u_2\},$$

$$S_2 = \{b, u_3\} \text{ untuk } m \geq 4, \text{ dan } S_2 = \{b\} \text{ untuk } m = 3,$$

$$S_3 = \{v_3, u_{m-1}\} \text{ untuk } m = 5,$$

$$S_3 = (v_3), \text{ untuk } m = 3 \text{ untuk } m = 4,$$

$$S_4 = \{u_m\}.$$

Selanjutnya diberikan representasi semua $V(amal_s(W_n, S_m; v_1 v_2, u_0 u_1))$ terhadap Π_2 sebagai berikut:

$$r(a|\Pi) = (0, 1, 1, 1),$$

$$r(v_0|\Pi) = (0, 1, 1, 2),$$

$$r(u_2|\Pi) = (0, 2, 2, 2),$$

$$r(b|\Pi) = (1, 0, 1, 2),$$

$$r(u_3|\Pi) = \begin{cases} (1, 2, 2, 0), & \text{jika } m = 3 \\ (1, 0, 2, 2), & \text{jika } m \geq 4, \end{cases}$$

$$r(v_3|\Pi) = (1, 1, 0, 2),$$

$$r(u_4|\Pi) = \begin{cases} (1, 2, 2, 0), & \text{jika } m = 4 \\ (1, 2, 0, 2), & \text{jika } m = 5, \end{cases}$$

$$r(u_5|\Pi) = (1, 2, 2, 0) \text{ untuk } m = 5.$$

Terlihat dari hasil observasi bahwa $\forall V \in amal_s(W_n, S_m; v_1 v_2, u_0 u_1)$, terdapat representasi yang berbeda terhadap Π_2 sehingga Π_2 merupakan partisi pembeda dengan $|\Pi_2| = 4$. Jadi, $pd(amal_s(W_n, S_m; v_1 v_2, u_0 u_1)) \leq 4$.

Selanjutnya, ditentukan batas bawah dari $pd(amal_s(W_n, S_m; v_1 v_2, u_0 u_1))$. Misalkan suatu partisi pembeda dari $amal_s(W_n, S_m; v_1 v_2, u_0 u_1)$ dengan $|\Pi_2| = 3$ maka terdapat sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Misalkan, ambil $\Pi_2 = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan

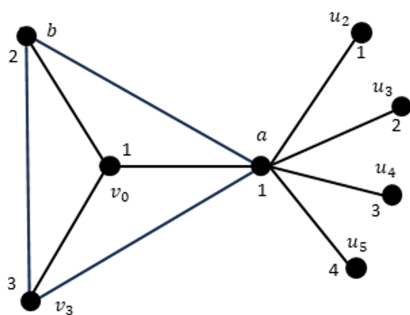
$$S_1 = \{a, v_0, u_2\},$$

$$S_2 = \{b, u_3\} \text{ untuk } m \geq 4, \text{ dan } S_2 = \{b\} \text{ untuk } m = 3,$$

$$S_3 = \{v_3, u_{m-1}, u_m\} \text{ untuk } m = 5, \text{ dan}$$

$$S_3 = \{v_3, u_m\} \text{ untuk } m = 3 \text{ dan } m = 4.$$

Dengan demikian, titik $a, v_0 \in S_1$ memiliki jarak yang sama terhadap kelas partisi S_2 dan S_3 yaitu $d(a, S_2) = d(v_0, S_2) = 1$ dan $d(a, S_3) = d(v_0, S_3) = 1$, sehingga terdapat sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama, yaitu $r(a | \Pi) = r(v_0 | \Pi) = (1, 1, 0)$ dikarenakan titik a dan v_0 berada dalam kelas partisi yang sama. Berdasarkan Lemma 1, titik a dan v_0 harus berada dalam kelas partisi yang berbeda. Jadi Π_2 dengan $|\Pi_2| = 3$ bukan merupakan partisi pembeda. Oleh karena itu, dapat dikatakan batas bawah $pd(amal_s(W_n, S_m; v_1 v_2, u_0 u_1)) \geq 4$, sehingga berdasarkan batas atas dan batas bawah diperoleh bahwa $pd(amal_s(W_n, S_m; v_1 v_2, u_0 u_1)) = 4$, jika $n = 3$ dan $3 \leq m \leq 4$. \square



