

Validasi Estimasi Batas Atas Luas Sofa dan Perhitungan Luas Sofa Gerver serta Analisis Mekanisme Pergerakan Sofa Hammersley

Muhammad Imam Akbar, Aji Gumilang dan Denny Ivanal Hakim



Volume 13, Issue 3, Pages 446–454, Dec. 2025

Diterima 15 Juli 2025, Direvisi 10 November 2025, Disetujui 8 Desember 2025, Diterbitkan 16 Desember 2025

To Cite this Article : M. I. Akbar, A. Gumilang dan D. I. Hakim, "Validasi Estimasi Batas Atas Luas Sofa dan Perhitungan Luas Sofa Gerver serta Analisis Mekanisme Pergerakan Sofa Hammersley", *Euler J. Ilm. Mat. Sains dan Teknol.*, vol. 13, no. 3, pp. 446–454, 2025, <https://doi.org/10.37905/euler.v13i3.33457>

© 2025 by author(s)

JOURNAL INFO • EULER : JURNAL ILMIAH MATEMATIKA, SAINS DAN TEKNOLOGI



	Homepage	:	http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/euler/index
	Journal Abbreviation	:	Euler J. Ilm. Mat. Sains dan Teknol.
	Frequency	:	Three times a year
	Publication Language	:	English (preferable), Indonesia
	DOI	:	https://doi.org/10.37905/euler
	Online ISSN	:	2776-3706
	License	:	Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
	Publisher	:	Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo
	Country	:	Indonesia
	OAI Address	:	http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/euler/oai
	Google Scholar ID	:	QF_r_gAAAAJ
	Email	:	euler@ung.ac.id

JAMBURA JOURNAL • FIND OUR OTHER JOURNALS



Jambura Journal of Biomathematics



Jambura Journal of Mathematics



Jambura Journal of Mathematics Education



Jambura Journal of Probability and Statistics

Validasi Estimasi Batas Atas Luas Sofa dan Perhitungan Luas Sofa Gerver serta Analisis Mekanisme Pergerakan Sofa Hammersley

Muhammad Imam Akbar^{1,*}, Aji Gumilang¹ dan Denny Ivanal Hakim¹

¹Program Studi Matematika, Institut Teknologi Bandung, Bandung 40132, Indonesia

ARTICLE HISTORY

Diterima 15 Juli 2025
Direvisi 10 November 2025
Disetujui 8 Desember 2025
Diterbitkan 16 Desember 2025

KATA KUNCI

Masalah Pemindahan Sofa
Batas Atas
Lintasan Rotasi
Titik Kontak
Lintasan Kontak

KEYWORDS

Moving Sofa Problem
Upper Bound
Rotation Path
Contact Point
Contact Path

ABSTRAK. Masalah Pemindahan Sofa menanyakan bentuk bangun datar yang memiliki luas maksimum yang dapat dipindahkan melewati koridor siku-siku dua dimensi berlebar satu satuan. Tujuan penelitian ini adalah (1) memvalidasi estimasi batas atas luas sofa yang diperoleh dari model irisan koridor lurus dan koridor siku-siku, (2) menganalisis mekanisme gerak sofa Hammersley melalui lintasan rotasi dan lintasan kontak, dan (3) memberikan rincian perhitungan luas sofa Gerver untuk validasi numerik. Metode yang digunakan meliputi analisis pada fungsi $A(u, \theta)$, yang merupakan fungsi nilai batas atas luas sofa yang diperoleh dari luas daerah irisan koridor lurus dan koridor siku-siku, penerapan konsep lintasan rotasi, titik kontak, dan lintasan kontak untuk membuktikan bahwa konstruksi sofa Hammersley dapat melewati koridor siku-siku, serta perhitungan luas menggunakan Teorema Green untuk memvalidasi luas sofa Gerver. Hasil utama menunjukkan (1) nilai batas atas minimum dari fungsi $A(u, \theta)$ mencapai $2\sqrt{2}$ pada kondisi tertentu, (2) lintasan rotasi yang digunakan membuktikan bahwa sofa Hammersley memenuhi definisi bentuk yang dapat melewati koridor siku-siku, dan (3) perhitungan menggunakan Teorema Green memperoleh luas sofa Gerver sekitar 2,2195 satuan luas. Temuan pada penelitian ini memperjelas elemen-elemen konstruksi geometri pada sofa Hammersley dan sofa Gerver, dan menyediakan rincian validasi yang sebelumnya jarang ditulis secara lengkap.

ABSTRACT. The Moving Sofa Problem concerns the planar shape of maximum area that can be moved around a right-angled corner in a two-dimensional hallway of unit width. The objectives of this study are (1) to validate the upper bound estimate of the sofa area obtained from the intersection of the straight corridor and the right-angled corridor models, (2) to analyze the movement mechanism of the Hammersley sofa through rotation paths and contact paths, and (3) to provide details of the Gerver sofa area calculation for numerical validation. The methods used include analysis of the function $A(u, \theta)$, which is the upper bound value function of the sofa area obtained from the area of the intersection of the straight corridor and the right-angled corridor, the application of the concepts of rotation paths, contact points, and contact paths to prove that the Hammersley sofa construction can pass through the right-angled corridor, and the calculation of the area using Green's Theorem to validate the Gerver sofa area. The main results show that (1) the minimum upper bound of the function $A(u, \theta)$ reaches $2\sqrt{2}$ under certain conditions, (2) the rotation path used proves that the Hammersley sofa satisfies the definition of a shape that can pass through a right-angled corridor, and (3) calculations using Green's Theorem yield an area of approximately 2.2195 area units. The findings of this study clarify the geometric construction elements of the Hammersley and Gerver sofas, and provide validation details that have rarely been fully described before.



This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License. **Editorial of EULER:** Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo, Jln. Prof. Dr. Ing. B. J. Habibie, Bone Bolango 96554, Indonesia.

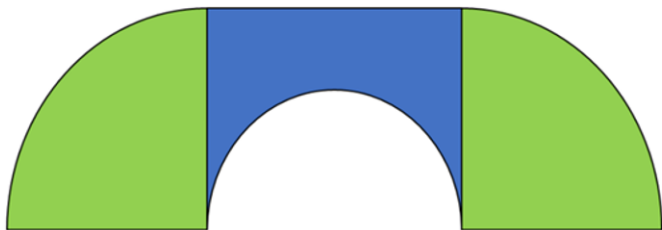
1. Pendahuluan

Salah satu permasalahan di dunia matematika yang sampai saat ini belum ditemukan solusinya adalah Masalah Pemindahan Sofa [1, 2]. Masalah pemindahan sofa pertama kali diajukan oleh Leo Moser pada tahun 1966 yaitu mencari bangun datar dengan luas terbesar yang dapat dipindahkan di sekitar sudut siku-siku di koridor dua dimensi dengan lebar 1 [3, 4]. Hasil yang signifikan untuk pemecahan masalah ini pertama kali dilakukan oleh John Hammersley pada tahun 1968. Konstruksi dari sofa Hammersley cukup sederhana, dimana bangun setengah lingkaran dibagi kedalam dua bagian sama besar, lalu disisipkan bangun persegi

panjang dengan lubang setengah lingkaran dibawahnya yang berdiameter sama dengan panjang persegi panjangnya (Gambar 1) [5]. Sejak penelitian Hammersley, terdapat berbagai penelitian lain yang telah dilakukan, yakni oleh Michael Goldberg pada tahun 1969 [6], dan James D. Sebastian pada tahun 1970 [7].

