

Penentuan Spektrum pada Variasi Graf Barbel

Neli Septiana Putri dan Isnaini Rosyida



Volume 13, Issue 3, Pages 293–299, Dec. 2025

Diterima 14 Agustus 2025, Direvisi 28 Oktober 2025, Disetujui 1 November 2025, Diterbitkan 1 Desember 2025

To Cite this Article : N. S. Putri dan I. Rosyida, "Penentuan Spektrum pada Variasi Graf Barbel", *Euler J. Ilm. Mat. Sains dan Teknol.*, vol. 13, no. 3, pp. 293–299, 2025, <https://doi.org/10.37905/euler.v13i3.33968>

© 2025 by author(s)

JOURNAL INFO • EULER : JURNAL ILMIAH MATEMATIKA, SAINS DAN TEKNOLOGI

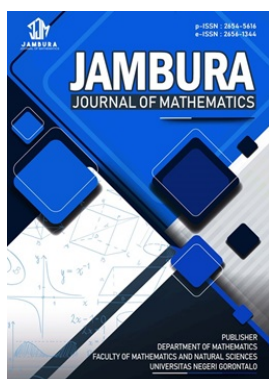


	Homepage	:	http://ejournal.ung.ac.id/index.php/euler/index
	Journal Abbreviation	:	Euler J. Ilm. Mat. Sains dan Teknol.
	Frequency	:	Three times a year
	Publication Language	:	English (preferable), Indonesia
	DOI	:	https://doi.org/10.37905/euler
	Online ISSN	:	2776-3706
	License	:	Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
	Publisher	:	Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo
	Country	:	Indonesia
	OAI Address	:	http://ejournal.ung.ac.id/index.php/euler/oai
	Google Scholar ID	:	QF_r_gAAAAJ
	Email	:	euler@ung.ac.id

JAMBURA JOURNAL • FIND OUR OTHER JOURNALS



Jambura Journal of Biomathematics



Jambura Journal of Mathematics



Jambura Journal of Mathematics Education



Jambura Journal of Probability and Statistics

Penentuan Spektrum pada Variasi Graf Barbel

Neli Septiana Putri¹ dan Isnaini Rosyida^{1,*}¹Departemen Matematika, Universitas Negeri Semarang, Kota Semarang 50229, Indonesia

ARTICLE HISTORY

Diterima 14 Agustus 2025
Direvisi 28 Oktober 2025
Disetujui 1 November 2025
Diterbitkan 1 Desember 2025

KATA KUNCI

Spektrum
Variasi Graf Barbel
Aljabar Linear
Nilai Eigen
Matriks Ketetanggaan
Polinomial Karakteristik

KEYWORDS

Spectrum
Barbel Graph Variation
Linear Algebra
Eigenvalues
Adjacency Matrix
Characteristic Polynomial

ABSTRAK. Penelitian ini bertujuan menganalisis penentuan spektrum dari variasi graf barbel, di mana variasi tersebut dilakukan dengan memodifikasi jumlah simpul pada jembatan antar graf lengkap pada graf barbel. Spektrum tersebut berisi nilai-nilai eigen dari matriks ketetanggaan variasi graf barbel beserta multiplisitasnya. Metode penelitian yang digunakan meliputi analisis secara manual menggunakan pendekatan aljabar linear seperti ekspansi kofaktor, faktorisasi polinomial karakteristik, teorema akar rasional, dan skema Horner. Kemudian, hasil analisis manual divalidasi menggunakan bantuan pemrograman Python. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa semakin panjang dan kompleks jembatan yang menghubungkan kedua graf lengkap, maka semakin besar keberagaman nilai eigen yang dihasilkan. Diperoleh spektrum dari graf barbel $B(n, 1)$ terdiri dari nilai eigen: $\lambda_1, n - 1, \lambda_2, -1, \lambda_3$ dengan multiplisitas berturut-turut $1, 1, 1, 2n - 3, 1$. Sedangkan spektrum dari graf barbel $B(n, 2)$ terdiri dari nilai eigen: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, -1, \lambda_5, \lambda_6$ dengan multiplisitas berturut-turut $1, 1, 1, 1, 2n - 4, 1$. Penelitian ini memberikan kontribusi teoritis tentang hubungan antara struktur graf yang kompleks dengan representasi spektralnya.

ABSTRACT. This study aims to analyze the determination of the spectrum of barbel graph variations, where the variations are made by modifying the number of nodes on the bridge between complete graphs on barbel graphs. The spectrum contains the eigenvalues of the adjacency matrix of the barbel graph variations along with their multiplicities. The analysis method is done manually using linear algebra approaches such as cofactor expansion, characteristic polynomial factorization, rational root theorem, and Horner's scheme. Then, the results are validated using Python programming. The results of this study show that the longer and more complex the bridge connecting the two complete graphs, the greater the diversity of eigen values produced. The spectrum of barbel graph $B(n, 1)$ consists of the eigenvalues $\lambda_1, n - 1, \lambda_2, -1, \lambda_3$ with their multiplicities $1, 1, 1, 2n - 3, 1$. Further, the spectrum of barbel graph $B(n, 2)$ consists of the eigenvalues $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, -1, \lambda_5, \lambda_6$ with their multiplicities $1, 1, 1, 1, 2n - 4, 1$, respectively. This research provides theoretical contributions regarding the relationship between complex graph structures and their spectral representations.



This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License. **Editorial of EULER:** Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo, Jln. Prof. Dr. Ing. B. J. Habibie, Bone Bolango 96554, Indonesia.

