RESEARCH ARTICLE • OPEN ACCESS

Batas Perturbasi Mutlak Nilai Eigen dari Matriks Normal

Dewi Ika Ainurrofiqoh dkk.

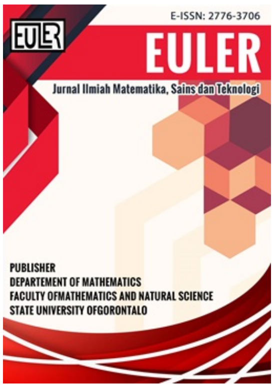
Volume 13, Issue 2, Pages 169–172, Aug. 2025

Diterima 30 Maret 2025, Direvisi 19 Juni 2025, Disetujui 26 Juni 2025, Diterbitkan 2 Juli 2025

To Cite this Article : D. I. Ainurrofiqoh dkk.,“Batas Perturbasi Mutlak Nilai Eigen dari Matriks Normal”, *Euler J. Ilm. Mat. Sains dan Teknol.*, vol. 13, no. 2, pp. 169–172, 2025, *https://doi.org/10.37905/euler.v13i2.31084*

© 2025 by author(s)

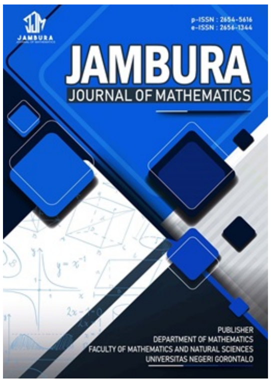
JOURNAL INFO • EULER : JURNAL ILMIAH MATEMATIKA, SAINS DAN TEKNOLOGI



Homepage	:	http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/euler/index
Journal Abbreviation	:	Euler J. Ilm. Mat. Sains dan Teknol.
Frequency	:	Three times a year
Publication Language	:	English (preferable), Indonesia
DOI	:	https://doi.org/10.37905/euler
Online ISSN	:	2776-3706
License	:	Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
Publisher	:	Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo
Country	:	Indonesia
OAI Address	:	http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/euler/oai
Google Scholar ID	:	QF_r-_gAAAAJ
Email	:	euler@ung.ac.id

JAMBURA JOURNAL • FIND OUR OTHER JOURNALS

Jambura Journal of Biomathematics



Jambura Journal of Mathematics

Jambura Journal of Mathematics Education

Jambura Journal of Probability and Statistics

Euler : Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi, Volume 13, Issue 2, Pages 169–172, Aug. 2025 *https://doi.org/10.37905/euler.v13i2.31084*

Research Article

Check for updates

Batas Perturbasi Mutlak Nilai Eigen dari Matriks Normal

Dewi Ika Ainurrofiqoh[1,*], Merysa Puspita Sari[1], Sailah Ar Rizka[1], Nadia Kholifia[1]

[1]*Jurusan Matematika, Universitas Jember, Jember 68121, Indonesia*

ARTICLE HISTORY
Diterima 30 Maret 2025
Direvisi 19 Juni 2025
Disetujui 26 Juni 2025
Diterbitkan 2 Juli 2025

KATA KUNCI
Nilai Eigen
Batas Perturbasi
Matriks Normal
Norma Frobenius
Galat Nilai Eigen

KEYWORDS
Eigenvalues
Perturbation Bounds
Normal Matrices
Frobenius Norm
Eigenvalue Error

ABSTRAK. *Masalah nilai eigen pada matriks merupakan topik yang penting dalam komputasi numerik, khususnya dalam analisis ketahanan nilai eigen terhadap gangguan atau perturbasi. Dalam studi ini, dibahas tentang batas perturbasi mutlak pada nilai eigen suatu matriks, dengan fokus pada matriks normal dan pertimbangannya terhadap keeratan terhadap matriks normal. Berdasarkan teorema-teorema yang ada, batas perturbasi mutlak disajikan dalam bentuk variasi yang melibatkan norma Frobenius dan kondisi-matriks dari matriks eigen. Penelitian ini membahas secara rinci hasil-hasil terkait batas perturbasi mutlak nilai eigen dan aplikasinya pada matriks normal. Pada akhirnya, sebuah hasil penting mengenai batas galat dari nilai eigen dalam kasus matriks normal yang terpengaruh oleh perturbasi diuraikan secara lengkap, serta membuktikan keterkaitan antara batas galat mutlak dan norma Frobenius dari pertubasi tersebut.*