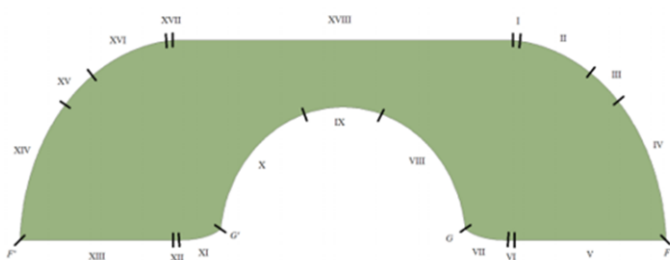
Beberapa solusi yang disebutkan sebelumnya menggunakan pendekatan analitik dan solusi dengan metode numerik diberikan pertama kali oleh Kiyoshi Maruyama pada tahun 1973 [8]. Metode numerik ini selanjutnya dikembangkan oleh Niel R. Wagner pada tahun 1976 [9]. Hasil signifikan berikutnya ditemukan oleh Joseph Gerver pada tahun 1992. Konstruksi dari sofa Gerver memiliki kemiripan dengan sofa Hammersley hanya saja memiliki 18 batas sofa yang berbeda (Gambar 2), yang kemudian dike-

*Penulis Korespondensi.



Gambar 1. Sofa Hammersley

nal dengan nama sofa Gerver dan luasnya masih yang terbesar hingga saat ini [10]. Pada tahun 2014, Philip Gibbs [11] menggunakan metode numerik dalam konstruksi sofa dan perhitungan luasnya dengan hasil yang mendekati luas sofa Gerver. Pada tahun 2015, Brian Tyrrell [12] menerapkan algoritma genetik dalam verifikasi dugaan sofa Gerver secara numerik. Penyelesaian masalah pemindahan sofa dengan pendekatan kalkulus variasi diberikan oleh Ningning Song pada tahun 2016 [13] dan Zhipeng Deng pada tahun 2024 [14]. Pendekatan analitik muncul pada tahun 2016 yang diberikan oleh Dan Romik [15, 16]. Hasil utama penelitian ini adalah konstruksi sofa Gerver dan proses pergerakan sofa diperjelas dengan konsep lintasan rotasi, titik kontak, dan persamaan diferensial yang terkait dengan masalah pemindahan sofa.



Gambar 2. Sofa Gerver

Pada tahun 2018, Dan Romik dan Yoav Kallus [17] menggunakan teknik pembuktian dengan bantuan komputer dalam penyelesaian persamaan diferensial terkait masalah pemindahan sofa untuk memperkecil batas atas luas sofa terbesar menjadi $2,37$ satuan luas yang jauh lebih kecil dari batas atas sebelumnya yakni $2\sqrt{2}$ [18]. Setelah penelitian ini, Michal Batsch mengajukan metode numerik yang lebih lanjut dalam penyelesaian masalah pemindahan sofa pada tahun 2022 [19]. Pendekatan baru dalam penyelesaian masalah pemindahan sofa diberikan oleh Leng dkk. pada tahun 2024 [20] melalui penggunaan pembelajaran mendalam. Pada tahun 2024, Jineon Baik melakukan penelitian pada sofa Gerver dan mengklaim bahwa sofa Gerver adalah sofa yang memiliki luas paling besar yang merupakan solusi paling optimal untuk masalah pemindahan sofa dengan membuktikan bahwa sofa Gerver adalah bentuk bangun datar yang memiliki luas maksimum yang mampu melewati koridor siku-siku dengan lebar satu satuan [21]. Metode yang digunakan adalah fungsi kuadratik Q sebagai batas atas luas sofa, dan dibuktikan bahwa nilai Q mencapai maksimum globalnya hanya di sofa Gerver. Meskipun sejumlah konstruksi dan perbaikan batas atas telah diajukan, belum ada

bukti formal bahwa solusi yang diberikan bersifat optimal. Selain itu, beberapa perhitungan luas dan argumen tentang mekanisme gerak pada literatur asli kurang terperinci untuk pembaca non-spesialis, sehingga memerlukan verifikasi dan dokumentasi perhitungan yang lebih lengkap.

Dalam makalah ini kami melakukan tiga hal terkait masalah di atas: (i) meninjau fungsi dua variabel $A(u, \theta)$ yang merupakan fungsi nilai batas atas luas sofa yang diperoleh dari luas daerah irisan koridor lurus dan koridor siku-siku, dimana u adalah jarak antara titik sudut koridor siku-siku bagian dalam dengan dinding bagian atas dari koridor lurus, dan θ adalah sudut yang dibentuk oleh perpotongan garis dari dinding koridor lurus dan koridor siku-siku, dengan tujuan untuk memperoleh nilai batas atas luas sofa sebesar $2\sqrt{2}$, (ii) melakukan analisis terhadap mekanisme pergerakan sofa Hammersley menggunakan konsep lintasan rotasi, titik kontak, dan lintasan kontak, untuk membuktikan bahwa sofa ini dapat melewati koridor siku-siku, yaitu dengan memenuhi bentuk sofa S_x yang merupakan bentuk sofa yang berasosiasi dengan lintasan rotasi x tertentu, (iii) memberikan rincian dalam perhitungan luas sofa Gerver menggunakan Teorema Green untuk memverifikasi luas sofa Gerver sebesar $2,2195$ satuan luas yang diklaim oleh Baik [21].

Berdasarkan Teorema Green, nilai dari luas suatu daerah D yang dibatasi oleh kurva tertutup sebarang C diberikan oleh

$$\text{Luas } D = \frac{1}{2} \oint_C (-ydx + xdy),$$

dimana nilai x adalah nilai dari fungsi parameter $x(i)$ yang merupakan fungsi yang menyatakan nilai absis dan nilai y adalah nilai dari fungsi parameter $y(i)$ yang merupakan fungsi yang menyatakan nilai ordinat dari titik yang berada pada kurva C yang berorientasi berlawanan dengan arah jarum jam. Gap yang kami tangani adalah kurangnya dokumentasi langkah demi langkah untuk beberapa perhitungan luas dan mekanisme gerak yang dipakai dalam konstruksi sofa.

Novelty makalah ini adalah (a) perumusan dan verifikasi terperinci fungsi batas atas $A(u, \theta)$ dalam konteks model Stewart, (b) penjabaran lengkap mekanisme gerak Hammersley menggunakan konsep lintasan rotasi dan titik kontak sehingga pembuktian $S_x = S_H$ menjadi lebih eksplisit, dan (c) perhitungan lengkap menggunakan Teorema Green untuk memvalidasi luas sofa Gerver, yaitu sekitar $2,2195$ satuan luas, dengan menampilkan semua batas kurva dan integral parametrik. Tujuan akhir tulisan ini adalah memberikan verifikasi matematis dan dokumentasi rinci sehingga pembaca dapat mengikuti perhitungan dan bukti geometris tanpa kehilangan langkah penting, sekaligus menempatkan hasil-hasil ini dalam konteks perkembangan riset terbaru.

2. Metode

Pada bagian ini kita akan mengulas kembali beberapa konsep tentang lintasan rotasi, titik kontak dan lintasan kontak yang diperkenalkan dalam [15].

2.1. Lintasan Rotasi

Himpunan berisi titik-titik koordinat yang membangun koridor akan dinotasikan sebagai berikut

$$L_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$L_v = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\},$$

$$L = L_h \cup L_v.$$

L_h adalah cabang koridor horizontal, L_v adalah cabang koridor vertikal, dan L adalah koridor keseluruhannya.

Bentuk sofa S yang dapat dilewatkan melalui sudut koridor memenuhi kondisi berikut

$$S \subseteq L_h \cap \bigcap_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} (x(t) + R_t(L)) \cap \left(x\left(\frac{\pi}{2}\right) + R_{\frac{\pi}{2}}(L_v)\right),$$

dengan R_t merupakan matriks rotasi berikut

$$R_t = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix},$$

dan $x : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ adalah fungsi bernilai vektor yang kontinu pada $[0, \frac{\pi}{2}]$ dan memenuhi $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Lintasan x dideskripsikan sebagai pergerakan titik $(0, 0)$ (sudut dalam koridor), yang bersentuhan dengan sofa selama koridor bergerak. Lintasan x yang semacam itu untuk selanjutnya disebut sebagai lintasan rotasi.