1. Pendahuluan

Konsep-konsep utama dalam aljabar linear seperti matriks, nilai eigen, dan vektor eigen memiliki peran penting dalam menyelesaikan berbagai persoalan matematis yang melibatkan sistem linear. Salah satu penerapan dari konsep tersebut adalah pada analisis struktur graf, di mana suatu graf dapat direpresentasikan secara numerik melalui matriks, khususnya matriks ketetanggaan (*adjacency matrix*) [1]. Matriks ketetanggaan dari graf sederhana merupakan matriks berukuran $n \times n$ dengan entri pada baris ke- i dan kolom ke- j bernilai 0 atau 1. Dalam konteks ini, nilai-nilai eigen dari matriks ketetanggaan beserta multiplisitasnya membentuk suatu spektrum graf. Oleh karena itu, untuk menentukan spektrum *adjacency* suatu graf diperlukan penjabaran matriks ketetanggaan, perhitungan nilai eigen, serta penentuan multiplisitasnya. Representasi graf melalui matriks ketetanggaan memungkinkan penerapan teori aljabar secara langsung dalam memahami struktur dan sifat-sifat graf. Setiap nilai eigen dari matriks ketetanggaan berkaitan dengan pola hubungan antar simpul

yang bersifat stabil terhadap perubahan struktur lokal graf.

Graf barbel merupakan salah satu kelas graf yang relatif jarang dikaji dalam konteks spektrum graf. Penelitian sebelumnya umumnya berfokus pada banyaknya pohon pembangun graf barbel [2]. Graf barbel B_{2p} diperoleh dengan menghubungkan dua graf lengkap K_p menggunakan sebuah sisi penghubung (*bridge*) [2]. Graf lengkap dengan p simpul, dilambangkan dengan K_p , adalah graf sederhana di mana setiap dua simpul saling terhubung secara langsung, sehingga setiap simpul pada K_p memiliki derajat $p - 1$ [3]. Misalkan e merupakan suatu sisi dari graf G , maka $G - \{e\}$ adalah graf yang diperoleh dari G dengan menghapus sisi e . Jika $G - \{e\}$ tidak lagi terhubung, maka e disebut sebagai jembatan (*bridge*) pada G [4].

Kajian mengenai spektrum graf telah dilakukan pada berbagai jenis graf tertentu. Spektrum graf merupakan himpunan nilai-nilai eigen dari matriks ketetanggaan beserta multiplisitas masing-masing nilai eigen [5]. Agustina *et al.* [5] meneliti spektrum graf sederhana seperti graf bintang, graf mahkota, dan graf tangga. Selanjutnya, Oktriyansa *et al.* [6] membahas spektrum

*Penulis Korespondensi.

matriks *Laplacian* dari graf bipartit lengkap, termasuk bentuk polinomial karakteristik dan nilai eigennya beserta multiplisitas. Penelitian tersebut berhasil menentukan rumus umum spektrum *Laplacian* dengan menunjukkan adanya pola ketergantungan terhadap ukuran graf.

Kholifah *et al.* [7] memperoleh bentuk umum spektrum *detour* dan indeks *detour* dari graf berlian Br_n untuk $n \geq 3$. Langkah-langkah yang digunakan mencakup pembuatan graf, penentuan matriks *detour*, perhitungan polinomial karakteristik, dan penurunan bentuk umum spektrum. Kajian serupa dilakukan oleh Komarullah [8] yang menganalisis spektrum *adjacency* pada graf buku segitiga $(K_{1,1,n})$, serta oleh Karmilawati [9] yang meneliti spektrum *detour* pada graf helm tertutup (CH_n) . Abdy *et al.* [10] membahas spektrum matriks *detour* dari graf roda dengan $n + 1$ titik (W_n) , sementara Mulyani *et al.* [11] meneliti spektrum pada graf reguler kuat.

Selain itu, Sason *et al.* [12] menelaah sifat-sifat spektrum graf berdasarkan beberapa jenis matriks, antara lain matriks ketetanggaan, *Laplacian*, *sign Laplacian*, dan *Laplacian* ternormalisasi. Sewar *et al.* [13] mengkaji spektrum matriks ketetanggaan graf Cayley pada grup \mathbb{Z}_n , sedangkan Kumari dan Panigrahi [14] meneliti spektrum matriks ketetanggaan dari *power graph* serta komplemennya. Penelitian Triyani *et al.* [15] membahas spektrum *Laplacian* pada graf mahkota dan graf bentang, dan Alfin *et al.* [16] menganalisis spektrum matriks *detour* pada graf teratur.

Berbeda dengan penelitian-penelitian terdahulu, penelitian ini berfokus pada analisis spektrum dari variasi graf barbel. Dalam penelitian ini, dibentuk variasi graf barbel dengan menambahkan simpul pada jembatan penghubung. Variasi graf barbel $B(n, k)$ merupakan graf tak berarah yang dibentuk dengan menghubungkan dua graf lengkap K_n melalui sebuah jembatan, kemudian menyisipkan k simpul pada jembatan tersebut. Variasi pertama $(B(n, 1))$ diperoleh dengan menambahkan satu simpul pada jembatan, sedangkan variasi kedua $(B(n, 2))$ dengan menambahkan dua simpul. Secara struktural, graf barbel tergolong kompleks karena menggabungkan dua bentuk keterhubungan, yaitu keterhubungan penuh dan keterhubungan jalur.

Pembentukan variasi graf barbel ini merupakan salah satu kebaruan (*novelty*) dalam penelitian. Tujuan penelitian ini adalah menentukan spektrum dari dua variasi graf barbel $B(n, 1)$ dan $B(n, 2)$ serta menganalisis karakteristik spektrumnya. Banyaknya simpul yang disisipkan pada jembatan berpengaruh langsung terhadap struktur matriks *adjacency* dan distribusi nilai eigennya. Kajian terhadap variasi ini menjadi penting karena dapat menelusuri pengaruh perubahan struktur graf terhadap dimensi ruang eigen. Sejauh penelusuran literatur, belum ditemukan penelitian yang secara khusus membahas spektrum dari variasi graf barbel. Oleh karena itu, penentuan spektrum dari graf barbel dengan variasi penyisipan simpul pada jembatan menjadi kontribusi orisinal dalam penelitian ini.

Melalui kajian variasi graf barbel dari sudut pandang spektral, penelitian ini diharapkan dapat memperluas pemahaman mengenai hubungan antara struktur graf yang kompleks dengan representasi spektralnya. Selain itu, penelitian ini juga memberikan kontribusi teoritis dalam pengembangan analisis spektral graf dengan menggunakan pendekatan aljabar linear.

