RESEARCH ARTICLE • OPEN ACCESS

(σ,τ)-Derivasi pada Ring Grup

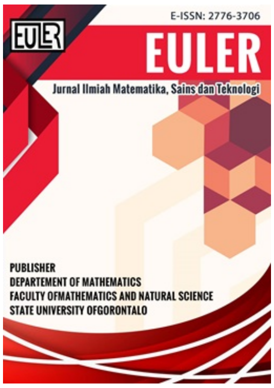
Ridho Waluyo, Ahmad Faisol, dan Fitriani

Volume 13, Issue 2, Pages 142–146, Aug. 2025

Diterima 9 April 2025, Direvisi 12 Juni 2025, Disetujui 26 Juni 2025, Diterbitkan 1 Juli 2025

To Cite this Article : R. Waluyo, A. Faisol, dan F. Fitriani,"(σ,τ)-Derivasi pada Ring Grup", *Euler J. Ilm. Mat. Sains dan Teknol.*, vol. 13, no. 2, pp. 142–146, 2025, *https://doi.org/10.37905/euler.v13i2.31564*

JOURNAL INFO • EULER : JURNAL ILMIAH MATEMATIKA, SAINS DAN TEKNOLOGI



Homepage	:	http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/euler/index
Journal Abbreviation	:	Euler J. Ilm. Mat. Sains dan Teknol.
Frequency	:	Three times a year
Publication Language	:	English (preferable), Indonesia
DOI	:	https://doi.org/10.37905/euler
Online ISSN	:	2776-3706
License	:	Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
Publisher	:	Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo
Country	:	Indonesia
OAI Address	:	http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/euler/oai
Google Scholar ID	:	QF_r-_gAAAAJ
Email	:	euler@ung.ac.id

Euler : Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi, Volume 13, Issue 2, Pages 142–146, Aug. 2025 https://doi.org/10.37905/euler.v13i2.31564

Research Article

Check for updates

(σ,τ)-Derivasi pada Ring Grup

Ridho Waluyo[1], **Ahmad Faisol**[1,*], **Fitriani**[1]

[1]*Jurusan Matematika, Universitas Lampung, Bandar Lampung, Indonesia*

ARTICLE HISTORY
Diterima 9 April 2025
Direvisi 12 Juni 2025
Disetujui 26 Juni 2025
Diterbitkan 1 Juli 2025

KATA KUNCI
Derivasi
Ring Grup
(σ,τ)-derivasi

KEYWORDS
Derivation
Group Rings
(σ,τ)-derivation

ABSTRAK. *Derivasi merupakan salah satu konsep penting dalam teori ring yang telah dikembangkan dalam berbagai arah, termasuk generalisasi menjadi (σ,τ)-derivasi dengan melibatkan endomorfisma σ dan τ. Meskipun banyak studi telah mengkaji (σ,τ)-derivasi pada ring-ring seperti ring prima, semiprima, dan komutatif, kajian eksplisit mengenai konstruksi derivasi semacam ini pada ring grup masih terbatas. Dalam artikel ini, dikonstruksikan beberapa contoh konkret (σ,τ)-derivasi pada ring grup dan ditelusuri sifat-sifat aljabarnya. Pendekatan ini memberikan ilustrasi sistematis terhadap karakterisasi derivasi pada struktur ring non-komutatif berbasis grup, serta memperkuat pemahaman tentang hubungan antara endomorfisma dan sifat derivatif dalam ring grup.*

ABSTRACT. *Derivations play a fundamental role in ring theory and have been extensively studied and generalized, including to (σ,τ)-derivations, which involve endomorphisms σ and τ. While many studies have focused on (σ,τ)-derivations in prime, semiprime, or commutative rings, explicit constructions and investigations of such derivations in group rings remain limited. This paper constructs several concrete examples of (σ,τ)-derivations on group rings and explores their algebraic properties. The approach provides systematic illustrations and characterizations of derivations in noncommutative ring structures based on groups, thereby contributing to the development of derivation theory in group ring contexts.*

1. Pendahuluan

Diberikan sebarang grup G dan ring R, serta suatu pemetaan $a{:}G{\to}R$, maka himpunan RG yang terdiri dari jumlah formal $\sum_{g\in G} a_g g$, dengan $a_g{\in}R$ dan $g{\in}G$, disebut sebagai ring grup [1]. Ring grup merupakan salah satu objek penting dalam aljabar abstrak yang telah banyak diteliti dan dikembangkan. Beberapa studi yang relevan antara lain dilakukan oleh Kusmus [2], yang meneliti elemen satuan idempoten pada ring grup komutatif; Osba dkk. [3] yang membahas struktur U-ring grup; serta Sabharwal dkk. [4] yang mengkaji tentang idempoten sentral dalam ring grup hingga dari grup simetris.