ABSTRACT. *The eigenvalue problem in matrices is an important topic in numerical computation, particularly in analyzing the sensitivity of eigenvalues to disturbances or perturbations. This study discusses the absolute perturbation bounds on the eigenvalues of a matrix, focusing on normal matrices and their relationship to the condition of normal matrices. Based on existing theorems, the absolute perturbation bounds are presented in various forms involving the Frobenius norm and the condition number of the matrix eigenvectors. This research provides a detailed discussion of results concerning the absolute perturbation bounds on eigenvalues and their applications to normal matrices. Ultimately, an important result on the error bounds of eigenvalues in the case of normal matrices affected by perturbations is fully explained, proving the connection between the absolute error bound and the Frobenius norm of the perturbations.*

This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComercial 4.0 International License. Editorial of EULER: Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo, Jln. Prof. Dr. Ing. B. J. Habibie, Bone Bolango 96554, Indonesia.

1. Pendahuluan

Masalah nilai eigen merupakan salah satu masalah yang utama dalam matriks [1]. Batas perturbasi nilai eigen memerankan peran penting dalam komputasi nilai eigen matriks [2]. Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$ dan $\tilde{A} = A + E$ adalah matriks perturbasi dari A. Misalkan $spec(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ dan $spec(\tilde{A}) = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$. Kita ingin mengestimasi galat dari nilai eigen dari $\tilde{A}$ ketika dipandang sebagai aproksimasi terhadap nilai eigen A.

Perturbasi klasik menghasilkan batas galat mutlak pada nilai eigen [3]. Sebagai contoh, pada Teorema *Bauer-Fike*, batas perturbasi mutlak antara μ dan nilai eigen λ dari matriks A yang dapat didiagonalkan [4] yaitu

$$|\mu - \lambda| \leq \kappa(X) \parallel E \parallel,$$

dengan $\kappa(X) = \parallel X \parallel \parallel X^{-1} \parallel$ adalah bilangan kondisi dari X matriks vektor eigen dari A.

Misalkan $\| \cdot \|_F$ menyatakan norma Frobenius dan $\| \cdot \|_2$ menyatakan norma spektral. Untuk bilangan bulat positif n, misalkan $\langle n \rangle = 1, 2, \ldots, n$. Batas perturbasi mutlak secara klasik telah diperkenalkan oleh Hoffman-Wielandt [5]. Jika A dan $\tilde{A}$ matriks normal maka terdapat permutasi σ dari $\langle n \rangle$ sedemikian sehingga

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|\mu_{\sigma(i)} - \lambda_i\right|^2} \leq \|E\|_F. \tag{1}$$

Untuk kasus A normal dan $\tilde{A}$ sebarang matriks, Sun [6] telah membuktikan bahwa terdapat permutasi σ dari $\langle n \rangle$ sedemikian sehingga

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|\mu_{\sigma(i)} - \lambda_i\right|^2} \leq \sqrt{n}\|E\|_F. \tag{2}$$

Lebih jauh, secara umum, untuk dua buah matriks sembarang A dan $\tilde{A}$, Song [7] telah membuktikan bahwa

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|\mu_{\sigma(i)} - \lambda_i\right|^2} \leq \sqrt{n}\left(1 + \sqrt{n-p}\right) \max \left\|Q^{-1}EQ\right\|_F, \left\|Q^{-1}EQ\right\|_F^{1/m}, \tag{3}$$

dan

$$\left|\mu_{\sigma(i)} - \lambda_i\right| \leq \sqrt{n}\left(1 + \sqrt{n-p}\right) \max \left\|\sqrt{n}Q^{-1}EQ\right\|_2, \left\|\sqrt{n}Q^{-1}EQ\right\|_F^{1/m}, \tag{4}$$

*Penulis Korespondensi.

Email : *dewiika.fmipa@unej.ac.id* (D. I. Ainurrofiqoh)
Homepage : http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/euler/index / E-ISSN : 2776-3706
© 2025 by the Author(s).

dengan $Q^{-1}AQ = \text{diag}(J_1, \dots, J_p)$ adalah bentuk Jordan dari A dan m adalah ukuran blok Jordan terbesar dari A.