Gambar 2. Graf $amal_s(W_3, S_5; v_1v_2, u_0u_1)$ dengan $|\Pi| = 4$

Gambar 2 menunjukkan $amal_s(W_3, S_5; v_1v_2, u_0u_1)$. Pada graf ini, terdapat sisi ab yang merupakan gabungan dari sisi $v_1v_2 \in W_3$ dengan sisi $u_0u_1 \in S_5$. Graf ini memiliki partisi pembeda Π dengan kardinalitas 4, yang menunjukkan bahwa terdapat empat kelas dalam partisi yang dapat membedakan representasi setiap titik. Sehingga dimensi partisi Graf $amal_s(W_3, S_5; v_1v_2, u_0u_1) = 4$.

3.2. Dimensi Partisi Graf $amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1)$ Jika $n \geq 8$ dan $3 \leq m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

Dimensi partisi graf $amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1)$ jika $n \geq 8$ dan $3 \leq m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ dinyatakan pada Teorema 3 berikut.

Teorema 3. Jika $n \geq 8$ dan $3 \leq m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ maka $pd(amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1)) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Bukti. Untuk batas atas $pd(amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1))$ untuk $n \geq 8$ dan $3 \leq m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π_3 pada graf $amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1)$. Misalkan ambil partisi pembeda $\Pi_3 = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\}$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \{a, b, v_0, v_3, u_2\}, \\
 S_2 &= \{v_4, v_5\}, \\
 S_3 &= \{v_6, v_7, u_3\}, \\
 &\vdots \\
 S_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} &= \{v_{2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)}, u_3\} \cup \{v_{2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1) + 1}\} \cup \{u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}\}, \\
 &\text{jika } n \geq 8 \text{ dan } 4 \leq m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \\
 S_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} &= \{v_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, u_3\} \cup \{v_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}\} \cup \{u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\}, \\
 &\text{jika } n \geq 8 \text{ dan } 4 \leq m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.
 \end{aligned}$$

Selanjutnya dilakukan representasi semua $V(amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1))$ terhadap Π_3 sebagai berikut:

$$r(a|\Pi_3) = \left(\underbrace{0, 2, \dots, 2}_m, 1 \right)$$

$$\begin{aligned}
 r(b|\Pi_3) &= \left(0, \underbrace{2, \dots, 2}_m, 2 \right) \\
 r(v_0|\Pi_3) &= \left(0, \underbrace{1, \dots, 1}_m, 1 \right) \\
 r(v_3|\Pi_3) &= \left(0, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_m \right) \\
 r(u_2|\Pi_3) &= \left(0, \underbrace{3, \dots, 3}_m, \underbrace{2, \dots, 2}_m, 2 \right) \\
 r(v_4|\Pi_3) &= \left(1, 0, \underbrace{2, \dots, 2}_m \right) \\
 r(v_5|\Pi_3) &= \left(1, 0, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_m \right) \\
 r(v_6|\Pi_3) &= \left(1, 1, 0, \underbrace{2, \dots, 2}_m \right) \\
 r(v_7|\Pi_3) &= \left(1, 2, 0, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_m \right) \\
 r(u_3|\Pi_3) &= \left(1, 3, 0, \underbrace{3, \dots, 3}_m, \underbrace{2, \dots, 2}_m, 2 \right) \\
 &\vdots \\
 r(u_m|\Pi_3) &= \left(1, \underbrace{3, \dots, 3}_m, 0, \underbrace{2, \dots, 2}_m \right) \\
 r(v_i|\Pi_3) &= \begin{cases} 1, \underbrace{2, \dots, 2}_m, 1_{i - \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor - 3}, 0, 2, \underbrace{2, \dots, 2}_m, \\ \text{jika } i \text{ bilangan genap} \\ 1, \underbrace{2, \dots, 2}_m, 2, 0, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_m, \\ \text{jika } i \text{ bilangan ganjil} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Terlihat dari hasil observasi bahwa $\forall V \in amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1)$ memiliki representasi yang berbeda terhadap Π_3 sehingga Π_3 merupakan partisi pembeda dengan $|\Pi_3| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Jadi, $pd(amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1)) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Selanjutnya, ditentukan batas bawah dari $pd(amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1))$. Misalkan suatu partisi pembeda dari $amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1)$ dengan $|\Pi_2| = 3$ maka terdapat sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Misalkan, ambil $\Pi_2 = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan

$$S_1 = \{a, b, v_0, v_3, u_2\}$$

$$S_2 = \{v_4, v_5, v_6, v_7, u_3\}$$

$$S_3 = \{v_8, v_9\} \cup \{u_4\} \text{ jika } m \geq 4,$$

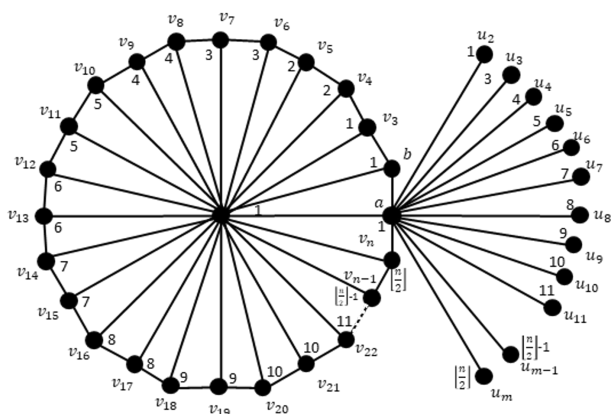
⋮

$$S_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} = \left\{ v_{2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)}, u_3 \right\} \cup \left\{ v_{2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1) + 1} \right\} \cup \left\{ u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \right\},$$

jika $n \geq 8$ dan $4 \leq m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Dengan demikian, titik $v_5, v_6 \in S_2$ memiliki jarak yang sama terhadap kelas partisi S_1 dan $S_3, \dots, S_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ yaitu $d(v_5, S_1) = d(v_6, S_1) = 1, d(v_5, S_3) = d(v_6, S_3) = 1$ dan $d(v_5, S_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}) = d(v_6, S_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}) = 2$, sehingga terdapat sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama, yaitu $r(v_5 | \Pi_3) = r(v_6 | \Pi_3) = (1, 0, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{\lfloor n/2 \rfloor - 3})$ dikarenakan titik v_5 dan v_6 berada dalam kelas partisi yang sama.

Berdasarkan Lemma 1, titik v_5 dan v_6 harus berada dalam kelas partisi yang berbeda. Jadi Π_3 dengan $|\Pi_3| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ bukan merupakan partisi pembeda. Oleh karena itu, dapat dikatakan batas bawah $pd(amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1)) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$, sehingga berdasarkan batas atas dan batas bawah diperoleh bahwa $pd(amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1)) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, jika $n \geq 8$ dan $3 \leq m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. □



Gambar 3. Graf $amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1)$ jika $n \geq 8$ dan $3 \leq m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ dengan $|\Pi| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

Pada Gambar 3, ditunjukkan $amal_s(W_3, S_5; v_1v_2, u_0u_1)$ jika $n \geq 8$ dan $3 \leq m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ dengan $|\Pi| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Pada graf ini, terdapat sisi ab yang merupakan gabungan dari sisi $v_1v_2 \in W_3$ dengan sisi $u_0u_1 \in S_5$. Graf ini memiliki partisi pembeda Π dengan kardinalitas $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, yang menunjukkan bahwa terdapat $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ kelas dalam partisi yang dapat membedakan representasi setiap titik.