Selain ring grup, konsep lain yang juga mendapatkan perhatian luas dalam aljabar abstrak adalah *derivasi* pada ring. Diberikan ring R, suatu pemetaan aditif $\delta : R \to R$ disebut sebagai derivasi jika untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$. Jika terdapat endomorfisma σ dan τ pada R, maka δ disebut (σ,τ)-derivasi jika memenuhi $\delta(ab) = \delta(a)\tau(b) + \sigma(a)\delta(b)$ untuk setiap $a, b \in R$. Lebih lanjut, Jika terdapat elemen $x \in R$, maka (σ,τ)-derivasi $\delta_x : R \to R$ disebut (σ,τ)-*inner derivasi* jika $\delta_x(a) = x\tau(a) - \sigma(a)x$ untuk setiap $a \in R$ [5].

Berbagai penelitian sebelumnya telah mengkaji derivasi dan turunannya pada berbagai jenis ring. Tiwari dkk. [6] meneliti elemen identitas terkait derivasi tergeneralisasi pada ideal di ring prima, diikuti oleh studi Alahmadi dkk. [7] tentang karakterisasi derivasi tergeneralisasi pada ring prima. Tahun 2017 menjadi salah satu puncak aktivitas penelitian di bidang ini, ditandai dengan karya Tiwari dkk. [8] tentang derivasi perkalian tergeneralisasi pada ring semiprima, serta penelitian Tiwari [9] tentang derivasi tergeneralisasi dengan polinomial multilinear. Lee [10] mengkaji σ-derivasi Jordan, serta Davvaz dan Ardekani [11] meneliti derivasi Jordan tergeneralisasi dalam konteks ring dengan elemen yang diasosiasikan.

Pada tahun-tahun berikutnya, topik ini terus berkembang. Alharfie dan Muthana [12] meneliti komutatifitas ring prima dengan homoderivasi, Ardakani dkk. [13] mengkaji derivasi pada ring gamma prima dan semiprima, dan Boua serta Boua dan Sogutcu [14] mengeksplorasi homoderivasi tergeneralisasi pada ring semiprima. Secara khusus, studi mengenai (σ,τ)-derivasi juga telah banyak dilakukan. Garg dan Sharma [15] meneliti (σ,τ)-derivasi tergeneralisasi pada ring prima, diikuti oleh Reddy dkk. [16] serta Reddy dan Subbarayudu [17] yang masing-masing mengkaji sentralisasi dan sifat (σ,τ)-derivasi pada ring semiprima dan prima. Chauduri [5] meneliti (σ,τ)-derivasi pada ring grup, sementara Ibraheem [18], serta Guven [19], memperluas kajian ini ke arah komutatifitas dan derivasi satu sisi pada ring prima.

Walaupun telah banyak penelitian dilakukan mengenai (σ,τ)-derivasi, sebagian besar fokus penelitian sebelumnya adalah pada struktur ring secara umum seperti ring prima, semiprima, atau komutatif, serta kajian sifat-sifat algebra tertentu. Sementara itu, kajian khusus mengenai contoh konkret dan eksplisit dari (σ,τ)-derivasi pada *ring grup* masih terbatas, bahkan

*Penulis Korespondensi.

Email : *ahmadfaisol@fmipa.unila.ac.id* (A. Faisol)
Homepage : http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/euler/index / E-ISSN : 2776-3706

dalam penelitian Chauduri [5] pun belum dikaji secara mendalam konstruksi umum dan karakterisasi sifat-sifat derivasi tersebut. Oleh karena itu, makalah ini bertujuan untuk mengisi kekosongan tersebut dengan mengonstruksi beberapa contoh eksplisit (σ, τ)-derivasi pada ring grup serta mengkaji sifat-sifat aljabarnya secara sistematis, sebagai kontribusi terhadap pengembangan teori derivasi dalam struktur ring non-komutatif berbasis grup.

2. Metode

Penelitian ini bersifat teoritis dengan pendekatan deduktif berdasarkan konsep ring, grup, dan derivasi. Beberapa hasil dasar dari literatur digunakan sebagai landasan dalam membangun argumen dan pembuktian. Berikut disajikan beberapa sifat penting yang akan digunakan dalam analisis selanjutnya.