Selanjutnya, Li dan Sun [8] menyajikan batas mutlak perturbasi nilai eigen dari matriks normal dengan melibatkan keeratan terhadap matriks normal. Misalkan A matriks normal dan $\tilde{A} = A + E$. Asumsikan terdapat matriks uniter U sedemikian sehingga

$$U * \tilde{A}U \ = \ diag(\ \tilde{A}_1, \dots , \ \tilde{A}_s),$$

dengan $1 \ \leq \ s \ \leq \ n$ dan $\tilde{A}_i$ adalah matriks segitiga atas berukuran $n_i \times n_i, \ i = 1, \ 2, \dots , \ s$. Maka terdapat permutasi σ dari $\langle n \rangle$ sedemikian sehingga

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|\mu_{\sigma(i)} - \lambda_i\right|^2} \leq \sqrt{n-s+1} \|E\|_F. \tag{5}$$

Pers. (1), (2), (3), (4) dan (5) merupakan batas perturbasi mutlak untuk nilai eigen dari suatu matriks. Selain batas perturbasi mutlak, juga terdapat batas perturbasi relatif nilai eigen dari suatu matriks [9–11]. Eisenstat dan Ipsen [12] telah mempelajari batas perturbasi relatif dari nilai eigen suatu matriks yang dapat didiagonalkan. Selain itu, mereka juga mengemukakan bahwa beberapa batas perturbasi mutlak dapat menghasilkan batas perturbasi relatif. Dengan demikian, batas perturbasi relatif tidak lebih kuat daripada batas perturbasi mutlak [13]. Penelitian tentang batas perturbasi mutlak juga telah dilakukan oleh Yuji Nakasutkasa. Pada penelitian tersebut [14] diberikan hasil perturbasi mutlak yang didefinisikan dalam metrik Euclidean standar, dengan menurunkan teori perturbasi nilai eigen tipe *Weyl* untuk pensil definit Hermitian $A - \lambda B$, di mana B definit positif. Karena matriks Hermit merupakan matriks normal tetapi sebaliknya belum tentu berlaku, maka pada penelitian ini dibahas mengenai batas perturbasi mutlak pada matriks normal dengan memperumum hasil perturbasi mutlak pada matriks pensil definit Hermitian ke pensil definit normal.

2. Dasar Teori

Misalkan $A \in \mathbb{C}^{(n \times n)}$ dan $A\,[\alpha \mid \beta]$ menyatakan submatriks A yang indeks barisnya diambil dari α dan indeks kolomnya diambil β dengan $\alpha, \ \beta \subset \langle n \rangle$. Untuk alasan kesederhanaan, $A[\alpha|\alpha]$ dinyatakan sebagai $A[\alpha]$. Selanjutnya untuk sebarang matriks $A \in \mathbb{C}^{(n \times n)}$ dapat ditulis

$$A = A_D + A_L + A_U,$$

dengan A_D adalah bagian diagonal dari matriks A, A_L adalah bagian segitiga bawah dari matriks A dengan semua entri pada diagonal utamanya adalah 0, dan A_U adalah bagian segitiga atas dari matriks A dengan semua entri pada diagonal utamanya adalah 0. Selain itu, misalkan $A^{(i)}$ menyatakan baris ke-i dari matriks A.

Lemma 1 berikut menyajikan sebuah identitas pada elemen-elemen dari sebuah matriks normal.

Lemma 1. *[6] Misalkan $A \in \mathbb{C}^{(n \times n)}$ adalah matriks normal. Maka*

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=j+1}^{n} (l-j) \left|a_{jl}\right|^2 = \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{j=l+1}^{n} (j-l) \left|a_{jl}\right|^2.$$

Selanjutnya, beberapa sifat untuk matriks normal dinyatakan dalam Lemma 2 dan Lemma 3.

Lemma 2. *[8] Misalkan $A \in \mathbb{C}^{(n \times n)}$ adalah matriks normal dan $\alpha \subset \langle n \rangle$. Maka*

$$\|A\,[\alpha'|\alpha]\|_F = \|A\,[\alpha|\alpha']\|_F,$$

dengan $\alpha' = \langle n \rangle \backslash \alpha$.