2. Metode

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif-kuantitatif yang bersifat teoritis dan eksploratif. Pendekatan ini digunakan untuk menganalisis struktur dan spektrum variasi graf barbel berdasarkan konsep-konsep aljabar linear. Jenis penelitian ini termasuk dalam kategori penelitian murni (*pure research*) di bidang matematika, khususnya dalam cabang aljabar linear dan teori graf.

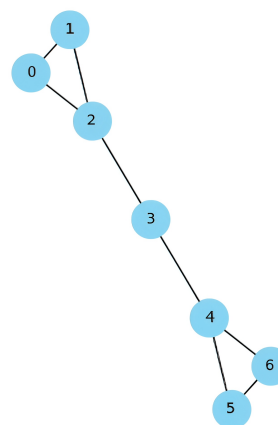
Proses analisis data dalam penelitian ini terdiri atas beberapa langkah berikut:

1. Mengumpulkan data berupa struktur variasi graf barbel yang dibentuk secara sintetik dengan memodifikasi jumlah simpul pada jalur penghubung.
2. Membentuk graf ke dalam matriks ketetanggaan (*adjacency matrix*) yang merepresentasikan keterhubungan antar simpul.
3. Menghitung nilai-nilai eigen dari matriks ketetanggaan.
4. Menentukan vektor-vektor eigen dari setiap nilai eigen dari masing-masing ruang eigen.
5. Menghitung dimensi ruang eigen sebagai ukuran dari banyaknya vektor bebas linear yang menyusun ruang tersebut.
6. Menganalisis hasil polinomial karakteristik dari matriks ketetanggaan variasi graf barbel dengan menggunakan pendekatan aljabar linear, metode induksi matematika, dan juga komputasi Python.
7. Menafsirkan hasil spektrum dari masing-masing variasi graf untuk melihat bagaimana perubahan struktur jalur memengaruhi nilai dan ruang eigen.
8. Menyimpulkan hasil analisis untuk mengidentifikasi pola hubungan antara struktur graf dan karakteristik spektralnya.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Pola Spektrum Variasi Graf Barbel $B(n, 1)$

Variasi graf barbel $B(n, 1)$ merupakan graf tak berarah yang dibentuk dengan menyisipkan satu titik pada jembatan graf barbel B_{2n} . Secara struktur graf ini dapat digambarkan sebagai jalur $K_n - x - K_n$, dengan x sebagai simpul pada jembatan yang terhubung langsung ke masing-masing graf lengkap. Visualisasi dari variasi graf barbel $B(3, 1)$ disajikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Variasi graf barbel $B(3, 1)$

Variasi dilakukan dengan menyisipkan satu titik x pada jembatan graf barbel $B_{2,3}$, yaitu graf yang terdiri dari 2 buah graf

lengkap K_3 yang dihubungkan oleh sebuah jembatan. Banyaknya simpul pada variasi graf barbel $B(n, 1)$ sebagai berikut:

$$|V(B(n, 1))| = |V(K_n)| + |x| + |V(K_n)| = n + 1 + n = 2n + 1.$$

Berdasarkan definisi variasi graf barbel $B(n, 1)$ dan banyaknya titik $2n + 1$ diketahui bahwa ukuran matriks ketetanggaan pada variasi graf barbel $B(n, 1)$ adalah $(2n + 1) \times (2n + 1)$. Berikut ini disajikan bentuk umum matriks ketetanggaan dari variasi graf barbel kelas pertama:

$$A(B_{n,1}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa bentuk matriks ketetanggaan dari variasi graf barbel $B(n, 1)$ secara umum dapat disusun dalam bentuk blok-blok matriks yang terdiri atas dua blok matriks ketetanggaan graf lengkap $A(K_n)$, dua blok vektor satuan (vektor basis standar), dua blok matriks basis, serta dua blok matriks nol.

Setelah memperoleh bentuk matriks ketetanggaan dari variasi graf barbel $B(n, 1)$, polinomial karakteristiknya dapat ditentukan dengan menyelesaikan persamaan $\det(\lambda I - A(B(n, 1))) = 0$. **Tabel 1** menyajikan hasil polinomial karakteristik dari matriks ketetanggaan variasi graf barbel $B(n, 1)$ untuk $n = 3, 4, 5, \dots, 10$.

Tabel 1. Polinomial karakteristik dari matriks ketetanggaan $B(n, 1)$

Variasi Graf Barbel	Polinomial Karakteristik
$B(3, 1)$	$(\lambda - 2)(\lambda + 1)^3(\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 2)$
$B(4, 1)$	$(\lambda - 3)(\lambda + 1)^5(\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 4)$
$B(5, 1)$	$(\lambda - 4)(\lambda + 1)^7(\lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 6)$
$B(6, 1)$	$(\lambda - 5)(\lambda + 1)^9(\lambda^3 - 4\lambda^2 - 7\lambda + 8)$
$B(7, 1)$	$(\lambda - 6)(\lambda + 1)^{11}(\lambda^3 - 5\lambda^2 - 8\lambda + 10)$
$B(8, 1)$	$(\lambda - 7)(\lambda + 1)^{13}(\lambda^3 - 6\lambda^2 - 9\lambda + 12)$
$B(9, 1)$	$(\lambda - 8)(\lambda + 1)^{15}(\lambda^3 - 7\lambda^2 - 10\lambda + 14)$
$B(10, 1)$	$(\lambda - 9)(\lambda + 1)^{17}(\lambda^3 - 8\lambda^2 - 11\lambda + 16)$

Berdasarkan polinomial karakteristik pada **Tabel 1**, untuk membentuk polinomial $B(n, 1)$ dapat diperoleh dari $B(n - 1, 1)$ dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{aligned} p_n(\lambda) &= (\lambda - ((n - 2) + 1))(\lambda + 1)^{2(n-1)-3+2} \\ &= (\lambda^3 - ((n - 1) - 2 + 1)\lambda^2 - ((n - 1) + 1 + 1)\lambda \\ &\quad + 2(n - 1) - 4 + 2) \\ &= (\lambda - (n - 1))(\lambda + 1)^{2n-3}(\lambda^3 - (n - 2)\lambda^2 - (n + 1)\lambda \\ &\quad + 2n - 4). \end{aligned}$$

Dari kasus-kasus di atas, dapat diperkirakan bahwa pola umum untuk $p_n(\lambda)$ adalah

$$p_n(\lambda) = (\lambda - (n - 1))(\lambda + 1)^{2n-3}(\lambda^3 - (n - 2)\lambda^2 - (n + 1)\lambda + 2n - 4).$$

Polinomial karakteristik di atas dinyatakan pada **Teorema 1**.