Lemma 1. *[20] Jika 1 merupakan elemen satuan di R, maka 1 merupakan elemen satuan di RG.*

Lemma 2. *[20] RG komutatif jika dan hanya jika R ring komutatif dan G grup komutatif.*

Lemma 3. *[20] Jika R merupakan ring komutatif, maka setiap elemen di R merupakan center di RG.*

Lemma 4. *[5] Jika R merupakan ring dengan elemen satuan dan $\delta : R \to R$ merupakan (σ, τ)-derivasi di R, maka $\delta(1) = 0$.*

Teorema 1. *[5] Diberikan ring R serta σ dan τ endomorfisma di R yang memetakan setiap center dari R ke dirinya sendiri, maka untuk suatu (σ, τ)-derivasi δ di R berlaku $\delta(x^n) = nx^{n-1}\delta(x)$ untuk setiap $x \in Z(R)$.*

Teorema 2. *[5] Diberikan lapangan R serta σ dan τ endomorfisma di RG yang memetakan setiap center dari RG ke dirinya sendiri, maka (σ, τ)-derivasi di RG merupakan (σ, τ)-inner derivasi di RG.*

3. Hasil dan Pembahasan

Selanjutnya, akan disajikan sebuah lemma yang menjelaskan kondisi agar suatu elemen di ring grup termasuk dalam *center* ring grup tersebut, berdasarkan sifat elemen-elemen penyusunnya di ring dan grup asal.

Proposisi 1. *Jika r_g merupakan center di R dan g merupakan center di G, maka $\sum_{g\in G} r_g g$ merupakan center di RG.*

Bukti. Diberikan $\alpha = \sum_{g\in G} r_g g \in RG$ dengan r_g merupakan *center* di R dan g merupakan *center* di G. Akan dibuktikan bahwa $\alpha = \sum_{g\in G} r_g g$ merupakan *center* di RG.
Diberikan sebarang $\beta = \sum_{h\in G} s_h h \in RG$, maka berlaku:

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \beta &= \sum_{g\in G} r_g g \cdot \sum_{h\in G} s_h h \\ &= \sum_{g,h\in G} r_g s_h\, gh \\ &= \sum_{g,h\in G} s_h\, r_g\, hg \\ &= \sum_{h\in G} s_h h \cdot \sum_{g\in G} r_g g \\ &= \beta \cdot \alpha.\end{aligned}$$

Terbukti bahwa α merupakan *center* di RG. □

Berikut disajikan sebuah lemma yang menyatakan bahwa kombinasi endomorfisma pada ring dan grup dapat membentuk endomorfisma pada ring grup. Hasil ini akan menjadi dasar dalam membangun bentuk umum dari (σ, τ)-derivasi pada ring grup.

Proposisi 2. *Jika φ merupakan endomorfisma pada ring R dan ω merupakan endomorfisma pada grup G, maka pemetaan $\theta : RG \to RG$ dengan $\theta\left(\sum_{g\in G} r_g g\right) = \sum_{g\in G} \varphi(r_g)\,\omega(g)$ untuk setiap $\sum_{g\in G} r_g g \in RG$ merupakan endomorfisma ring di RG.*

Bukti. Misalkan φ merupakan endomorfisma pada ring R dan ω endomorfisma pada grup G. Diberikan pemetaan $\theta : RG \to RG$ dengan $\theta\left(\sum_{g\in G} r_g g\right) = \sum_{g\in G} \varphi(r_g)\,\omega(g)$ untuk setiap $\sum_{g\in G} r_g g \in RG$.
Akan ditunjukkan bahwa θ merupakan endomorfisma di RG.

1. Diberikan sebarang $\alpha = \sum_{g\in G} r_g g,\ \beta = \sum_{g\in G} s_g g \in RG$, maka berlaku:

$$\begin{aligned}\theta(\alpha + \beta) &= \theta\left(\sum_{g\in G} r_g g + \sum_{g\in G} s_g g\right) \\ &= \theta\left(\sum_{g\in G} (r_g + s_g)\, g\right) \\ &= \sum_{g\in G} \varphi(r_g + s_g)\,\omega(g) \\ &= \sum_{g\in G} \left(\varphi(r_g) + \varphi(s_g)\right)\,\omega(g) \\ &= \sum_{g\in G} \varphi(r_g)\,\omega(g) + \sum_{g\in G} \varphi(s_g)\,\omega(g) \\ &= \theta\left(\sum_{g\in G} r_g g\right) + \theta\left(\sum_{g\in G} s_g g\right) \\ &= \theta(\alpha) + \theta(\beta).\end{aligned}$$