Lemma 3. *[8] Misalkan $A \in \mathbb{C}^{(n \times n)}$ adalah matriks normal, maka untuk sebarang $i \in \langle n \rangle$,*

$$\left\|(A_U)^{(i)}\right\|_F \leq \|A_L\|_F \ \ dan \ \ \left\|(A_L)^{(i)}\right\|_F \leq \|A_U\|_F.$$

3. Hasil dan Pembahasan

Penelitian ini membuktikan bahwa batas perturbasi mutlak pada matriks normal dapat dicapai melalui pendekatan berbasis permutasi dan norma Frobenius. Selanjutnya, generalisasi batas perturbasi mutlak dari pensil *Hermitian* ke normal dengan memanfaatkan diagonalisasi uniter dan sifat spektral matriks normal menghasilkan batas yang bergantung linear pada norm perturbasi dan nilai eigen minimal.

Misalkan $\tilde{A} \in \mathbb{C}^{(n \times n)}$. Asumsikan terdapat matriks uniter U sedemikian sehingga

$$U^* \tilde{A} U = \text{diag}\left(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_S\right), \tag{6}$$

dengan $1 \leq s \leq n$, dan $\tilde{A}_i$ adalah matriks segitiga atas berukuran $n_i \times n_i, i = 1, \dots, s$. Secara khusus, jika $s = n$, maka $\tilde{A}$ adalah matriks normal.

Batas perturbasi mutlak pada matriks normal dapat dicapai melalui pendekatan berbasis permutasi dan norma Frobenius yang dinyatakan pada Teorema 1.

Teorema 1. *[8] Misalkan $A \in \mathbb{C}^{(n \times n)}$ adalah matriks normal dan $\tilde{A} = A + E$ memenuhi pers. (6). Maka terdapat permutasi σ dari $\langle n \rangle$ sedemikian sehingga*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|\mu_{\sigma(i)} - \lambda_i\right|^2} \leq \sqrt{n-s+1} \|E\|_F.$$

Bukti. Misalkan $\tilde{A} = A + E$. Misalkan terdapat matriks uniter U

sedemikian sehingga

$$U^*\tilde{A}U = \text{diag}\left(\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_S\right),$$

dengan $1 \leq s \leq n$, dan $\tilde{A}_i$ adalah matriks segitiga atas berukuran $n_i \times n_i, i = 1, \ldots, s$. Tanpa mengurangi keumuman bukti asumsikan bahwa

$$\tilde{A} = \text{diag}\left(\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_S\right) = \Lambda + M$$

dengan $M = \text{diag}(M_1, \ldots, M_s)$ adalah matriks segitiga atas dengan semua entri pada diagonal utama adalah 0, M_i adalah $\left(\tilde{A}_i\right)_U$, $i = 1, \ldots, s$ dan Λ adalah bagian diagonal dari $\tilde{A}$, $\Lambda = \tilde{A}_D$.

Misalkan $A = (A_{ij})_{s\times s}$ dan $E = (E_{ij})_{s\times s}$ adalah bentuk blok partisi yang bersesuaian dengan bentuk blok partisi dari $\tilde{A}$. Karena $\tilde{A} = A + E$ dan $\tilde{A} = \Lambda + M$ maka $\Lambda - A = E - M$ dan diperoleh $(E-M)_U = -A_U$, $(E-M)_L = E_L = A_L$, dan $(E-M)_D = E_D$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} E - M &= (E-M)_D + (E-M)_L + (E-M)_U, \\ &= E_D + E_L + (E-M)_U. \end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\|E-M\|_F^2 = \|E_D\|_F^2 + \|E_F\|_F^2 + \|(E-M)_U\|_F^2. \tag{7}$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \|(E-M)_U\|_F^2 &= \sum_{1\leq i<j\leq s} \|E_{ij}\|_F^2 + \sum_{i=1}^{s} \|(E_{ii})_U - M_i\|_F^2, \\ &\leq \|E_U\|_F^2 + \sum_{i=1}^{s} \|(A_{ii})_U\|_F^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Misalkan $(A_{ii})_U^{(j)}$ menyatakan baris ke-j dari $(A_{ii})_U$ dan misalkan

$$\left\|(A_{pp})_U^{(k)}\right\|_F = \max_{\substack{1<i\leq s \\ 1\leq i\leq n_i}} \left\|(A_U)_{ii}^{(j)}\right\|_F.$$

Maka $\|(A_{ii})_U\|_F^2 \leq (n_i - 1)\left\|(A_{pp})_U^{(k)}\right\|_F^2$.