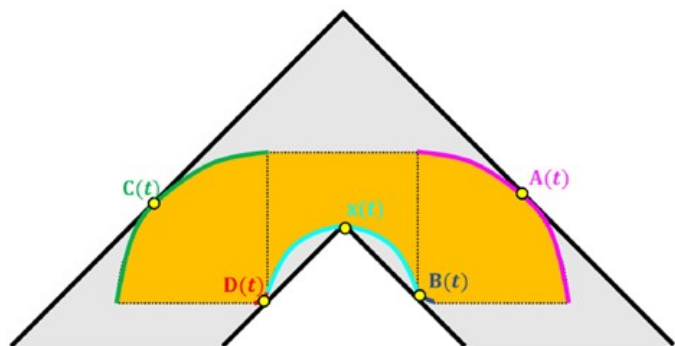
Untuk suatu lintasan rotasi x , tanpa mengurangi perumuman, terdapat bentuk sofa S sehingga

$$S_x = L_h \cap \bigcap_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} (x(t) + R_t(L)) \cap \left(x\left(\frac{\pi}{2}\right) + R_{\frac{\pi}{2}}(L_v)\right).$$

Himpunan tersebut merujuk pada bentuk sofa yang berasosiasi dengan lintasan rotasi x .

2.2. Titik Kontak dan Lintasan Kontak

Titik kontak merupakan titik singgung antara 4 dinding koridor dengan sofa, ditambah dengan posisi x yang juga dianggap sebagai titik kontak jika menyentuh sofa S_x . Selanjutnya, titik-titik tersebut akan diberi label di mana label A dan C berkorespondensi dengan dinding terluar koridor, sementara label B dan D berkorespondensi dengan dinding bagian dalam koridor. Saat koridor bergerak, titik singgung dari keempat dinding akan menciptakan sebuah lintasan yang selanjutnya akan disebut lintasan kontak, yang dinyatakan sebagai $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, dan $D(t)$.



Gambar 3. Titik kontak dan lintasan kontak $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$, dan $x(t)$

Hasil penting pada [15] yang mendeskripsikan titik kontak melalui lintasan rotasi diberikan pada Teorema 1.

Teorema 1. [15] [Teorema Titik Kontak dan Lintasan Kontak] Misalkan $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, dan $D(t)$ adalah titik kontak sofa saat t , kemudian lintasan yang dibentuk oleh keempat titik kontak tersebut saat sofa bergerak adalah lintasan kontak. Misalkan juga $x(t)$ sebagai lintasan rotasi. Jika masing-masing titik kontak tersebut terdefinisi dan lintasan kontaknya kontinu di t , serta $x(t)$ terdiferensialkan di t , maka untuk $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ berlaku

$$A(t) = x(t) + \langle x'(t), \mu_t \rangle v_t + \mu_t,$$

$$B(t) = x(t) + \langle x'(t), \mu_t \rangle v_t,$$

$$C(t) = x(t) - \langle x'(t), v_t \rangle \mu_t + v_t,$$

$$D(t) = x(t) - \langle x'(t), v_t \rangle \mu_t,$$

dengan

$$\mu_t = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}, v_t = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}.$$

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini dibahas verifikasi perhitungan batas atas minimum luas sofa pembuktian mekanisme gerak sofa Hammersley melalui konsep lintasan rotasi, titik kontak dan lintasan kontak, serta validasi perhitungan luas sofa Gerver dengan penerapan Teorema Green.

3.1. Rincian perhitungan Batas Atas Luas Sofa

Hammersley telah menghitung batas atas luas sofa bagi masalah pemindahan sofa, yaitu sebesar $2\sqrt{2}$, yang mana masih dimungkinkan untuk mendapatkan batas atas yang lebih kecil dari hasil tersebut. Stewart [18] kemudian mencoba memodelkan mengenai bagaimana memperoleh batas atas luas sofa yang didapatkan oleh Hammersley dengan cara memaksimalkan luas daerah bagian irisan koridor lurus dan koridor siku-siku seperti pada Gambar 4 di bawah ini. Pada bagian ini, kami menjelaskan lebih detail perhitungan untuk memperoleh nilai batas atas luas sofa sebesar $2\sqrt{2}$ yang dibahas pada [18].

Berdasarkan model pada Gambar 4, untuk setiap $u \in [0, 1]$ yang merupakan jarak antara titik sudut koridor siku-siku bagian dalam dengan dinding bagian atas dari koridor lurus dan $\theta \in (0, \frac{\pi}{4}]$ yang merupakan sudut yang dibentuk oleh perpotongan garis dari dinding koridor lurus dan koridor siku-siku diperoleh besaran yang merupakan panjang sisi yang bersesuaian sebagai berikut.

$$a = \frac{x(z-u)}{z}; \quad x = \csc(\theta) + \sec(\theta);$$

$$b = (z+t)\frac{x}{z}; \quad y = 1 + \cot(\theta);$$

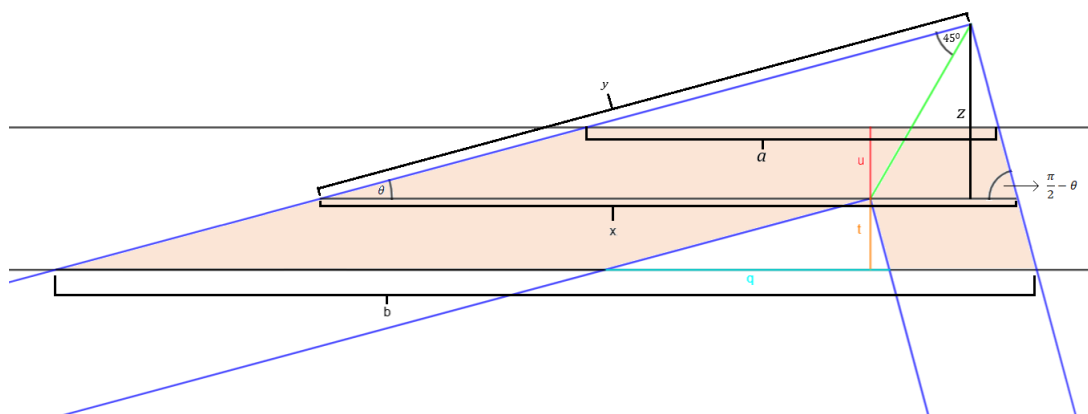
$$t = 1 - u; \quad z = \sin(\theta)(1 + \cot(\theta)).$$

$$q = b - x;$$

Misalkan $A(u, \theta)$ adalah fungsi dua variabel $(u, \theta) \in [0, 1] \times (0, \frac{\pi}{4}]$ yang menyatakan luas daerah yang diperoleh dari irisan koridor lurus dan koridor siku-siku, yakni

$$A(u, \theta) = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot q \cdot t$$

$$= \frac{x}{2z} (2z - u^2)$$



Gambar 4. Model Batas Atas luas sofa hasil modifikasi model Ian Stewart

$$= \frac{2 + \tan(\theta) + \cot(\theta)}{\sin(\theta) + \cos(\theta)} - u \cdot \frac{\csc(\theta) + \sec(\theta)}{2(\sin(\theta) + \cos(\theta))}.$$

Misalkan

$$f(\theta) = \frac{2 + \tan(\theta) + \cot(\theta)}{\sin(\theta) + \cos(\theta)},$$

dan

$$g(\theta) = \frac{\csc(\theta) + \sec(\theta)}{2(\sin(\theta) + \cos(\theta))}.$$

Perhatikan bahwa untuk setiap $\theta \in (0, \frac{\pi}{4}]$ berlaku

$$f(\theta) > g(\theta) > 0,$$

maka $A(u, \theta) > 0$. Karena $u \geq 0$ dan $g(\theta) > 0$, maka $u \cdot g(\theta) \geq 0$. Akibatnya, untuk setiap $(u, \theta) \in [0, 1] \times (0, \frac{\pi}{4}]$ berlaku

$$A(u, \theta) \leq f(\theta).$$

Untuk $\theta \in (0, \frac{\pi}{4}]$ tetap, berlaku

$$\sup_{0 \leq u \leq 1} A(u, \theta) \leq f(\theta).$$

Oleh karena itu,

$$\inf_{0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}} \sup_{0 \leq u \leq 1} A(u, \theta) \leq \inf_{0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}} f(\theta).$$

Dapat diperiksa bahwa $f(\theta)$ monoton turun tegas pada interval $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$, maka

$$\inf_{0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}} f(\theta) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}.$$

Jadi

$$\inf_{0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}} \sup_{0 \leq u \leq 1} A(u, \theta) \leq 2\sqrt{2},$$

yang berarti batas atas minimum dari luas sofa yang diperoleh adalah $2\sqrt{2}^*$.