Teorema 1. Polinomial karakteristik dari matriks ketetanggaan variasi graf barbel $B(n, 1)$ untuk $n \geq 3$ adalah

$$p(\lambda) = (\lambda - (n - 1))(\lambda + 1)^{2n-3}(\lambda^3 - (n - 2)\lambda^2 - (n + 1)\lambda + 2n - 4).$$

Bukti. Untuk menentukan bentuk umum polinomial karakteristik dari matriks ketetanggaan variasi graf barbel $B(n, 1)$, dapat menggunakan pendekatan rekursif berdasarkan sifat struktur graf dan karakteristik nilai eigen dari graf lengkap. Pendekatan ini bertujuan untuk menunjukkan bahwa setiap pertambahan orde n pada graf lengkap K_n mempertahankan bentuk umum polinomial karakteristik yang diberikan dalam **Teorema 1**.

Langkah 1: Basis Induksi.

Untuk $n = 3$, dari hasil komputasi simbolik seperti pada **Tabel 1** diperoleh bahwa:

$$p_3(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^3(\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 2).$$

Bentuk ini sesuai dengan rumus umum:

$$p_n(\lambda) = (\lambda - (n - 1))(\lambda + 1)^{2n-3}(\lambda^3 - (n - 2)\lambda^2 - (n + 1)\lambda + 2n - 4).$$

Untuk $n = 3$, diperoleh:

1. Nilai eigen pertama:

$$\lambda - (n - 1) = \lambda - (3 - 1) = \lambda - 2,$$

2. Nilai eigen kedua:

$$(\lambda + 1)^{2n-3} = (\lambda + 1)^{2(3)-3} = (\lambda + 1)^3,$$

3. Nilai eigen pada faktor kubik:

$$\begin{aligned} &\lambda^3 - (n - 2)\lambda^2 - (n + 1)\lambda + 2n - 4 \\ &= \lambda^3 - (3 - 2)\lambda^2 - (3 + 1)\lambda + 2(3) - 4 \\ &= \lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 2, \end{aligned}$$

sehingga basis induksi untuk $n = 3$ terbukti benar.

Langkah 2: Langkah Induksi.

Asumsi Induksi.

Misalkan untuk suatu bilangan bulat $n = k \geq 3$, polinomial karakteristik dari variasi graf barbel $B(k, 1)$ adalah

$$p_k(\lambda) = (\lambda - (k - 1))(\lambda + 1)^{2k-3}(\lambda^3 - (k - 2)\lambda^2 - (k + 1)\lambda + 2k - 4).$$

Diasumsikan $p_k(\lambda)$ benar.

Akan ditunjukkan bahwa untuk $n = k + 1$, bentuk polinomial karakteristik $p_{k+1}(\lambda)$ tetap mengikuti rumus:

$$\begin{aligned} p_{k+1}(\lambda) &= (\lambda - ((k + 1) - 1))(\lambda + 1)^{2(k+1)-3}(\lambda^3 - ((k + 1) - 2)\lambda^2 \\ &\quad - ((k + 1) + 1)\lambda + 2(k + 1) - 4). \end{aligned}$$

Selanjutnya, diperoleh:

1. Nilai eigen pertama:

$$\lambda - ((k + 1) - 1) = (\lambda - k),$$

2. Nilai eigen kedua:

$$(\lambda + 1)^{2(k+1)-3} = (\lambda + 1)^{2k-1},$$

3. Nilai eigen pada faktor kubik:

$$\begin{aligned} \lambda^3 - ((k + 1) - 2)\lambda^2 - ((k + 1) + 1)\lambda + 2(k + 1) - 4 \\ = \lambda^3 - (k - 1)\lambda^2 - (k + 2)\lambda + 2k - 2. \end{aligned}$$

Sehingga polinomial karakteristik untuk $n = k + 1$ adalah

$$p_{k+1}(\lambda) = (\lambda - k)(\lambda + 1)^{2k-1}(\lambda^3 - (k - 1)\lambda^2 - (k + 2)\lambda + 2k - 2).$$

Diperhatikan bahwa perubahan dari $n = k$ ke $n = k + 1$ mengubah setiap koefisien dalam faktor kubik secara linear terhadap n . Hal ini menunjukkan bahwa bentuk umum polinomial karakteristik tersebut bersifat rekursif dan stabil terhadap penambahan orde simpul n . □

Teorema 2. Misalkan $B(n, 1)$ adalah variasi graf barbel kelas pertama, maka spektrumnya dinyatakan sebagai:

$$\text{Spec}(B(n, 1)) = \left[\begin{array}{ccccc} n - 1 & -1 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 1 & 2n - 3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Bukti. Berdasarkan **Teorema 1**, diperoleh bentuk umum polinomial karakteristik dari variasi graf barbel $B(n, 1)$ untuk setiap $n \geq 3$ adalah

$$p_n(\lambda) = (\lambda - (n - 1))(\lambda + 1)^{2n-3}(\lambda^3 - (n - 2)\lambda^2 - (n + 1)\lambda + 2n - 4).$$

Selanjutnya, berdasarkan **Teorema 1** diperoleh:

1. Nilai eigen dari faktor $(\lambda - (n - 1))$ adalah $\lambda = n - 1$ dengan multiplisitas 1.
2. Nilai eigen dari faktor $(\lambda + 1)^{2n-3}$ adalah $\lambda = -1$ dengan multiplisitas $2n - 3$.
3. Nilai eigen dari faktor kubik $(\lambda^3 - (n - 2)\lambda^2 - (n + 1)\lambda + 2n - 4)$ adalah tiga akar berbeda, yaitu $\lambda_1, \lambda_2,$ dan λ_3 , masing-masing dengan multiplisitas 1.