Perhatikan bahwa $\sum_{i=1}^{s} n_i = n$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{s} \|(A_{ii})_U\|_F^2 &\leq \sum_{i=1}^{s} (n-1)\left\|(A_{pp})_U^{(k)}\right\|_F^2, \\ &= (n-s)\left\|(A_{pp})_U^{(k)}\right\|_F^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Berdasarkan pers. (8) dan pers. (9) diperoleh

$$\begin{aligned} \|(E-M)_U\|_F^2 &\leq \|E_U\|_F^2 + (n-s)\left\|(A_{pp})_U^{(k)}\right\|_F^2, \\ &\leq \|E_U\|_F^2 + (n-s)\left\|A_U^{(t)}\right\|_F^2. \end{aligned} \tag{10}$$

dengan $t = n_1 + \cdots + n_p + k$.

Berdasarkan Lemma 3, diperoleh

$$\left\|A_U^{(t)}\right\|_F^2 \leq \|A_L\|_F^2 = \|E_L\|_F^2.$$

Dengan demikian, dari pers. (10) diperoleh

$$\|(E-M)_U\|_F^2 \leq \|E_U\|_F^2 + (n-s)\|E_L\|_F^2. \tag{11}$$

Akibatnya, berdasarkan pers. (7) dan pers. (11) diperoleh

$$\begin{aligned} \|E-M\|_F^2 &= \|E_D\|_F^2 + \|E_L\|_F^2 + \|(E-M)_U\|_F^2 \\ &\leq \|E_D\|_F^2 + \|E_L\|_F^2 + \|E_U\|_F^2 + (n-s)\|E_L\|_F^2 \\ &\leq \|E\|_F^2 + (n-s)\|E_L\|_F^2 \\ &\leq \|E\|_F^2 + (n-s)\|E\|_F^2 \\ &= (n-s+1)\|E\|_F^2, \end{aligned}$$

sehingga,

$$\|E-M\|_F = \sqrt{n-s+1}\|E\|_F.$$

Karena $\Lambda - A = E - M$ maka $\|\Lambda - A\|_F = \|E-M\|_F$.

Karena A dan Λ matriks normal maka menurut Hoffman-Wielandt [5], terdapat permutasi σ dari $\langle n\rangle$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|\mu_{\sigma(i)} - \lambda_i\right|^2} &\leq \|\Lambda - A\|_F \\ &= \|E - M\|_F \\ &\leq \sqrt{n-s+1}\|E\|_F. \end{aligned}$$

□

Batas perturbasi mutlak pada matriks normal dalam konteks pensil definit normal (dengan definit positif dan normal) dapat diperumum dari kasus pensil definit Hermitian melalui pendekatan struktural dan analisis spektral.

Untuk pensil definit normal, transformasi Cholesky $B = LL^*$ mengubah masalah nilai eigen generalisasi menjadi masalah standar: $L^{-1}AL^{-*}y = \lambda y$ dengan $y = L^*x$. Karena A normal dan B definit positif, matriks $L^{-1}AL^{-*}$ tetap normal jika A dan B komutatif. Namun, dalam kasus umum, struktur normalitas dipertahankan melalui dekomposisi spektral simultan.

Generalisasi batas perturbasi mutlak dari pensil *Hermitian* ke normal dengan memanfaatkan diagonalisasi uniter dan sifat spektral matriks normal menghasilkan batas perturbasi yang bergantung linear pada norm perturbasi dan nilai eigen minimal B yang dinyatakan dalam Teorema 2.

Teorema 2. *Misalkan A dan B adalah matriks normal yang dapat didiagonalkan oleh matriks uniter U, sehingga*

$$U^*AU = \Lambda_A, U^*BU = \Lambda_B,$$

dengan $\Lambda_A = \text{diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ dan $\Lambda_B = \text{diag}(\beta_1, ..., \beta_n)$, serta $\beta_i \neq 0$ untuk semua i. Perhatikan pensil matriks $A - \lambda B$ dan pensil matriks terperturbasi $(A + \Delta A) - \lambda(B + \Delta B)$. Jika $\lambda_i = \frac{\beta_i}{\alpha_i}$ adalah nilai eigen dari pensil asli, maka untuk setiap i, *nilai eigen terperturbasi $\widetilde{\lambda}_i$ memenuhi*

$$|\widetilde{\lambda}_i - \lambda_i| \leq \frac{\|\Delta A\|_2 + |\lambda_i| \, \|\Delta B\|_2}{|\beta_i|}$$

dengan $||.||_2$ adalah norma spektral (norma 2).