*Romik [17] memperoleh nilai batas atas luas sofa yang lebih kecil, yaitu sekitar 2.37 yang tercapai saat $(u, \theta) \approx (0.48, \frac{\pi}{4})$ dengan menggunakan metode lain.

3.2. Mekanisme Gerak pada Sofa Hammersley

Pada bagian ini, dibahas mekanisme gerak Sofa Hammersley yang lintasan rotasinya diperkenalkan dalam [15]. Berdasarkan pada [15], pilihan lintasan rotasi untuk sofa Hammersley adalah

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos(2t) - 1}{\sin(2t)} \right]. \tag{1}$$

Perhatikan bahwa

$$x'(t) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{-\sin(2t)}{\cos(2t)} \right].$$

Oleh karena itu

$$\langle x'(t), \mu_t \rangle = -\frac{4}{\pi} \sin(t),$$

dan

$$\langle x'(t), v_t \rangle = \frac{4}{\pi} \cos(t).$$

Berdasarkan Teorema 1, maka diperoleh keempat lintasan kontak sebagai berikut

$$A(t) = x(t) + \langle x'(t), \mu_t \rangle v_t + \mu_t = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix},$$

$$B(t) = x(t) + \langle x'(t), \mu_t \rangle v_t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C(t) = x(t) - \langle x'(t), v_t \rangle \mu_t + v_t = \begin{bmatrix} -\frac{4}{\pi} - \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix},$$

$$D(t) = x(t) - \langle x'(t), v_t \rangle \mu_t = \begin{bmatrix} -\frac{4}{\pi} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

untuk setiap $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Untuk selanjutnya, kami akan membuktikan bahwa Sofa Hammersley dapat melewati koridor siku-siku dengan lintasan rotasi $x(t)$ yang diberikan pada pers. (1). Hasil ini diberikan pada Teorema 2.

Teorema 2. Misalkan S_H menyatakan himpunan titik yang mendeskripsikan sofa Hammersley, yakni

$$S_H = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

dengan

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -1 - \frac{4}{\pi} \leq x \leq -\frac{4}{\pi}, \right. \\ \left. 0 \leq y \leq \sqrt{1 - \left(x + \frac{4}{\pi}\right)^2} \right\},$$

$$S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -\frac{4}{\pi} \leq x \leq 0, \right. \\ \left. \sqrt{\frac{4}{\pi^2} - \left(x + \frac{2}{\pi}\right)^2} \leq y \leq 1 \right\},$$

$$S_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \right\}.$$

Dengan notasi S_x di atas dengan $x(t) = \frac{2}{\pi} \begin{bmatrix} \cos(2t) - 1 \\ \sin(2t) \end{bmatrix}$ berlaku $S_x = S_H$.

Bukti. Himpunan bentuk sofa yang berasosiasi dengan lintasan rotasi $x(t)$ haruslah memenuhi kondisi

$$S_x = L_h \cap \bigcap_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} (x(t) + R_t(L)) \cap \left(x\left(\frac{\pi}{2}\right) + R_{\frac{\pi}{2}}(L_v)\right),$$

dimana

$$L_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$L_v = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\},$$

$$L = L_h \cup L_v.$$

L_h adalah cabang koridor horizontal, L_v adalah cabang koridor vertikal, dan L adalah koridor keseluruhannya.

Perhatikan bahwa

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) + R_{\frac{\pi}{2}}(L_v) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \geq -1 - \frac{4}{\pi}, 0 \leq y \leq 1 \right\},$$

dan

$$L_h \cap \left(x\left(\frac{\pi}{2}\right) + R_{\frac{\pi}{2}}(L_v)\right) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -1 - \frac{4}{\pi} \leq x \leq 1, \right. \\ \left. 0 \leq y \leq 1 \right\}.$$

Oleh karena itu,

$$S_x = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -1 - \frac{4}{\pi} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \right\} \cap \bigcap_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} (x(t) + R_t(L)).$$

Untuk sofa Hammersley, berlaku memutar koridor L berlawanan arah jarum jam sebesar t kemudian ditranslasi sejauh $x(t)$

ekuivalen dengan mentranslasi sofa Hammersley sejauh $-x(t)$ kemudian dirotasi searah jarum jam sebesar t , sehingga untuk $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$ berlaku $R_{-t}(S_H - x(t)) \in L$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $S_H = S_x$. Pertama, akan dibuktikan bahwa $S_H \subseteq S_x$. Ambil sebarang titik $(a, b) \in S_H$.

Kasus 1, jika $(a, b) \in S_1$, artinya $-1 - \frac{4}{\pi} \leq a \leq -\frac{4}{\pi}$ dan $0 \leq b \leq \sqrt{1 - \left(a + \frac{4}{\pi}\right)^2}$. Dengan demikian, $(a, b) \in \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -1 - \frac{4}{\pi} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \right\}$.

Kasus 2, jika $(a, b) \in S_2$, artinya $-\frac{4}{\pi} \leq a \leq 0$ dan $\sqrt{\frac{4}{\pi^2} - \left(a + \frac{2}{\pi}\right)^2} \leq b \leq 1$. Dengan demikian, $(a, b) \in \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -1 - \frac{4}{\pi} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \right\}$.

Kasus 3, jika $(a, b) \in S_3$, artinya $0 \leq a \leq 1$ dan $0 \leq b \leq \sqrt{1 - a^2}$. Dengan demikian, $(a, b) \in \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -1 - \frac{4}{\pi} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \right\}$.

Selanjutnya, karena $R_{-t}(S_H - x(t)) \in L$, maka terdapat $(u, v) \in L$ sehingga

$$R_t \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) = R_t \left(R_{-t} \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - x(t) \right) \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - x(t).$$

Dengan demikian $(a, b) \in \bigcap_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} (x(t) + R_t(L))$. Akibatnya $S_H \subseteq S_x$.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $S_x \subseteq S_H$. Ambil sebarang titik $(r, s) \in S_x$. Andaikan $(r, s) \notin S_H$, maka $(r, s) \notin (S_1 \cup S_2 \cup S_3)$.

Kasus 1, jika $(r, s) \notin S_1$, tanpa mengurangi keumuman, misalkan

$$(r, s) \in \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -1 - \frac{4}{\pi} \leq x < -\frac{4}{\pi}, \right. \\ \left. \sqrt{1 - \left(x + \frac{4}{\pi}\right)^2} < y \leq 1 \right\}.$$

Misalkan $\delta_1, \delta_2 > 0$ bilangan yang sangat kecil.

Perhatikan bahwa untuk $t = t'_1 = t_1 + \delta_1$, maka $(r, s) \notin (x(t) + R_t(L))$. Untuk $t = t'_2 = t_2 - \delta_2$, maka $(r, s) \notin (x(t) + R_t(L))$. Maka terdapat $t \in (t_1, t_2) \subset [0, \frac{\pi}{2}]$ sehingga $(r, s) \notin (x(t) + R_t(L))$. Ini artinya $(r, s) \notin \bigcap_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} (x(t) + R_t(L))$.