Dengan demikian, berdasarkan definisi spektrum graf diperoleh

$$\text{Spec}(B(n, 1)) = \left[\begin{array}{ccccc} n - 1 & -1 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 1 & 2n - 3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

□

Contoh 1. Berikut ini diberikan contoh spektrum dari variasi graf barbel kelas pertama $B(3, 1)$. Penentuan spektrum $B(3, 1)$ dilakukan secara manual, dan validasi numerik dilakukan dengan bantuan perangkat lunak Python melalui Google Colab. Hasil validasi numerik disajikan pada **Gambar 2**.

```

=== Barbell B(3,1) ===

Matriks Ketetangaan:
[[0 1 1 0 0 0 0]
 [1 0 1 0 0 0 0]
 [1 0 1 0 0 0 0]
 [0 0 1 0 1 0 0]
 [0 0 0 1 0 1 1]
 [0 0 0 0 1 0 1]
 [0 0 0 0 1 1 0]]

Polinomial Karakteristik:
7      5      4      3      2
λ - 8λ - 4λ + 17λ + 16λ - 2λ - 4

Eigenvalues (numerik, 6 desimal):
[ 2.342923  2.      0.470683 -1.      -1.      -1.813607]

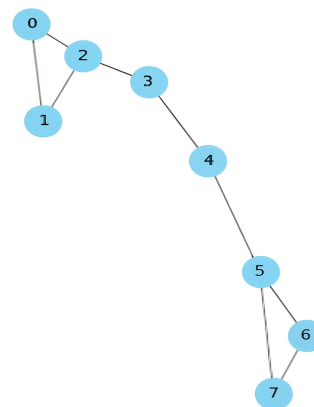
Spektrum:
[[ 2.342923  2.      0.470683 -1.      -1.813607]
 [ 1.      1.      1.      3.      1.      1]]
    
```

Gambar 2. Validasi numerik penentuan spektrum $B(3, 1)$ dengan python

3.2. Pola Spektrum Variasi Graf Barbel $B(n, 2)$

Variasi graf barbel $B(n, 2)$ merupakan graf tak berarah yang dibentuk dengan menghubungkan dua buah graf lengkap K_n dengan sebuah jembatan dan menyisipkan dua buah simpul pada jembatan tersebut. Secara struktur graf ini dapat digambarkan sebagai jalur $K_n - x - y - K_n$, dengan x dan y sebagai simpul pada jembatan yang terhubung langsung ke masing-masing graf lengkap.

Gambar 3 merupakan variasi graf barbel $B(3, 2)$, yaitu graf yang dibentuk dengan menghubungkan dua buah graf lengkap K_3 dengan sebuah jembatan dan menyisipkan dua simpul x dan y pada jembatan tersebut.



Gambar 3. Variasi graf barbel $B(3, 2)$

Banyaknya simpul pada variasi graf barbel $B(n, 2)$ adalah

$$\begin{aligned} |V(B(n, 2))| &= |V(K_n)| + |\{x\}| + |\{y\}| + |V(K_n)| \\ &= n + 1 + 1 + n \\ &= 2n + 2. \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi variasi graf barbel $B(n, 2)$ dan banyaknya simpul pada $B(n, 2)$, diketahui bahwa ukuran matriks ketetangaan pada variasi graf barbel $B(n, 2)$ adalah $(2n + 2) \times (2n + 2)$. Matriks ketetangaan dari variasi graf barbel ini dinotasikan

Tabel 2. Polinomial karakteristik dari matriks ketetanggaan $B(n, 2)$

Variasi Graf Barbel	Polinomial Karakteristik
$B(3, 2)$	$(\lambda + 1)^2(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 3)(\lambda^3 - 4\lambda - 1)$
$B(4, 2)$	$(\lambda + 1)^4(\lambda^3 - 3\lambda^2 - 2\lambda + 5)(\lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda - 1)$
$B(5, 2)$	$(\lambda + 1)^6(\lambda^3 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 7)(\lambda^3 - 2\lambda^2 - 8\lambda - 1)$
$B(6, 2)$	$(\lambda + 1)^8(\lambda^3 - 5\lambda^2 - 2\lambda + 9)(\lambda^3 - 3\lambda^2 - 10\lambda - 1)$
$B(7, 2)$	$(\lambda + 1)^{10}(\lambda^3 - 6\lambda^2 - 2\lambda + 11)(\lambda^3 - 4\lambda^2 - 12\lambda - 1)$
$B(8, 2)$	$(\lambda + 1)^{12}(\lambda^3 - 7\lambda^2 - 2\lambda + 13)(\lambda^3 - 5\lambda^2 - 14\lambda - 1)$
$B(9, 2)$	$(\lambda + 1)^{14}(\lambda^3 - 8\lambda^2 - 2\lambda + 15)(\lambda^3 - 6\lambda^2 - 16\lambda - 1)$
$B(10, 2)$	$(\lambda + 1)^{16}(\lambda^3 - 9\lambda^2 - 2\lambda + 17)(\lambda^3 - 7\lambda^2 - 18\lambda - 1)$

sebagai $A(B_{n,2})$, seperti disajikan berikut ini.

$$A(B_{n,2}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Terlihat bahwa bentuk matriks ketetanggaan variasi graf barbel $B(n, 2)$ secara umum dapat dibuat dalam blok-blok matriks yang terdiri atas dua blok matriks ketetanggaan graf lengkap $A(K_n)$, dua blok vektor satuan (vektor basis standar), dua blok matriks basis, dua baris matriks nol, dua kolom matriks nol, dan dua blok matriks nol. Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dari variasi graf barbel $B(n, 2)$, maka dapat ditentukan polinomial karakteristiknya dengan cara menyelesaikan

$$\det(\lambda I - A(B_{n,2})) = 0.$$

Pada **Tabel 2** disajikan polinomial karakteristik dari matriks ketetanggaan variasi graf barbel $B(n, 2)$ untuk $n = 3, 4, 5, \dots, 10$.