Bukti. Karena A dan B dapat didiagonalkan oleh U (bisa dibuktikan jika A dan B normal dan komutatif [15]), maka

$$U^*AU = \Lambda_A, U^*BU = \Lambda_B,$$

sehingga, masalah nilai eigen generalisasi $Ax = \lambda Bx Ax = \lambda Bx$ ekuivalen dengan

$$\Lambda_A y = \lambda \Lambda_B y,$$

untuk $y = U^*x$, yang berarti untuk setiap i, $\alpha_i y_i = \lambda \beta_i y_i$, sehingga jika $y_i \neq 0$, diperoleh $\lambda_i = \frac{\beta_i}{\alpha_i}$. Untuk pensil terperturbasi:

$$(A + \Delta A)x = \widetilde{\lambda}(B + \Delta B)x,$$

atau dalam basis diagonal:

$$(\Lambda_A + U^*\Delta AU)y = \widetilde{\lambda}(\Lambda_B + U^*\Delta BU)y.$$

Misalkan $E_A = U^*\Delta AU$ dan $E_B = U^*\Delta BU$, maka

$$(\alpha_i + (E_A)_{ii})\, y_i = \widetilde{\lambda}\,(\beta_i + (E_B)_{ii})\, y_i.$$

Dengan demikian, jika $y_i \neq 0$:

$$\widetilde{\lambda}_i = \frac{\alpha_i + (E_A)_{ii}}{\beta_i + (E_B)_{ii}}.$$

Ekspansi *Taylor* orde pertama untuk $(\beta_i + (E_B)_{ii})^{-1}$ menghasilkan:

$$\widetilde{\lambda}_i \approx \frac{\alpha_i}{\beta_i} + \frac{(E_A)_{ii} - \lambda_i(E_B)_{ii}}{\beta_i},$$

sehingga:

$$\left|\widetilde{\lambda}_i - \lambda_i\right| \approx \frac{|(E_A)_{ii} - \lambda_i(E_B)_{ii}|}{|\beta_i|} \leq \frac{|(E_A)_{ii}| + |\lambda_i|\,|(E_B)_{ii}|}{|\beta_i|}.$$

Karena $|(E_A)_{ii}| \leq \|E_A\|_2 = \|\Delta A\|_2$, diperoleh $|(E_B)_{ii}| \leq \|E_B\|_2 = \|\Delta B\|_2$, diperoleh:

$$\left|\widetilde{\lambda}_i - \lambda_i\right| \leq \frac{\|\Delta A\|_2 + |\lambda_i|\,\|\Delta B\|_2}{|\beta_i|}.$$

□

4. Kesimpulan

Penelitian ini membahas batas perturbasi nilai eigen matriks normal dengan melibatkan keeratan terhadap matriks normal. Batas perturbasi mutlak nilai eigen diperkenalkan untuk matriks normal dan matriks perturbasi, yang dapat diestimasi dengan menggunakan norma Frobenius. Beberapa teorema terkait dengan batas galat nilai eigen telah dibuktikan, termasuk batas perturbasi mutlak yang melibatkan norma matriks yang relevan. Penelitian ini juga membuktikan bahwa batas perturbasi mutlak pada matriks normal dapat dicapai melalui pendekatan berbasis permutasi dan norma Frobenius, memberikan kontribusi penting dalam pemahaman kesalahan dalam perhitungan nilai eigen. Generalisasi batas perturbasi mutlak dari pensil *Hermitian* ke normal memanfaatkan diagonalisasi uniter dan sifat spektral matriks normal menghasilkan batas perturbasi yang bergantung linear pada norm perturbasi dan nilai eigen minimal.

Kontribusi Penulis. **Dewi Ika Ainurrofiqoh**: Konseptualisasi, metodologi, penulisan–persiapan draf asli, penulisan–tinjauan dan penyuntingan.**Merysa Puspita Sari**: Penulisan–persiapan draf asli, penulisan–tinjauan dan penyuntingan. **Sailah Ar Rizka**: Penulisan–persiapan draf asli, penulisan–tinjauan dan penyuntingan. **Nadia Kholifia:** Penulisan–persiapan draf asli, penulisan–tinjauan dan penyuntingan. Semua penulis telah membaca dan menyetujui versi manuskrip yang diterbitkan ini.