Kasus 2, jika $(r, s) \notin S_2$, tanpa mengurangi keumuman, misalkan

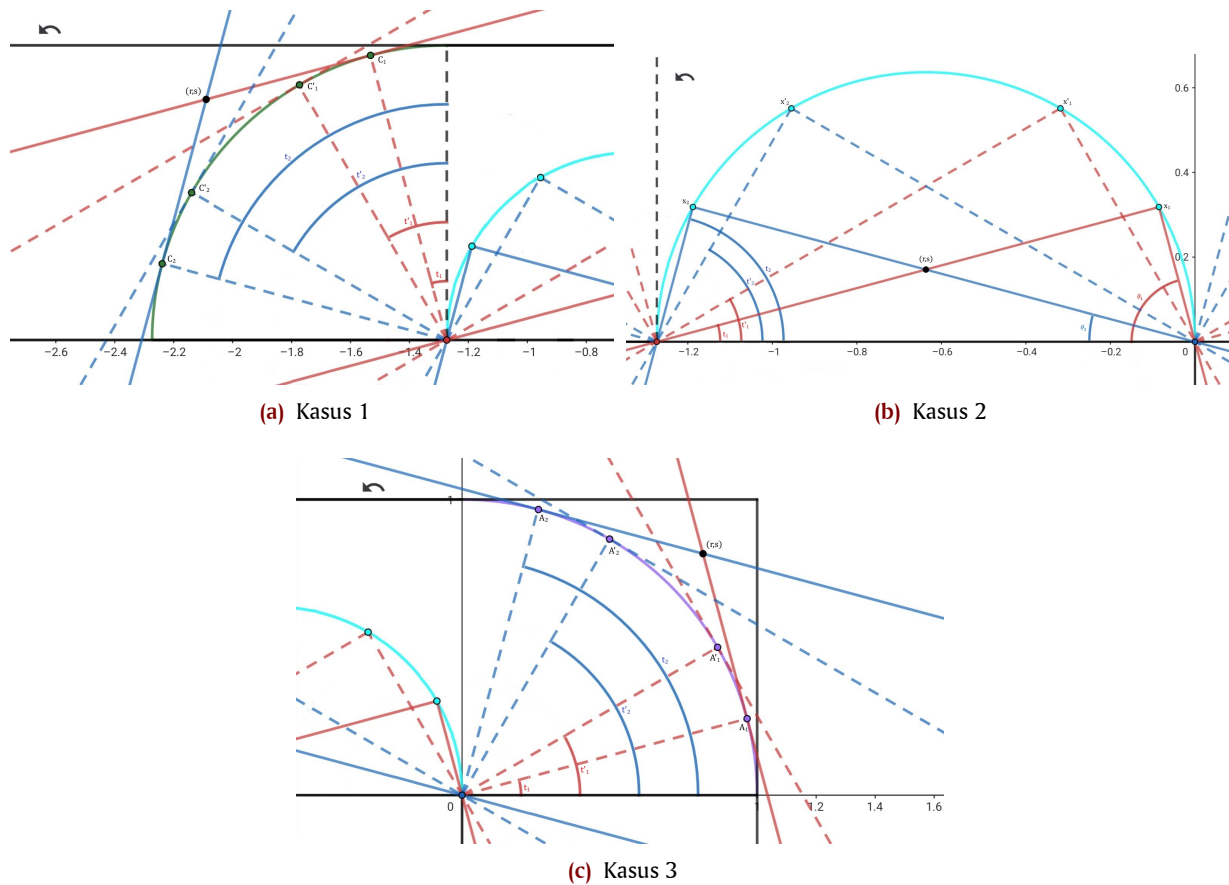
$$(r, s) \in \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -\frac{4}{\pi} < x < 0, \right. \\ \left. 0 \leq y < \sqrt{\frac{4}{\pi^2} - \left(x + \frac{2}{\pi}\right)^2} \right\}.$$

Misalkan $\delta_1, \delta_2 > 0$ bilangan yang sangat kecil. Perhatikan bahwa

$$\tan(t_1) = \frac{s}{r + \frac{4}{\pi}} \implies t_1 = \tan^{-1} \left(\frac{s}{r + \frac{4}{\pi}} \right),$$

dan

$$\tan(\theta_2) = \frac{s}{r} \implies \theta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{s}{r} \right).$$



Gambar 5. Ilustrasi contoh kasus

Sehingga $t_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{S}{r}\right)$. Selanjutnya, untuk $t = t'_1 = t_1 + \delta_1$, maka $(r, s) \notin (x(t) + R_t(L))$. Untuk $t = t'_2 = t_2 - \delta_2$, maka $(r, s) \notin (x(t) + R_t(L))$. Maka terdapat $t \in (t_1, t_2) \subset [0, \frac{\pi}{2}]$ sehingga $(r, s) \notin (x(t) + R_t(L))$. Ini artinya $(r, s) \notin \bigcap_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} (x(t) + R_t(L))$.

Kasus 3, jika $(r, s) \notin S_3$, tanpa mengurangi keumuman, misalkan

$$(r, s) \in \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1, \sqrt{1-x^2} < y \leq 1 \right\}.$$

Langkah selanjutnya serupa dengan kasus 1.

Dari ketiga kasus di atas, maka haruslah $(r, s) \in S_H$. Dengan demikian, $S_x \subseteq S_H$. Jadi, terbukti bahwa $S_x = S_H$. \square

3.3. Rincian Perhitungan Luas Sofa Gerver

Berdasarkan pada [16], lintasan rotasi $x(t)$ untuk sofa Gerver dinyatakan sebagai

$$x(t) = x_1(t) \cup x_2(t) \cup x_3(t) \cup x_4(t) \cup x_5(t),$$

dimana

$$x_1(t) = \left\{ \begin{bmatrix} k_{11} - \sin(t) (a_1 \sin(t) - a_2 \cos(t) - \frac{1}{2}) + \cos(t) (a_2 \sin(t) + a_1 \cos(t) - 1), \\ k_{12} + \cos(t) (a_1 \sin(t) - a_2 \cos(t) - \frac{1}{2}) + \sin(t) (a_2 \sin(t) + a_1 \cos(t) - 1) \end{bmatrix} \middle| 0 \leq t < \phi \right\}$$

$$x_2(t) = \left\{ \begin{bmatrix} k_{21} + (b_1 t + b_2 - \frac{t^2}{4}) \cos(t) + (-b_1 + \frac{1}{2} - 1) (-\sin(t)), \\ k_{22} + (b_1 t + b_2 - \frac{t^2}{4}) \sin(t) + (-b_1 + \frac{1}{2} - 1) \cos(t) \end{bmatrix} \middle| \phi \leq t < \theta \right\}$$

$$x_3(t) = \{ (k_{31} - (c_2 + t) \sin(t) + (c_1 - t) \cos(t), k_{32} + (c_1 - t) \sin(t) + (c_2 + t) \cos(t)) \mid \theta \leq t < \frac{\pi}{2} - \theta \}$$

$$x_4(t) = \left\{ \begin{bmatrix} k_{41} - (d_1 t + d_2 - \frac{t^2}{4}) \sin(t) + (d_1 - \frac{1}{2} - 1) \cos(t), \\ k_{42} + (d_1 t + d_2 - \frac{t^2}{4}) \cos(t) + (d_1 - \frac{1}{2} - 1) \sin(t) \end{bmatrix} \middle| \frac{\pi}{2} - \theta \leq t < \frac{\pi}{2} - \phi \right\}$$

$$x_5(t) = \left\{ \begin{bmatrix} k_{51} - \sin(t) (e_1 \sin(t) - e_2 \cos(t) - 1) + \cos(t) (e_2 \sin(t) + e_1 \cos(t) - \frac{1}{2}), \\ k_{52} + \cos(t) (e_1 \sin(t) - e_2 \cos(t) - 1) + \sin(t) (e_2 \sin(t) + e_1 \cos(t) - \frac{1}{2}) \end{bmatrix} \middle| \frac{\pi}{2} - \phi \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