2. Diberikan sebarang $\alpha=\sum_{g\in G} r_g g,\ \beta=\sum_{h\in G} s_h h\in RG$, maka berlaku:

$$\begin{aligned}\theta\left(\alpha\cdot\beta\right)&=\theta\left(\sum_{g\in G} r_g g\cdot\sum_{h\in G} s_h h\right)\\&=\theta\left(\sum_{g,h\in G} r_g s_h\, gh\right)\\&=\sum_{g,h\in G}\left(\varphi\left(r_g s_h\right)\right)\left(\omega\left(gh\right)\right)\\&=\sum_{g,h\in G}\left(\varphi\left(r_g\right)\varphi\left(s_h\right)\right)\left(\omega\left(g\right)\omega\left(h\right)\right)\\&=\sum_{g\in G}\varphi\left(r_g\right)\omega\left(g\right)\cdot\sum_{h\in G}\varphi\left(s_h\right)\omega\left(h\right)\\&=\theta\left(\sum_{g\in G} r_g g\right)\cdot\theta\left(\sum_{h\in G} s_h h\right).\end{aligned}$$

Terbukti bahwa θ merupakan endomorfisma di RG. □

Setelah disajikan beberapa hasil pendukung, berikut diberikan satu contoh (σ,τ)-derivasi pada ring grup $\mathbb{Z}(F)$, yaitu ring grup dari himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan grup bebas F. Contoh ini bertujuan untuk menunjukkan secara eksplisit bagaimana konstruksi (σ,τ)-derivasi dapat diterapkan dalam konteks ring grup tertentu.

Contoh 1. Diberikan grup $(F,+)$ yang merupakan himpunan semua fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$. Diberikan ring bilangan bulat $(\mathbb{Z},+,\cdot)$. Dibentuk ring grup $\mathbb{Z}(F)$ dengan $\mathbb{Z}(F)=\left\{\sum_{f\in F} r_f f \,\middle|\, r_f\in\mathbb{Z},\ f\in F\right\}$. Selanjutnya, didefinisikan endomorfisma $\widehat{\sigma}$ dan $\widehat{\tau}$ pada ring $\mathbb{Z}$ dengan $\widehat{\sigma}(z)=\widehat{\tau}(z)=z$, untuk setiap $z\in\mathbb{Z}$. Di sisi lain, didefinisikan endomorfisma $\widetilde{\sigma}$ dan $\widetilde{\tau}$ pada grup F dengan $\widetilde{\sigma}(f)=2f$ dan $\widetilde{\tau}(f)=-f$, untuk setiap $f\in F$.

Kemudian, didefinisikan pemetaan σ dan τ pada ring grup $\mathbb{Z}(F)$ dengan

$$\sigma\left(\sum_{f\in F} r_f f\right)=\sum_{f\in F}\widehat{\sigma}\left(r_f\right)\widetilde{\sigma}\left(f\right),$$

dan

$$\tau\left(\sum_{f\in F} r_f f\right)=\sum_{f\in F}\widehat{\tau}\left(r_f\right)\widetilde{\tau}\left(f\right),$$

untuk setiap $\sum_{f\in F} r_f f\in\mathbb{Z}(F)$.

Karena $\widehat{\sigma}$ dan $\widehat{\tau}$ merupakan endomorfisma di ring $\mathbb{Z}$, serta $\widetilde{\sigma}$ dan $\widetilde{\tau}$ merupakan endomorfisma di grup F, maka berdasarkan Proposisi 2, pemetaan σ dan τ merupakan endomorfisma pada ring $\mathbb{Z}(F)$.