4. Kesimpulan

Berdasarkan Teorema 1, Teorema 2 dan Teorema 3, dapat disimpulkan bahwa dimensi partisi graf hasil amalgamasi titik antara graf roda dengan graf bintang adalah $pd(amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1)) = 3$ jika $4 \leq n \leq 7$ dan $m = 3$, dan 4 jika $n = 3$ dan $3 \leq m \leq 4$, sedangkan jika $n \geq 8$ dan $3 \leq m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ maka diperoleh $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Kontribusi Penulis. Ahmad Syukur Daming: Konseptualisasi, metodologi, analisis, kurasi data, penulisan–tinjauan dan penyuntingan, serta perolehan dana. Yuliani: Konseptualisasi, metodologi, analisis, penulisan–persiapan draf asli, dan administrasi. Semua penulis telah membaca dan menyetujui versi manuskrip yang diterbitkan.

Ucapan Terima Kasih. Para penulis menyampaikan terima kasih kepada Universitas Cokroaminoto Palopo yang telah menyediakan fasilitas dan lingkungan akademik yang mendukung, sehingga penelitian ini dapat dilaksanakan dengan baik. Ucapan terima kasih juga kepada editor dan reviewer yang telah mendukung kami dalam meningkatkan kualitas naskah ini.

Pembiayaan. Penelitian ini didanai dari hibah Direktorat Riset dan Pengabdian Masyarakat (DRTMPM) Kementerian Riset, Teknologi, dan Pendidikan Tinggi (Kemristekdikti).

Konflik Kepentingan. Para penulis menyatakan tidak ada konflik kepentingan yang terkait dengan artikel ini.

Referensi

- [1] A. S. Daming, H. Hasmawati, L. Haryanto, dan B. Nurwahyu, “Dimensi Partisi Graf Hasil Amalgamasi Siklus,” *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*, vol. 16, no. 2, pp. 199–207, Jan. 2020, doi: 10.20956/jmsk.v16i2.8062.
- [2] G. Chartrand, E. Salehi, and P. Zhang, “The partition dimension of a graph,” *Aequationes Math*, vol. 59, no. 1, pp. 45–54, Feb 2000, doi: doi.org/10.1007/PL00000127.
- [3] M. R. Hamidi, “Penentuan Dimensi Partisi pada Graf Hasil Korona antara Graf Lengkap dengan Graf Roda,” Universitas Hasanuddin, Makassar, 2022.
- [4] Y. Kuswardi, L. Almira, N. Nurussakbana, and A.C. Pinilih, “Chromatic Number of Amalgamation of Wheel Graph-Star Graph and Amalgamation of Wheel Graph-Sikel Graph,” *Journal of Mathematics and Mathematics Education*, vol. 12, no. 2, pp. 132-146, Des. 2022, doi: 10.20961/jmme.v12i2.68111.
- [5] L. Maro, “Himpunan Dominasi Terkendali Graf Hasil Operasi Amalgamasi Titik Dan Sisi Pada Graf Siklus Berorde Sama,” *Kadikma*, vol. 14, no. 2, pp. 57-66, Okt 2023, doi: 10.19184/kdma.v14i2.37923.
- [6] F. Hartiansyah dan D. Darmaji, “Bilangan Kromatik Lokasi pada Graf Hasil Amalgamasi Sisi dari Graf Bintang dan Graf Lengkap,” *Zeta - Math Journal*, vol. 8, no. 2, pp. 66–70, Jul. 2023, doi: 10.31102/zeta.2023.8.2.66-70.
- [7] V. Ramdhani, “Dimensi Partisi Graf Lengkap,” *Sainstek: Jurnal Sains dan Teknologi*, vol. 11, no. 2, pp. 65-69, Des 2019, doi: 10.31958/js.v11i2.1610.
- [8] V. Ramdhani and F. Rahmi, “The Partition Dimension of a Path Graph,” *Sainstek: Jurnal Sains dan Teknologi*, vol. 13, no. 2, pp. 66-72, Des. 2021, doi: 10.31958/js.v13i2.4719.
- [9] J. A. Rodríguez-Velázquez, I. G. Yero, and M. Lemańska, “On the partition dimension of trees,” *Discrete Applied Mathematics*, vol. 166, pp. 204-209, Mar. 2014, doi: 10.1016/j.dam.2013.09.026.
- [10] I. Javid and S. Shokat, “On the partition dimension of some wheel related graphs,” *Journal of Prime Research in Mathematics*, vol. 4, pp.154-164, Jan. 2008, doi: 10.1007/978-3-642-27654-5_32.
- [11] F. Faisal, N. Mardiana, dan H. Rosiyanti, “Dimensi Partisi Graf Hasil Operasi Comb Graf Lingkaran Dan Graf Lintasan,” *Fibonacci: Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika*, vol. 5, no. 2, pp. 163–174, Des. 2019, doi: 10.24853/fbc.5.2.163-174.
- [12] I. G. Yero and J. A. Rodríguez-Velázquez, “A note on the partition dimension of Cartesian product graphs,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 217, no. 7, pp. 3571–3574, Des 2010, doi: 10.1016/j.amc.2010.08.038.
- [13] M. F. Hanif, D. Welyyanti, dan E. Efendi, “Dimensi Partisi Dari Graf Lolipop