Berdasarkan polinomial karakteristik pada **Tabel 2**, untuk membentuk polinomial $B(n, 2)$ dapat diperoleh dari $B(n - 1, 2)$ dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{aligned} p_n(\lambda) &= (\lambda + 1)^{(2(n-1)-4+2)}(\lambda^3 - ((n - 1) - 1 + 1)\lambda^2 - 2\lambda \\ &\quad + (2(n - 1) - 3 + 2))(\lambda^3 - ((n - 1) - 3 + 1)\lambda^2 \\ &\quad - (2(n - 1) - 2 + 2)\lambda - 1) \\ &= (\lambda + 1)^{(2n-4)}(\lambda^3 - (n - 1)\lambda^2 - 2\lambda + 2n - 3)(\lambda^3 - \\ &\quad (n - 3)\lambda^2 - (2n - 2)\lambda - 1). \end{aligned}$$

Dari kasus-kasus di atas, dapat diperkirakan bahwa pola umum untuk $p_n(\lambda)$ adalah

$$p_n(\lambda) = (\lambda + 1)^{(2n-4)}(\lambda^3 - (n - 1)\lambda^2 - 2\lambda + 2n - 3)(\lambda^3 - (n - 3)\lambda^2 - (2n - 2)\lambda - 1).$$

Selanjutnya, polinomial karakteristik dari graf barbel $B(n, 2)$ dinyatakan pada **Teorema 3**.

Teorema 3. Polinomial karakteristik dari matriks ketetanggaan variasi graf barbel $B(n, 2)$ untuk $n \geq 4$ adalah

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)^{2n-4}(\lambda^3 - (n - 1)\lambda^2 - 2\lambda + 2n - 3)(\lambda^3 - (n - 3)\lambda^2 - (2n - 2)\lambda - 1)$$

Bukti. Untuk menunjukkan bahwa bentuk umum polinomial karakteristik dari variasi graf barbel $B(n, 2)$ benar untuk setiap $n \geq 4$, digunakan metode induksi matematika. Polinomial karakteristik yang dimaksud pada **Teorema 3** terdiri atas faktor $(\lambda + 1)^{2n-4}$ yang berkaitan dengan struktur lokal dari dua buah graf lengkap, serta dua faktor polinomial kubik yang berubah secara linear terhadap n .

Langkah 1: Basis Induksi.

Untuk $n = 4$, dari hasil komputasi simbolik (lihat **Tabel 2**) diperoleh bahwa

$$p_4(\lambda) = (\lambda + 1)^4(\lambda^3 - 3\lambda^2 - 2\lambda + 5)(\lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda - 1).$$

Bentuk ini sesuai dengan rumus umum

$$p_n(\lambda) = (\lambda + 1)^{2n-4}(\lambda^3 - (n - 1)\lambda^2 - 2\lambda + 2n - 3)(\lambda^3 - (n - 3)\lambda^2 - (2n - 2)\lambda - 1).$$

Untuk $n = 4$, diperoleh:

- Nilai eigen pertama:

$$(\lambda + 1)^{2n-4} = (\lambda + 1)^{2(4)-4} = (\lambda + 1)^4.$$

- Nilai eigen pada faktor kubik pertama:

$$\begin{aligned} &(\lambda^3 - (n - 1)\lambda^2 - 2\lambda + 2n - 3) \\ &= (\lambda^3 - (4 - 1)\lambda^2 - 2\lambda + 2(4) - 3) \\ &= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 2\lambda + 5. \end{aligned}$$

- Nilai eigen pada faktor kubik kedua:

$$\begin{aligned} &(\lambda^3 - (n - 3)\lambda^2 - (2n - 2)\lambda - 1) \\ &= (\lambda^3 - (4 - 3)\lambda^2 - (2(4) - 2)\lambda - 1) \\ &= \lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda - 1. \end{aligned}$$

Dengan demikian, basis induksi untuk $n = 4$ terbukti benar.

Langkah 2: Langkah Induksi.

Misalkan untuk suatu bilangan bulat $n = k \geq 4$, polinomial karakteristik dari variasi graf barbel $B(k, 2)$ adalah

$$p_k(\lambda) = (\lambda + 1)^{2k-4}(\lambda^3 - (k - 1)\lambda^2 - 2\lambda + 2k - 3)$$

$$(\lambda^3 - (k - 3)\lambda^2 - (2k - 2)\lambda - 1).$$

Diasumsikan bahwa bentuk $p_k(\lambda)$ tersebut benar.

Akan ditunjukkan bahwa untuk $n = k + 1$, bentuk polinomial karakteristik $p_{k+1}(\lambda)$ tetap mengikuti rumus umum, yaitu:

$$p_{k+1}(\lambda) = (\lambda + 1)^{2(k+1)-4}(\lambda^3 - ((k + 1) - 1)\lambda^2 - 2\lambda + 2(k + 1) - 3)(\lambda^3 - ((k + 1) - 3)\lambda^2 - (2(k + 1) - 2)\lambda - 1).$$

Diperhatikan bahwa:

- Nilai eigen pertama:

$$(\lambda + 1)^{2(k+1)-4} = (\lambda + 1)^{2k-2},$$

- Nilai eigen pada faktor kubik pertama:

$$\begin{aligned} &(\lambda^3 - ((k + 1) - 1)\lambda^2 - 2\lambda + 2(k + 1) - 3) \\ &= \lambda^3 - k\lambda^2 - 2\lambda + 2k - 1, \end{aligned}$$