Selanjutya, didefinisikan pemetaan aditif $\delta:\mathbb{Z}(F)\to\mathbb{Z}(F)$ dengan $\delta(\alpha)=\sigma(\alpha)-\tau(\alpha)$, untuk setiap $\alpha\in\mathbb{Z}(F)$. Akan ditunjukkan bahwa δ merupakan (σ,τ)-derivasi pada ring grup $\mathbb{Z}(F)$. Untuk sebarang $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}(F)$, berlaku:

$$\begin{aligned}\delta(\alpha+\beta)&=\sigma(\alpha+\beta)-\tau(\alpha+\beta)\\&=(\sigma(\alpha)+\sigma(\beta))-(\tau(\alpha)+\tau(\beta))\\&=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)-\tau(\alpha)-\tau(\beta)\\&=\sigma(\alpha)-\tau(\alpha)+\sigma(\beta)-\tau(\beta)\\&=\delta(\alpha)+\delta(\beta),\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\delta(\alpha)\tau(\beta)+\sigma(\alpha)\delta(\beta)&=(\sigma(\alpha)-\tau(\alpha))\tau(\beta)\\&\quad+\sigma(\alpha)(\sigma(\beta)-\tau(\beta))\\&=\sigma(\alpha)\tau(\beta)-\tau(\alpha)\tau(\beta)\\&\quad+\sigma(\alpha)\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)\tau(\beta)\\&=-\tau(\alpha)\tau(\beta)+\sigma(\alpha)\sigma(\beta)\\&=\sigma(\alpha)\sigma(\beta)-\tau(\alpha)\tau(\beta)\\&=\sigma(\alpha\beta)-\tau(\alpha\beta)\\&=\delta(\alpha\beta).\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa δ merupakan (σ,τ)-derivasi pada $\mathbb{Z}(F)$.

Setelah (σ,τ)-derivasi pada ring grup $\mathbb{Z}(F)$ diberikan, berikut adalah contoh (σ,τ)-derivasi pada ring grup $\mathbb{R}(M_2(\mathbb{Q}))$.

Contoh 2. Diberikan ring $(\mathbb{R},+,\cdot)$ serta grup matriks *invertible* $(M_2(\mathbb{Q}),\cdot)$. Didefiniskan ring grup $\mathbb{R}(M_2(\mathbb{Q}))=\left\{\sum_{A\in M_2(\mathbb{Q})} r_A A \,\middle|\, r_A\in\mathbb{R},\ A\in M_2(\mathbb{Q})\right\}$.

Selanjutnya, didefinisikan endomorfisma $\widehat{\sigma}$ dan $\widehat{\tau}$ pada ring $\mathbb{R}$ dengan $\widehat{\sigma}(r)=\widehat{\tau}(r)=r$, untuk setiap $r\in\mathbb{R}$. Lebih lanjut, didefinisikan endomorfisma $\widetilde{\sigma}$ dan $\widetilde{\tau}$ pada grup $(M_2(\mathbb{Q}),\cdot)$ dengan $\widetilde{\sigma}(A)=\begin{bmatrix} a & -b\\ -c & d\end{bmatrix}$ dan $\widetilde{\tau}(A)=\begin{bmatrix} d & c\\ b & a\end{bmatrix}$, untuk setiap $A=\begin{bmatrix} a & c\\ b & d\end{bmatrix}\in(M_2(\mathbb{Q}))$.

Kemudian, didefinisikan pemetaan σ dan τ pada ring grup $\mathbb{R}(M_2(\mathbb{Q}))$ dengan

$$\sigma\left(\sum_{A\in M_2(\mathbb{Z})} r_A A\right)=\sum_{A\in M_2(\mathbb{Z})}\widehat{\sigma}\left(r_A\right)\widetilde{\sigma}\left(A\right)$$

dan

$$\tau\left(\sum_{A\in M_2(\mathbb{Z})} r_A A\right)=\sum_{A\in M_2(\mathbb{Z})}\widehat{\tau}\left(r_A\right)\widetilde{\tau}\left(A\right),$$

untuk setiap $\sum_{A\in M_2(\mathbb{Z})} r_A A\in\mathbb{R}(M_2(\mathbb{Q}))$.

Karena $\widehat{\sigma}$ dan $\widehat{\tau}$ merupakan endomorfisma di ring $\mathbb{R}$, serta $\widetilde{\sigma}$ dan $\widetilde{\tau}$ merupakan endomorfisma di grup $M_2(\mathbb{Q})$, maka berdasarkan Proposisi 2, pemetaan σ dan τ merupakan endomorfisma pada ring grup $\mathbb{R}(M_2(\mathbb{Q}))$.

Selanjutnya, didefinisikan pemetaan aditif $\delta:\mathbb{R}\left(M_2\left(\mathbb{Q}\right)\right) \to \mathbb{R}\left(M_2\left(\mathbb{Q}\right)\right)$ dengan

$$\delta\left(\alpha\right) = \tau\left(k \cdot \alpha\right) - \sigma\left(k \cdot \alpha\right),$$

untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}\left(M_2\left(\mathbb{Q}\right)\right)$ dan suatu $k \in \mathbb{R}$.