Berdasarkan Teorema 1, maka diperoleh keempat lintasan kontak sebagai berikut

$$A(t) = A_1(t) \cup A_2(t) \cup A_3(t) \cup A_4(t) \cup A_5(t)$$

$$B(t) = B_1(t) \cup B_2(t) \cup B_3(t) \cup B_4(t) \cup B_5(t)$$

$$C(t) = C_1(t) \cup C_2(t) \cup C_3(t) \cup C_4(t) \cup C_5(t)$$

$$D(t) = D_1(t) \cup D_2(t) \cup D_3(t) \cup D_4(t) \cup D_5(t)$$

dengan

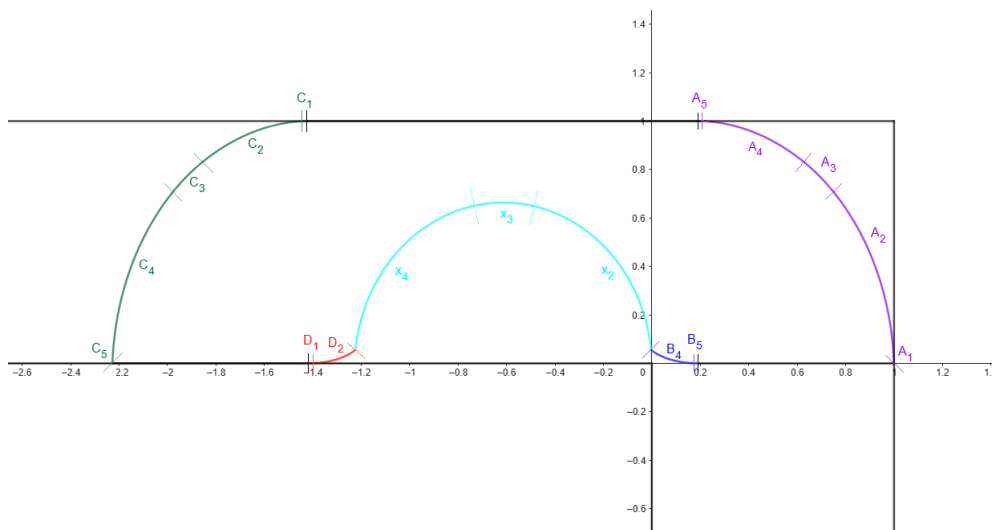
$$A_1(t) = \{ (k_{11} + a_1, k_{12} + a_2) \mid 0 \leq t < \phi \}$$

$$A_2(t) = \left\{ \begin{bmatrix} k_{21} + (b_1 t + b_2 - \frac{t^2}{4} + 1) \cos(t) + (\frac{1}{2} - b_1) \sin(t), \\ k_{22} + (b_1 t + b_2 - \frac{t^2}{4} + 1) \sin(t) + (b_1 - \frac{1}{2}) \cos(t) \end{bmatrix} \middle| \phi \leq t < \theta \right\}$$

$$A_3(t) = \{ (k_{31} + (c_1 - t + 1) \cos(t) + \sin(t), k_{32} + (c_1 - t + 1) \sin(t) - \cos(t)) \mid \theta \leq t < \frac{\pi}{2} - \theta \}$$

$$A_4(t) = \left\{ \begin{bmatrix} k_{41} + (d_1 - \frac{1}{2}) \cos(t) + \frac{\sin(t)}{2}, k_{42} + (d_1 - \frac{1}{2}) \sin(t) - \frac{\cos(t)}{2} \end{bmatrix} \middle| \frac{\pi}{2} - \theta \leq t < \frac{\pi}{2} - \phi \right\}$$

$$A_5(t) = \left\{ \begin{bmatrix} k_{51} + e_1 + \frac{\cos(t)}{2}, k_{52} + e_2 + \frac{\sin(t)}{2} \end{bmatrix} \middle| \frac{\pi}{2} - \phi \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$



Gambar 6. Lintasan kontak sofa Gerver

$$\begin{aligned}
 B_1(t) &= \{ (k_{11} + a_1 - \cos(t), k_{12} + a_2 - \sin(t)) \mid 0 \leq t < \phi \} \\
 B_2(t) &= \left\{ \left(k_{21} + \left(b_1 t + b_2 - \frac{t^2}{4} \right) \cos(t) + \left(\frac{t}{2} - b_1 \right) \sin(t), \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. k_{22} + \left(b_1 t + b_2 - \frac{t^2}{4} \right) \sin(t) + \left(b_1 - \frac{t}{2} \right) \cos(t) \right) \mid \phi \leq t < \theta \right\} \\
 B_3(t) &= \{ (k_{31} + (c_1 - t) \cos(t) + \sin(t), k_{32} + (c_1 - t) \sin(t) - \cos(t)) \mid \theta \leq t < \frac{\pi}{2} - \theta \} \\
 B_4(t) &= \left\{ \left(k_{41} + \left(d_1 - \frac{t}{2} - 1 \right) \cos(t) + \frac{\sin(t)}{2}, \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. k_{42} + \left(d_1 - \frac{t}{2} - 1 \right) \sin(t) - \frac{\cos(t)}{2} \right) \mid \frac{\pi}{2} - \theta \leq t < \frac{\pi}{2} - \phi \right\} \\
 B_5(t) &= \left\{ \left(k_{51} + e_1 - \frac{\cos(t)}{2}, k_{52} + e_2 - \frac{\sin(t)}{2} \right) \mid \frac{\pi}{2} - \phi \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right\} \\
 C_1(t) &= \left\{ \left(k_{11} - a_1 - \frac{\sin(t)}{2}, k_{12} - a_2 + \frac{\cos(t)}{2} \right) \mid 0 \leq t < \phi \right\} \\
 C_2(t) &= \left\{ \left(k_{21} + \left(b_1 - \frac{t}{2} \right) \sin(t) - \frac{\cos(t)}{2}, k_{22} + \left(\frac{t}{2} - b_1 \right) \cos(t) - \frac{\sin(t)}{2} \right) \mid \phi \leq t < \theta \right\} \\
 C_3(t) &= \{ (k_{31} - (c_2 + t + 1) \sin(t) - \cos(t), k_{32} + (c_2 + t + 1) \cos(t) - \sin(t)) \mid \theta \leq t < \frac{\pi}{2} - \theta \} \\
 C_4(t) &= \left\{ \left(k_{41} + \left(-d_1 t - d_2 + \frac{t^2}{4} - 1 \right) \sin(t) + \left(\frac{t}{2} - d_1 \right) \cos(t), \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. k_{42} + \left(d_1 t + d_2 - \frac{t^2}{4} + 1 \right) \cos(t) + \left(\frac{t}{2} - d_1 \right) \sin(t) \right) \mid \frac{\pi}{2} - \theta \leq t < \frac{\pi}{2} - \phi \right\} \\
 C_5(t) &= \{ (k_{51} - e_1, k_{52} - e_2) \mid \frac{\pi}{2} - \phi \leq t \leq \frac{\pi}{2} \} \\
 D_1(t) &= \left\{ \left(k_{11} - a_1 + \frac{\sin(t)}{2}, k_{12} - a_2 - \frac{\cos(t)}{2} \right) \mid 0 \leq t < \phi \right\} \\
 D_2(t) &= \left\{ \left(k_{21} + \left(b_1 - \frac{t}{2} + 1 \right) \sin(t) - \frac{\cos(t)}{2}, k_{22} + \left(\frac{t}{2} - b_1 - 1 \right) \cos(t) - \frac{\sin(t)}{2} \right) \mid \phi \leq t < \theta \right\} \\
 D_3(t) &= \{ (k_{31} - (c_2 + t) \sin(t) - \cos(t), k_{32} + (c_2 + t) \cos(t) - \sin(t)) \mid \theta \leq t < \frac{\pi}{2} - \theta \} \\
 D_4(t) &= \left\{ \left(k_{41} + \left(-d_1 t - d_2 + \frac{t^2}{4} \right) \sin(t) + \left(\frac{t}{2} - d_1 \right) \cos(t), \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. k_{42} + \left(d_1 t + d_2 - \frac{t^2}{4} \right) \cos(t) + \left(\frac{t}{2} - d_1 \right) \sin(t) \right) \mid \frac{\pi}{2} - \theta \leq t < \frac{\pi}{2} - \phi \right\} \\
 D_5(t) &= \{ (k_{51} - e_1 + \sin(t), k_{52} - e_2 - \cos(t)) \mid \frac{\pi}{2} - \phi \leq t \leq \frac{\pi}{2} \}
 \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
 \phi &\approx 0,03917736479008364186322 \\
 \theta &\approx 0,6813015093827248944739 \\
 k_{11} &\approx -0,2103224220726887514162 \\
 k_{12} &\approx 0,25 \\
 k_{21} &\approx -0,9191799227175933222747 \\
 k_{22} &\approx -0,4724066197508054651818 \\
 k_{31} &\approx -0,6137632294302516685549 \\
 k_{32} &\approx 0,8896264790032218607270
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{41} &\approx -0,3083471660889100148351 \\
 k_{42} &\approx -0,4724066197508054651818 \\
 k_{51} &\approx -1,017204036787814585694 \\
 k_{52} &\approx 0,25 \\
 a_1 &\approx 1,210322422072688751416 \\
 a_2 &\approx -0,25 \\
 b_1 &\approx -0,5276245980267846241605 \\
 b_2 &\approx 0,9202583851603676228937 \\
 c_1 &\approx 0,626045522884658675523 \\
 c_2 &\approx -0,9447508039464307516790 \\
 d_1 &\approx 1,313022761424233937316 \\
 d_2 &\approx -0,5235827604145544372028 \\
 e_1 &\approx 1,210322422072688751416 \\
 e_2 &\approx 0,25
 \end{aligned}$$