- Nilai eigen pada faktor kubik kedua:

$$\begin{aligned} &(\lambda^3 - ((k + 1) - 3)\lambda^2 - (2(k + 1) - 2)\lambda - 1) \\ &= \lambda^3 - (k - 2)\lambda^2 - 2k\lambda - 1, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh:

$$p_{k+1}(\lambda) = (\lambda + 1)^{2k-2}(\lambda^3 - k\lambda^2 - 2\lambda + 2k - 1)(\lambda^3 - (k - 2)\lambda^2 - 2k\lambda - 1).$$

Perubahan dari $n = k$ ke $n = k + 1$ mengubah setiap koefisien dalam faktor kubik sesuai dengan aturan linear terhadap n . Hal ini menyiratkan bahwa bentuk umum yang diberikan memiliki struktur rekursif yang stabil terhadap penambahan orde simpul n . □

Teorema 4. Misal $B(n, 2)$ adalah variasi graf barbel kelas kedua, maka spektrumnya adalah

$$\text{Spec}(B(n, 2)) = \begin{bmatrix} -1 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ 2n - 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bukti. Berdasarkan **Teorema 3**, diperoleh bentuk umum polinomial karakteristik dari variasi graf barbel $B(n, 2)$ untuk setiap $n \geq 4$ adalah

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)^{2n-4}(\lambda^3 - (n - 1)\lambda^2 - 2\lambda + 2n - 3)(\lambda^3 - (n - 3)\lambda^2 - (2n - 2)\lambda - 1).$$

Selanjutnya, berdasarkan **Teorema 3** diperoleh:

- Nilai eigen $(\lambda + 1)^{2n-4}$ memberikan $\lambda = -1$ dengan multiplisitas $2n - 4$.
- Nilai eigen $(\lambda^3 - (n - 1)\lambda^2 - 2\lambda + 2n - 3)$ memberikan tiga akar polinomial kubik berbeda sebagai nilai eigen, yaitu $\lambda_1, \lambda_2,$ dan λ_3 , masing-masing dengan multiplisitas 1.
- Nilai eigen $(\lambda^3 - (n - 3)\lambda^2 - (2n - 2)\lambda - 1)$ memberikan tiga akar polinomial kubik berbeda sebagai nilai eigen, yaitu $\lambda_4, \lambda_5,$ dan λ_6 , masing-masing dengan multiplisitas 1.

Berdasarkan definisi spektrum graf, diperoleh

$$\text{Spec}(B(n, 2)) = \begin{bmatrix} -1 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ 2n - 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

3.3. Karakteristik dari Spektrum Dua Variasi Graf Barbel

Berdasarkan hasil perhitungan polinomial karakteristik dan spektrum dari kedua variasi graf barbel yang dianalisis, diperoleh gambaran karakteristik spektrum yang menunjukkan adanya kesamaan pola serta perbedaan mendasar akibat struktur jembatan yang digunakan. Pada variasi graf barbel kelas pertama $B(n, 1)$, struktur graf dibentuk dari dua buah graf lengkap K_n yang dihubungkan melalui satu simpul penghubung tunggal. Bentuk polinomial karakteristik yang dihasilkan memiliki faktor $(\lambda + 1)^{2n-3}$, di mana multiplisitas tinggi ini merepresentasikan bahwa nilai eigen -1 berasal dari sifat lokal graf lengkap. Keberadaan nilai eigen -1 dengan multiplisitas $2n - 4$ mengindikasikan bahwa sebagian besar nilai eigen tetap dipengaruhi oleh struktur internal graf lengkap, meskipun kedua graf lengkap dihubungkan oleh jembatan. Sisa tiga nilai eigen lainnya merupakan akar yang berbeda dari faktor kubik dengan koefisien yang bergantung secara linear terhadap n .

Pada variasi graf barbel kelas kedua $B(n, 2)$, struktur graf dibentuk dari dua buah graf lengkap K_n yang dihubungkan melalui dua simpul pada jembatan sehingga membentuk jalur berpanjang dua. Polinomial karakteristik yang diperoleh kembali memiliki faktor $(\lambda + 1)^{2n-4}$, menandakan konsistensi sifat lokal graf lengkap dalam memunculkan nilai eigen -1 . Namun, perbedaan signifikan muncul pada faktor sisanya, di mana pada $B(n, 2)$, faktor tersebut terpecah menjadi dua polinomial kubik berbeda. Masing-masing polinomial kubik memberikan tiga nilai eigen yang berbeda, sehingga total terdapat enam nilai eigen tambahan di luar nilai eigen -1 .

Perbedaan ini mencerminkan bahwa jalur penghubung yang lebih panjang menghasilkan dua mode interaksi yang terpisah antara kedua graf lengkap, sehingga memperluas distribusi nilai eigen secara umum. Jika dibandingkan, kedua variasi graf barbel sama-sama mempertahankan nilai eigen -1 sebagai ciri khas akibat struktur lokal graf lengkap, namun berbeda dalam kompleksitas spektrum global. Variasi kelas pertama hanya memiliki satu set nilai eigen global yang diperoleh dari satu faktor kubik, sedangkan variasi kelas kedua memiliki dua set nilai eigen global dari dua faktor kubik terpisah.

Hal ini menunjukkan bahwa semakin panjang dan kompleks jembatan yang menghubungkan kedua graf lengkap, maka semakin besar keberagaman nilai eigen yang dihasilkan. Dengan demikian, perubahan kecil pada struktur penghubung (jembatan) terbukti dapat mengubah karakteristik spektrum secara signifikan, khususnya pada bagian nilai eigen yang merepresentasikan interaksi global antar bagian graf.

4. Kesimpulan

Pada penelitian ini telah dilakukan analisis spektrum dari variasi graf barbel berbentuk $B(n, k)$, khususnya untuk kasus di mana banyaknya titik yang disisipkan pada jembatan adalah $k = 1$ dan $k = 2$. Dengan menggunakan pendekatan aljabar linear melalui matriks ketetanggaan, diperoleh hasil bahwa struktur

graf sangat memengaruhi bentuk dan karakteristik spektrumnya. Hasil spektrum dari variasi graf barbel kelas pertama $B(n, 1)$ terdiri atas nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2 = n - 1, \lambda_3 = -1$, dan λ_4 , dengan multiplisitas berturut-turut 1, 1, 1, dan $2n - 3$. Sedangkan spektrum dari variasi graf barbel kelas kedua $B(n, 2)$ terdiri atas nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 = -1$, dan λ_6 , dengan multiplisitas berturut-turut 1, 1, 1, 1, $2n - 4$, dan 1. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa semakin panjang dan kompleks jembatan yang menghubungkan kedua graf lengkap pada graf barbel, maka semakin besar keberagaman nilai eigen yang dihasilkan. Dengan demikian, penelitian ini memberikan kontribusi teoretis terhadap pemahaman hubungan antara kompleksitas struktur graf dengan representasi spektralnya.