Akan ditunjukkan bahwa δ merupakan $(\sigma,\ \tau)$-derivasi pada $\mathbb{R}\left(M_2\left(\mathbb{Q}\right)\right)$. Untuk sebarang $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\left(M_2\left(\mathbb{Q}\right)\right)$, berlaku:

$$\begin{aligned}
\delta(\alpha+\beta) &= \tau(k(\alpha+\beta)) - \sigma(k(\alpha+\beta)) \\
&= \tau(k\alpha + k\beta) - \sigma(k\alpha + k\beta) \\
&= \tau(k\alpha) + \tau(k\beta) - (\sigma(k\alpha) + \sigma(k\beta)) \\
&= \tau(k\alpha) + \tau(k\beta) - \sigma(k\alpha) - \sigma(k\beta) \\
&= \tau(k\alpha) - \sigma(k\alpha) + \tau(k\beta) - \sigma(k\beta) \\
&= \delta(\alpha) + \delta(\beta).
\end{aligned}$$

Selanjutnya, karena $k \in \mathbb{R}$ dan $\mathbb{R}$ merupakan ring komutatif, berdasarkan Lemma 3, k merupakan *center* di $\mathbb{R}\left(M_2\left(\mathbb{Q}\right)\right)$, sehingga untuk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\left(M_2\left(\mathbb{Q}\right)\right)$, maka berlaku:

$$\begin{aligned}
\delta(\alpha)\tau(\beta) + \sigma(\alpha)\delta(\beta) &= \left(\tau(k\alpha) - \sigma(k\alpha)\right)\tau(\beta) \\
&\quad + \sigma(\alpha)\left(\tau(k\beta) - \sigma(k\beta)\right) \\
&= \tau(k\alpha)\tau(\beta) - \sigma(k\alpha)\tau(\beta) \\
&\quad + \sigma(\alpha)\tau(k\beta) - \sigma(\alpha)\sigma(k\beta) \\
&= \tau(k\alpha)\tau(\beta) - \sigma(k)\sigma(\alpha)\tau(\beta) \\
&\quad + \sigma(\alpha)\tau(k)\tau(\beta) - \sigma(\alpha)\sigma(k\beta) \\
&= \tau(k\alpha)\tau(\beta) - k\sigma(\alpha)\tau(\beta) \\
&\quad + \sigma(\alpha)k\tau(\beta) - \sigma(\alpha)\sigma(k\beta) \\
&= \tau(k\alpha)\tau(\beta) - k\sigma(\alpha)\tau(\beta) \\
&\quad + k\sigma(\alpha)\tau(\beta) - \sigma(\alpha)\sigma(k\beta) \\
&= \tau(k\alpha)\tau(\beta) - \sigma(\alpha)\sigma(k\beta) \\
&= \tau(k\alpha\beta) - \sigma(\alpha k\beta) \\
&= \tau(k\alpha\beta) - \sigma(k\alpha\beta) \\
&= \delta(\alpha\beta).
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa δ merupakan suatu (σ,τ)-derivasi pada $\mathbb{R}\left(M_2\left(\mathbb{Q}\right)\right)$.

Setelah diberikan dua contoh eksplisit (σ,τ)-derivasi pada ring grup, bagian berikut menyajikan proposisi yang menunjukkan bagaimana operasi penjumlahan antara dua (σ,τ)-derivasi menghasilkan bentuk baru dari (σ,τ)-derivasi. Hasil ini memperluas struktur aljabar dari himpunan (σ,τ)-derivasi dan menunjukkan kestabilannya terhadap operasi-operasi tersebut.