Ilustrasi dari lintasan rotasi dan lintasan kontak sofa Gerver dapat dilihat pada Gambar 6.

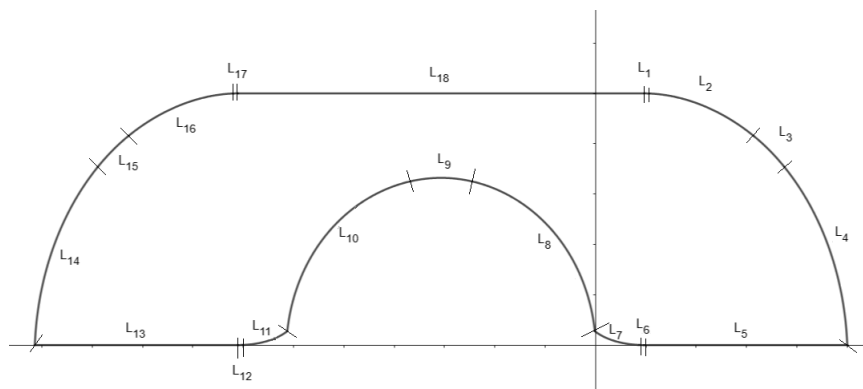
Untuk konstruksi sofa Gerver, misalkan kurva pada lintasan kontak sofa Gerver diberi penamaan ulang sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 L_1 &:= A_5 & L_7 &:= B_4 & L_{12} &:= D_1 \\
 L_2 &:= A_4 & L_8 &:= x_2 & L_{14} &:= C_4 \\
 L_3 &:= A_3 & L_9 &:= x_3 & L_{15} &:= C_3 \\
 L_4 &:= A_2 & L_{10} &:= x_4 & L_{16} &:= C_2 \\
 L_6 &:= B_5 & L_{11} &:= D_2 & L_{17} &:= C_1
 \end{aligned}$$

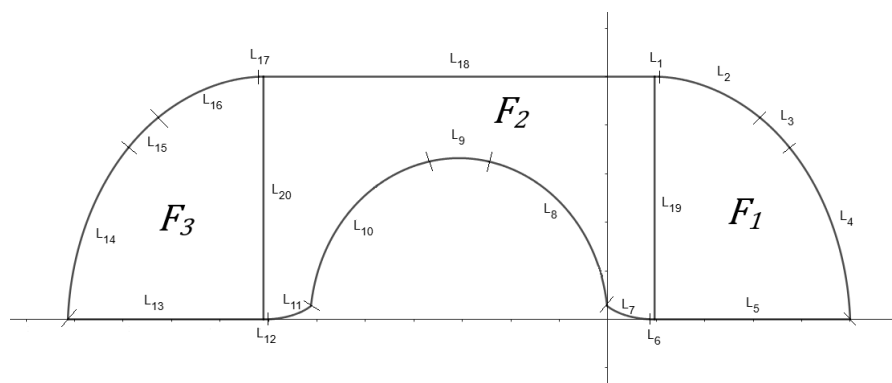
Misalkan juga

$$\begin{aligned}
 L_5 &= \{(t, 0) \mid k_{51} + e_1 \leq t \leq k_{11} + a_1\}, \\
 L_{13} &= \{(t, 0) \mid k_{51} - e_1 \leq t \leq k_{11} - a_1\}, \\
 L_{18} &= \{(t, 1) \mid k_{11} - a_1 \leq t \leq k_{51} + e_1\},
 \end{aligned}$$

secara berturut-turut adalah garis horizontal yang menghubungkan lintasan kontak $A(t)$ dengan $B(t)$, $C(t)$ dengan $D(t)$, dan



Gambar 7. Hasil konstruksi sofa Gerver



Gambar 8. Tiga bagian daerah sofa Gerver

$A(t)$ dengan $C(t)$. Hasil konstruksi dari sofa Gerver dapat dilihat pada Gambar 7.

Untuk perhitungan luas sofa Gerver, daerah yang menyatakan sofa Gerver dibagi menjadi tiga daerah, yaitu daerah F_1 , F_2 , dan F_3 , seperti pada Gambar 8. Pembagian daerah dari sofa Gerver ini bisa dilakukan karena kesimetrian dari sofa Gerver tersebut, dan pembagian daerah ini bertujuan untuk memudahkan dalam perhitungan luas daerah sofa Gerver dengan menggunakan Teorema Green. Misalkan

$$L_{19} = \{(k_{51} + e_1, t) | 0 \leq t \leq 1\}$$

dan

$$L_{20} = \{(k_{11} - a_1, t) | 0 \leq t \leq 1\}.$$

Untuk setiap $j \in \{1, \dots, 20\}$, definisikan

$$L_j = \{(P_j(t), Q_j(t)) | t \text{ nilai parameter}\}$$

sebagai kurva berarah, dimana $P_j(t)$ dan $Q_j(t)$ secara berturut-turut adalah fungsi parameter dari nilai absis dan ordinat titik yang ada pada kurva L_j , dan kurva $-L_j$ adalah kurva yang memiliki arah berlawanan dengan kurva L_j . Kemudian definisikan

$$G_1 = L_5 \cup L_4 \cup L_3 \cup L_2 \cup L_1 \cup (-L_{19})$$

dan

$$G_2 = L_{19} \cup (-L_{18}) \cup (-L_{20}) \cup L_{12} \cup L_{11} \cup (-L_{10}) \cup (-L_9) \cup (-L_8) \cup L_7 \cup L_6,$$

secara berturut-turut adalah kurva yang membatasi daerah sofa Gerver F_1 dan F_2 .

Dengan menggunakan teorema Green, luas daerah F_1 yang dibatasi oleh kurva G_1 adalah

$$\begin{aligned} \text{Luas } F_1 &= \iint_{F_1} dA = \frac{1}{2} \oint_{G_1} (-Qdx + Pdy) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j \in \{1,2,3,4,5\}} \int_{L_j} (-Q_j dx + P_j dy) + \int_{-L_{19}} (-Q_{19} dx + P_{19} dy) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j \in \{1,2,3,4,5\}} \int_{L_j} (-Q_j dx + P_j dy) - \int_{L_{19}} (-Q_{19} dx + P_{19} dy) \right) \\ &\approx 0,6236. \end{aligned}$$

dan luas daerah F_2 yang dibatasi oleh kurva G_2 adalah

$$\begin{aligned} \text{Luas } F_2 &= \iint_{F_2} dA = \frac{1}{2} \oint_{G_2} (-Qdx + Pdy) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j \in \{6,7,11,12,19\}} \int_{L_j} (-Q_j dx + P_j dy) + \sum_{m \in \{8,9,10,18,20\}} \int_{-L_m} (-Q_m dx + P_m dy) \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{j \in \{6,7,11,12,19\}} \int_{L_j} (-Q_j dx + P_j dy) - \sum_{m \in \{8,9,10,18,20\}} \int_{L_m} (-Q_m dx + P_m dy) \right) \approx 0,9723.$$

Dengan cara serupa, luas daerah F_3 akan sama dengan luas daerah F_1 , yakni 0,6236, sehingga luas dari sofa Gerver adalah jumlah luas daerah F_1 , F_2 , dan F_3 , yaitu

$$\begin{aligned} \text{Luas sofa} &= \text{Luas } F_1 + \text{Luas } F_2 + \text{Luas } F_3 \\ &\approx 0,6236 + 0,9723 + 0,6236 \\ &\approx 2,2195^{**}. \end{aligned}$$

**Baek [21] mengklaim bahwa sofa Gerver adalah sofa yang memiliki luas paling besar yang mampu melewati koridor siku-siku.