Ucapan Terima Kasih. Para penulis mengucapkan terima kasih kepada tim editor dan reviewer yang telah mendukung dalam meningkatkan kualitas naskah ini.

Pembiayaan. Penelitian ini tidak menerima pendanaan eksternal.

Konflik Kepentingan. Para penulis menyatakan tidak ada konflik kepentingan yang terkait dengan artikel ini.

Referensi

[1] B. Colbois, A. Girouard, C. Gordon, and D. Sher, "Some recent developments on the Steklov eigenvalue problem," *Rev. Matemática Complut.*, vol. 37, no. 1, pp. 1–161, Jan. 2024, doi: 10.1007/s13163-023-00480-3.

[2] Y. Chen, C. Cheng, and J. Fan, "Asymmetry helps: Eigenvalue and eigenvector analyses of asymmetrically perturbed low-rank matrices," *Ann. Stat.*, vol. 49, no. 1, p. 435, Feb. 2021, doi: 10.1214/20-AOS1963.

[3] P. J. Forrester, "Rank 1 perturbations in random matrix theory — A review of exact results," *Random Matrices Theory Appl.*, vol. 12, no. 04, p. 2330001, Oct. 2023, doi: 10.1142/S2010326323300012.

[4] F. Bünger and A. Seeger, "Perturbation properties of the generalized spectral radius," *Linear Multilinear Algebr.*, vol. 73, no. 4, pp. 633–648, 2025, doi: 10.1080/03081087.2024.2366951.

[5] A. J. Hoffman and H. W. Wielandt, "The Variation Of The Spectrum Of A Normal Matrix," in *Selected Papers of Alan J Hoffman*, World Scientific, 2003, pp. 118–120, doi: 10.1142/9789812796936_0011.

[6] J. Sun, "On the variation of the spectrum of a normal matrix," *Linear Algebra Appl.*, vol. 246, pp. 215–223, Oct. 1996, doi: 10.1016/0024-3795(94)00354-8.

[7] Y. Song, "A note on the variation of the spectrum of an arbitrary matrix," *Linear Algebra Appl.*, vol. 342, no. 1–3, pp. 41–46, Feb. 2002, doi: 10.1016/S0024-3795(01)00447-5.

[8] W. Li and W. Sun, "The perturbation bounds for eigenvalues of normal matrices," *Numer. Linear Algebr. with Appl.*, vol. 12, no. 2–3, pp. 89–94, Mar. 2005, doi: 10.1002/nla.400.

[9] R. C. Li, *Relative perturbation theory: (I) eigenvalue variations*. Computer Science Division (EECS), University of California, 1994.

[10] S. C. Eisenstat and I. C. F. Ipsen, "Relative perturbation results for eigenvalues and eigenvectors of diagonalisable matrices," *BIT Numer. Math.*, vol. 38, no. 3, pp. 502–509, Sep. 1998, doi: 10.1007/BF02510256.

[11] R.-C. Li, "Relative perturbation theory: I. Eigenvalue and singular value variations," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 19, no. 4, pp. 956–982, 1998.

[12] S. C. Eisenstat and I. C. F. Ipsen, "Three Absolute Perturbation Bounds for Matrix Eigenvalues Imply Relative Bounds," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 20, no. 1, pp. 149–158, Jan. 1998, doi: 10.1137/S0895479897323282.

[13] M. Dailey, F. M. Dopico, and Q. Ye, "Relative Perturbation Theory for Diagonally Dominant Matrices," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 35, no. 4, pp. 1303–1328, Jan. 2014, doi: 10.1137/130943613.

[14] Y. Nakatsukasa, "Absolute and relative Weyl theorems for generalized eigenvalue problems," *Linear Algebra Appl.*, vol. 432, no. 1, pp. 242–248, 2010, doi: 10.1016/j.laa.2009.08.001.

[15] P. G. Santos, *Diagonalization in Formal Mathematics*. in BestMasters. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2020, doi: 10.1007/978-3-658-29111-2.