Proposisi 3. *Jika $\delta_1 : RG \to RG$ adalah (σ,τ)-derivasi dan $\delta_2 : RG \to RG$ adalah (σ,τ)-derivasi, maka $\delta_1 + \delta_2 : RG \to RG$ merupakan (σ,τ)-derivasi.*

Bukti. Untuk sebarang $\alpha = \sum_{g\in G} r_g g,\ \beta = \sum_{g\in G} s_g g \in RG$, berlaku:

$$\begin{aligned}
(\delta_1+\delta_2)(\alpha+\beta) &= \delta_1(\alpha+\beta) + \delta_2(\alpha+\beta) \\
&= \delta_1(\alpha) + \delta_1(\beta) + \delta_2(\alpha) + \delta_2(\beta) \\
&\quad \text{karena } \delta_1 \text{ dan } \delta_2 \text{ bersifat aditif} \\
&= (\delta_1+\delta_2)(\alpha) + (\delta_1+\delta_2)(\beta).
\end{aligned}$$

Dengan kata lain, terbukti $\delta_1 + \delta_2$ merupakan pemetaan aditif. Selanjutnya, $\delta_1 + \delta_2$ juga memenuhi aturan Leibniz, yaitu:

$$\begin{aligned}
(\delta_1+\delta_2)(\alpha\beta) &= \delta_1(\alpha\beta) + \delta_2(\alpha\beta) \\
&= (\delta_1(\alpha)\tau(\beta) + \sigma(\alpha)\delta_1(\beta)) \\
&\quad + (\delta_2(\alpha)\tau(\beta) + \sigma(\alpha)\delta_2(\beta)) \\
&= (\delta_1(\alpha)\tau(\beta) + \delta_2(\alpha)\tau(\beta)) \\
&\quad + (\sigma(\alpha)\delta_1(\beta) + \sigma(\alpha)\delta_2(\beta)) \\
&= (\delta_1+\delta_2)(\alpha)\tau(\beta) + \sigma(\alpha)(\delta_1+\delta_2)(\beta).
\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $\delta_1 + \delta_2$ merupakan (σ,τ)-derivasi. $\square$

4. Kesimpulan

Penelitian ini menunjukkan bahwa dengan adanya endomorfisma φ pada ring R dan ω pada grup G, dapat dibangun endomorfisma θ pada ring grup RG melalui definisi $\theta\left(\sum_{g\in G} r_g g\right) = \sum_{g\in G} \varphi\left(r_g\right)\omega\left(g\right)$ untuk setiap $r_g \in R$ dan $g \in G$. Selanjutnya, dengan mendefinisikan endomorfisma σ dan τ yang sesuai di RG, dapat dibentuk pemetaan aditif d yang memenuhi sifat (σ,τ)-derivasi.

Melalui dua contoh eksplisit, ditunjukkan secara sistematis bagaimana konstruksi (σ,τ)-derivasi diterapkan pada ring grup tertentu, sekaligus menelusuri sifat aljabarnya. Hasil ini memperlihatkan bahwa struktur ring grup cukup fleksibel untuk mendukung generalisasi konsep derivasi. Secara keseluruhan, studi ini memberikan kontribusi konkret dalam literatur dengan menawarkan pendekatan konstruktif terhadap (σ,τ)-derivasi dalam ring grup, serta membuka peluang untuk eksplorasi lebih lanjut dalam konteks ring non-komutatif dan struktur algebra terkait.

Kontribusi Penulis. **Ridho Waluyo**: Investigasi, penulisan-persiapan draf asli. **Ahmad Faisol**: Konseptualisasi, metodologi, validasi, analisis formal, investigasi, penulisan-persiapan draf asli, penulisan-tinjauan dan penyuntingan. **Fitriani**: Validasi, analisis formal, investigasi, penulisan-tinjauan dan penyuntingan. Semua penulis telah membaca dan menyetujui versi manuskrip yang diterbitkan.

Ucapan Terima Kasih. Para penulis mengucapkan terima kasih kepada tim editor dan reviewer yang telah mendukung dalam meningkatkan kualitas naskah ini.

Pembiayaan. Penelitian ini tidak menerima pendanaan eksternal.

Konflik Kepentingan. Para penulis menyatakan tidak ada konflik kepentingan yang terkait dengan artikel ini.

Referensi

[1] C. P. Milies and S. K. Sehgal, *An Introduction to Group Rings*. New York: Springer Science & Business Media, 2002.
[2] O. Kusmus, "On idempotent units in commutative group rings," *Sak. Univ. J. Sci.*, vol. 24, no. 4, pp. 782–790, 2020, doi: 10.16984/saufenbilder.733935
[3] E. A. Osba, H. Al-Ezeh, and M. Ghanem, "On U-group Rings," *Commun. Korean Math. Soc.*, vol. 33, no. 4, pp. 1075–1082, Oct. 2018, doi: 10.4134/CKMS.c170393.