Penelitian lanjutan dapat dilakukan dengan menentukan spektrum dari variasi graf barbel kelas ketiga $B(n, 3)$, kelas keempat $B(n, 4)$, dan seterusnya, hingga diperoleh pola umum dari spektrum variasi graf barbel $B(n, k)$ untuk sebarang k .

Kontribusi Penulis. Neli Septiana Putri: Konseptualisasi, metodologi, perangkat lunak, validasi, analisis formal, investigasi, sumber daya, kurasi data, penulisan–persiapan draf asli. Isnaini Rosyida: Penulisan–tinjauan dan penyuntingan, visualisasi, supervisi. Semua penulis telah membaca dan menyetujui versi manuskrip yang diterbitkan.

Ucapan Terima Kasih. Para penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah berkontribusi dalam penelitian ini dan dalam penyusunan manuskrip. Kami sangat menghargai editor dan reviewer atas masukan serta dukungannya dalam menyempurnakan karya ini.

Pembiayaan. Penelitian ini tidak menerima pendanaan eksternal.

Konflik Kepentingan. Para penulis menyatakan tidak ada konflik kepentingan yang terkait dengan artikel ini.

Ketersediaan Data. Tidak tersedia.

Referensi

- [1] O. Jones, "Spectra of Simple Graphs," pp. 1–20, May 2013.
- [2] M. Maulana and N. W. Switrayni, "Banyak Pohon Pembangun pada Graf Barbell," *EIGEN Math. J.*, vol. 2, no. 2, pp. 125–130, 2019, doi: 10.29303/emj.v1i2.46.
- [3] S. Eka R. and B. Rahadjeng, "Dimensi Metrik pada Graf Lintasan, Graf Komplit, Graf Sikel, Graf Bintang, dan Graf Bipartit Komplit," *Mathunesa J. Ilm. Mat.*, vol. 3, no. 1, pp. 1–6, 2014.
- [4] I. K. Budayasa, *Teori Graf dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press, 2007.
- [5] Y. Agustina, N. Kusumastuti, and F. Fran, "Spektrum Adjacency dari Graf Bintang, Graf Mahkota, dan Graf Tangga," *Bul. Ilm. Math. Stat. dan Ter.*, vol. 11, no. 2, pp. 355–362, 2022, doi: 10.26418/bbimst.v11i02.53668.
- [6] R. Oktriyansa, Triyani, and S. R. Nurshiami, "Spektrum Laplace pada Graf Bipartit Lengkap $(K_{n,n})$," *Pros. Semin. Nas. Mat. dan Ter.*, vol. 3, pp. 51–64, 2022.
- [7] O. Kholifah, S. Rahmah Nurshiami, and S. Maryani, "Spektrum Detour dan Indeks Detour dari Graf Berlian," *Pros. Semin. Nas. Mat. dan Ter.*, vol. 3, pp. 103–116, 2022.
- [8] H. Komarullah, "The Adjacency Spectrum of Triangular Book Graphs," *Proc. Int. Conf. Educ. Sharia*, vol. 1, no. 1, pp. 89–93, 2024, doi: 10.62097/ices.v124.15.
- [9] Karmilawati, "Spektrum Detour pada Graf Helm Tertutup," *Bul. Ilm. Math. Stat. dan Ter.*, vol. 12, no. 6, pp. 561–568, 2023, doi: 10.26418/bbimst.v12i6.72387.
- [10] M. Abdy, R. Syam, and A. M. Putri, "Spectrum Matriks Detour dari Graf Roda dengan $n + 1$ Titik W_n ," *J. Math. Comput. Stat.*, vol. 3, no. 1, pp. 32–40, 2020. [Online]. Available: <http://www.ojs.unm.ac.id/jmathcos>
- [11] R. Mulyani, Triyani, and N. Larasati, "Spektrum pada Graf Reguler Kuat," *JMP*, no. 1, pp. 13–21, 2013, doi: 10.20884/1.jmp.2013.5.1.2912.
- [12] I. Sason, N. Krupnik, S. Hamud, and A. Berman, "On Spectral Graph Determination," *Mathematics*, vol. 13, no. 4, p. 549, 2025, doi: 10.3390/math13040549.
- [13] Y. C. Sewar, G. L. Putra, F. O. Haning, and I. G. Pasangka, "Spektrum Matriks Ketetanggaan Graf Cayley pada Grup \mathbb{Z}_n ," *J. Ris. Ap. Mat.*, vol. 9, no. 1, pp. 26–43, 2025, doi: 10.26740/jram.v9n1.
- [14] K. Kumari and P. Panigrahi, "Universal Adjacency Spectrum of (Proper) Power Graphs and Their Complements on Some Groups," *arXiv*, pp. 1–27, 2023, <https://arxiv.org/abs/2307.09129>.
- [15] T. Triyani, R. Oktriyansa, and S. R. Nurshiami, "Spektrum Laplace pada Graf Mahkota dan Graf Bentang," *Pythagoras: J. Mat. P. Mat.*, vol. 19, no. 1, pp. 27–36, 2024, doi: 10.21831/pythagoras.v19i1.60818.
- [16] T. Alfin, W. B. Kawuwung, and T. Tandianganga, "Spektrum Matriks Detour Graf Teratur," *SAINS, J. MIPA dan Pengajarannya*, vol. 23, no. 2, pp. 41–45, 2023, doi: 10.31957/sains.v23i1.3254.