4. Kesimpulan

Hasil utama pada penelitian ini adalah sebagai berikut. Pertama, perhitungan batas atas luas sofa yang dapat dipindahkan melalui koridor siku-siku dilakukan dengan meninjau fungsi dua variabel $A(u, \theta)$ yang merepresentasikan luas irisan antara koridor lurus dan koridor siku-siku. Dengan memanfaatkan hasil modifikasi model Stewart, diperoleh bahwa untuk setiap $(u, \theta) \in [0, 1] \times (0, \frac{\pi}{4})$ berlaku $A(u, \theta) \leq f(\theta)$, dengan $f(\theta)$ terbukti monoton turun pada interval tersebut. Fungsi $f(\theta)$, mencapai nilai minimum pada $\theta = \frac{\pi}{4}$ sehingga batas atas minimum luas sofa adalah sebesar $2\sqrt{2}$. Hasil ini memverifikasi perhitungan batas atas luas sofa yang sebelumnya diperoleh oleh Hammersley, serta menjadi acuan penting dalam membandingkan estimasi batas atas lainnya yang dikembangkan dalam literatur terbaru.

Kedua, melalui analisis terhadap lintasan rotasi, titik kontak, dan lintasan kontak pada sofa Hammersley, diperoleh pembuktian bahwa sofa ini dapat melewati koridor siku-siku, yaitu dengan memenuhi bentuk sofa S_x yang merupakan bentuk sofa yang berasosiasi dengan lintasan rotasi x , dimana untuk setiap $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, lintasan rotasi untuk sofa Hammersley diberikan oleh

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \begin{bmatrix} \cos(2t) - 1 \\ \sin(2t) \end{bmatrix}.$$

Ketiga, pada sofa Gerver, penelitian ini berhasil membentuk lintasan rotasi dan lintasan kontak yang terdiri dari lima bagian terpisah, kemudian menghitung luas keseluruhan sofa menggunakan Teorema Green yang dibagi ke dalam tiga bagian daerah. Hasil akhir dari perhitungan tersebut menunjukkan bahwa luas Sofa Gerver adalah sekitar 2,2195 satuan luas yang sesuai dengan klaim pada penelitian sebelumnya hingga kini, sofa Gerver adalah sofa dengan luas terbesar yang diketahui menjadi solusi masalah pemindahan sofa.

Kontribusi Penulis. Muhammad Imam Akbar: Metodologi, perangkat lunak, validasi, analisis formal, investigasi, persiapan draf asli, peninjauan dan penyuntingan. Aji Gumilang: Konseptualisasi, metodologi. Denny Ivanal Hakim: Konseptualisasi, metodologi, validasi, persiapan

draf asli, peninjauan dan penyuntingan. Semua penulis telah membaca dan menyetujui versi artikel yang diterbitkan.

Ucapan Terima Kasih. Penulis mengucapkan terima kasih kepada para editor dan peninjau yang telah mendukung kami dalam menyempurnakan naskah ini.

Pembiayaan. Penelitian ini tidak menerima pendanaan eksternal.

Konflik Kepentingan. Para penulis menyatakan tidak ada konflik kepentingan yang terkait dengan artikel ini.

Ketersediaan Data. Tidak tersedia.

Referensi

- [1] D. Sinta, Masalah Trolis Makanan Berbentuk Persegi Panjang, Proyek Program Magister Pengajaran Matematika ITB, 2023.
- [2] G. Toussaint, "Moving a Chair through a Door: A Tutorial on Local Spatial Reasoning in Algorithmic Robotics," *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, vol. 435, 2nd International Conference on Artificial Intelligence Applications and Technologies (AIAAT 2018), Shanghai, China, Aug. 2018, Art. no. 012043, doi: 10.1088/1757-899X/435/1/012043.
- [3] L. Moser, "Problem 66-11: Moving furniture through a hallway," *SIAM Review*, vol. 8, p. 381, 1966.
- [4] A. Gumilang, Masalah Pemindahan Sofa, Tugas Akhir Program Studi Sarjana Matematika ITB, 2022.
- [5] J. M. Hammersley, "On the enfeeblement of mathematical skills by modern mathematics and by similar soft intellectual trash in schools and universities," *Educational Studies in Mathematics*, vol. 1, p. 17, 1968, doi: 10.1007/BF00426226.
- [6] M. Goldberg, "A solution of problem 66-11: Moving furniture through a hallway," *SIAM Review*, vol. 11, pp. 75-78, 1969.
- [7] J. D. Sebastian, "Problem 66-11: Moving furniture through a hallway," *SIAM Review*, vol. 12, no. 4, pp. 582-586, 1970. [Online]. Available: <http://www.jstor.org/stable/2028502>.
- [8] K. Maruyama, "An approximation method for solving the sofa problem," *International Journal of Computer and Information Sciences*, vol. 2, pp. 29-48, 1973, doi: 10.1007/BF00987151.
- [9] N. Wagner, "The sofa problem," *American Mathematical Monthly*, vol. 83, pp. 188-189, 1976.
- [10] J. L. Gerver, "On moving a sofa around a corner," *Geometriae Dedicata*, vol. 42, pp. 267-283, 1992, doi: 10.1007/BF02414066.
- [11] P. E. Gibbs, "A Computational Study of Sofas and Cars," Preprint, Nov. 2014, doi: 10.13140/RG.2.2.17940.91528.
- [12] B. Tyrrell, "Investigating the use of a genetic algorithm to obtain numerical solutions to the Moving Sofa Problem," unpublished manuscript, Jul. 2015.
- [13] N. Song, "A Variational Approach to the Moving Sofa Problem," in *Proc. Conf.*, 2016. [Online]. Available: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:125418889>.
- [14] Z. Deng, "Solving Moving Sofa Problem Using Calculus of Variations," arXiv:2407.02587 [math.CA], Preprint, Jul. 2024, doi: 10.48550/arXiv.2407.02587.
- [15] D. Romik, "Differential Equations and Exact Solutions in the Moving Sofa Problem," *Experimental Mathematics*, vol. 27, no. 3, pp. 316-330, 2018, doi: 10.1080/10586458.2016.1270858.
- [16] D. Romik, "A companion *Mathematica* package to the paper 'Differential equations and exact solutions in the moving sofa problem'," printout, Jul. 2016.
- [17] Y. Kallus and D. Romik, "Improved upper bounds in the moving sofa problem," *Advances in Mathematics*, vol. 340, pp. 960-982, 2018, doi: 10.1016/j.aim.2018.10.022.
- [18] I. Stewart, *Another Fine Math You've Got Me Into*. New York: W. H. Freeman & Co., 2004.
- [19] M. Batsch, "A numerical approach for analysing the moving sofa problem," *Symmetry*, vol. 14, no. 7, Art. no. 1409, 2022, doi: 10.3390/sym14071409.
- [20] K. Leng, J. Bi, J. Cha, S. Pinilla, and J. Thiyagalasingam, "Deep learning evidence for global optimality of Gerver's sofa," *Symmetry*, vol. 16, no. 10, Art. no. 1388, 2024, doi: 10.3390/sym16101388.
- [21] J. Baek, "Optimality of Gerver's Sofa," arXiv:2411.19826 [math.MG], Preprint, Nov. 2024, doi: 10.48550/arXiv.2411.19826.