[4] A. Sabharwal, P. Yadav, and R. K. Sharma, "A Note on Central Idempotents in Finite Group Rings of Symmetric Groups," in *Algebra and Related Topics with Applications*, M. Ashraf, A. Ali, and V. De Filippis, Eds., Springer Proc. Math. Stat., vol. 392, Singapore: Springer, 2022, pp. 277–286. doi: 10.1007/978-981-19-3898-6_22.

[5] D. Chaudhuri, "(σ, τ)-Derivations of Group Rings," *arXiv preprint*, arXiv:1803.09418 [math.RA], ver. 3, Jul. 2018. doi: 10.48550/arXiv.1803.09418.

[6] S. K. Tiwari, R. K. Sharma, and B. Dhara, "Identities related to generalized derivation on ideal in prime rings," *Beitr. zur Algebr. und Geom.*, vol. 57, no. 4, pp. 809–821, 2016, doi: 10.1007/s13366-015-0262-6.

[7] A. Alahmadi, S. Ali, A. N. Khan, and M. S. Khan, "A Characterization of Generalized Derivations on Prime Rings," *Commun. Algebr.*, vol. 44, no. 8, pp. 3201–3210, 2016, doi: 10.1080/00927872.2015.1065861.

[8] S. K. Tiwari, R. K. Sharma, and B. Dhara, "Multiplicative (generalized)-derivation in semiprime rings," *Beitr. zur Algebr. und Geom.*, vol. 58, no. 1, pp. 211–225, 2017, doi: 10.1007/s13366-015-0279-x.

[9] S. K. Tiwari, "Generalized derivations with multilinear polynomials in prime rings," *Commun. Algebra*, vol. 46, no. 12, pp. 5356–5372, 2018, doi: 10.1080/00927872.2018.1468899.

[10] T. K. Lee, "Jordan (σ)-derivations of prime rings," *Rocky Mt. J. Math.*, vol. 47, no. 2, pp. 511–525, 2017, doi: 10.1216/RMJ-2017-47-2-511.

[11] B. Davvaz and L. K. Ardekani, "Generalized (Jordan) left derivations on rings," *J. Contemp. Math. Anal. (Armenian Acad. Sci.)*, vol. 52, pp. 166–174, 2017.

[12] E. F. Alharfie and N. M. Muthana, "The commutativity of prime rings with homoderivations," *Int. J. Adv. Appl. Sci.*, vol. 5, no. 5, pp. 79–81, 2018, doi: 10.21833/ijaas.2018.05.010.

[13] L. K. Ardakani, B. Davvaz, and S. Huang, "On derivations of prime and semiprime gamma rings," *Bol. Soc. Parana. Mat.*, vol. 37, no. 2, pp. 157–166, 2019, doi: 10.5269/bspm.v37i2.31658.

[14] A. Boua and E. K. Sögütcü, "Semiprime Rings with Generalized Homoderivations," *Bol. Soc. Parana. Mat.*, vol. 41, no. 41, pp. 1–8, 2023, doi: 10.5269/bspm.62479.

[15] C. Garg and R. K. Sharma, "On generalized (α, β)-derivations in prime rings," *Rend. Circ. Mat. Palermo*, vol. 65, no. 2, pp. 175–184, 2016, doi: 10.1007/s12215-015-0227-5.

[16] S. Reddy, C. J. S. Subbarayudu, and K. Mallikarjunarao, "Centralizing with generalized (σ, τ)-derivations on semiprime rings," *Int. J. Algebr.*, vol. 10, no. 10, pp. 477–490, 2016.

[17] C. J. S. Reddy and K. Subbarayudu, "Generalized (σ, τ)-Derivation in Prime Rings," *IOSR J. Math.*, vol. 12, no. 5, pp. 1–21, 2016, doi: 10.9790/5728-1205070121.

[18] A. M. Ibraheem, "On (σ, τ)-Derivations and Commutativity of Prime and Semi Prime Γ-rings," *Baghdad Sci. J.*, vol. 13, no. 1, Art. 22, pp. 198–204, 2016, doi: 10.21123/bsj.2016.13.1.0198.

[19] E. Guven, "One Sided Generalized (σ, τ)-derivations on Rings," *Bol. Soc. Parana. Mat.*, vol. 38, no. 2, pp. 41–50, 2020, doi: 10.5269/bspm.v38i2.35567.

[20] A. J. Noor and N. Hijriati, "Grup Ring," *J. Mat. Murni dan Terap. Epsilon*, vol. 4, no. 1, pp. 31–41, 2010, doi: 10.20527/epsilon.v4i1.46.