- Dan Graf Jahangir Diperumum,” *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 7, No. 3, pp. 104–109, Feb. 2019, doi: [10.25077/jmu.7.3.104-109.2018](https://doi.org/10.25077/jmu.7.3.104-109.2018).
- [14] G. A. Liza, “Dimensi Partisi Dari Graf Persahabatan,” *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 7, No. 3, pp. 54–8, Feb 2019, doi: [10.25077/jmu.7.3.54-58.2018](https://doi.org/10.25077/jmu.7.3.54-58.2018).
- [15] H. Hasmawati, N. Hinding, B. Nurwahyu, A. S. Daming, and A. K. Amir, “The partition dimension of the vertex amalgamation of some cycles,” *Heliyon*, vol. 8, no. 6, Jun 2022, doi: [10.1016/j.heliyon.2022.e09596](https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2022.e09596).
- [16] A. Asmiati, “Dimensi Partisi Ngraf Amalgamasi Bintang Yang Dihubungkan Suatu Lintasan,” *Jurnal Matematika*, vol. 19, no. 3, pp. 93–95, Des 2016, doi: [10.24198/jmi.v13.n2.11891.115-121](https://doi.org/10.24198/jmi.v13.n2.11891.115-121).
- [17] A. Khairiah, E. Noviani, dan F. Fran, “Dimensi Partisi Pada Graf,” *Bimaster : Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*. vol. 9, no. 1, pp. 189–194, Jan. 2020, doi: [10.26418/bbimst.v9i1.38818](https://doi.org/10.26418/bbimst.v9i1.38818).
- [18] H. Haspika, “Dimensi Partisi pada Graf Grid,” Universitas Hasanuddin, Makassar, 2022.
- [19] Y. Rumahorbo, S. Suwilo, M. Mardiningsih, dan P. K. Nasution, “Dimensi Partisi pada Graf Payung,” *MES: Journal of Mathematics Education and Science*, vol. 9, no. 2, pp. 146–155, Jan. 2024, doi: [10.30743/mes.v9i2.8613](https://doi.org/10.30743/mes.v9i2.8613).
- [20] R. Anggriani, “Dimensi partisi pada graf sunlet dan amalgamasi graf sunlet,” Universitas Negeri Malang, 2023.