

Homomorfisma pada (R,S) -Modul

Ira Lefiana, Suroto, Ari Wardayani, dan Najmah Istikaanah



Volume 14, Issue 2, Pages 364–376, August 2026

Diterima 14 April 2026, Direvisi 16 Juni 2026, Disetujui 23 Juni 2026, Diterbitkan 15 Juli 2026

To Cite this Article : I. Lefiana, S. Suroto, A. Wardayani, dan N. Istikaanah, "Homomorfisma pada (R,S) -Modul", *Euler J. Ilm. Mat. Sains dan Teknol.*, vol. 14, no. 2, pp. 364–376, 2026, <https://doi.org/10.37905/euler.v14i2.38237>

© 2026 by author(s)

JOURNAL INFO • EULER : JURNAL ILMIAH MATEMATIKA, SAINS DAN TEKNOLOGI

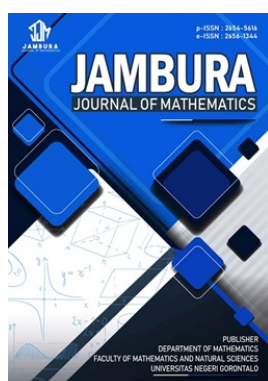


	Homepage	:	http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/euler/index
	Journal Abbreviation	:	Euler J. Ilm. Mat. Sains dan Teknol.
	Frequency	:	Three times a year
	Publication Language	:	English (preferable), Indonesia
	DOI	:	https://doi.org/10.37905/euler
	Online ISSN	:	2776-3706
	License	:	Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
	Publisher	:	Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo
	Country	:	Indonesia
	OAI Address	:	http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/euler/oai
	Google Scholar ID	:	QF_r_gAAAAJ
	Email	:	euler@ung.ac.id

JAMBURA JOURNAL • FIND OUR OTHER JOURNALS



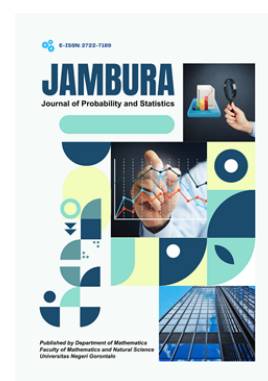
Jambura Journal of
Biomathematics



Jambura Journal of
Mathematics



Jambura Journal of
Mathematics Education



Jambura Journal of
Probability and Statistics

Homomorfisma pada (R,S) -Modul

Ira Lefiana¹, Suroto^{1,*}, Ari Wardayani¹, Najmah Istikaanah¹

¹Jurusan Matematika, Universitas Jenderal Soedirman, Purwokerto, Jawa Tengah, Indonesia

ARTICLE HISTORY

Diterima 14 April 2026
Direvisi 16 Juni 2026
Disetujui 23 Juni 2026
Diterbitkan 15 Juli 2026

KATA KUNCI

homomorfisma
R-modul
(R,S)-bimodul
(R,S)-modul
(R,S)-modul faktor

KEYWORDS

homomorphism
R-module
(R,S)-bimodule
(R,S)-module
quotient (R,S)-module

ABSTRAK. Struktur (R,S) -modul merupakan perumuman dari struktur (R,S) -bimodul. Struktur (R,S) -bimodul sendiri merupakan pengembangan dari struktur R -modul. Jadi, beberapa sifat yang berlaku pada R -modul dapat dikembangkan pada (R,S) -modul. Pada artikel ini, dibahas mengenai homomorfisma (R,S) -modul dan sifat-sifatnya. Metode yang dilakukan adalah menambahkan aksi ring S disebelah kanan pada homomorfisme R -modul dan memperluas syarat kompatibilitas pada homomorfisme (R,S) -bimodul. Hasil yang diperoleh adalah homomorfisma (R,S) -modul dapat dikonstruksi dari homomorfisme R -modul dengan menambahkan aksi ring S dari kanan dan memperluas syarat kompatibilitas pada homomorfisme (R,S) -bimodul dengan syarat asosiatif aksi simultan untuk memperoleh syarat linier kiri dan linier kanan secara simultan pada homomorfisma (R,S) -modul. Selanjutnya, struktur kernel dan image sebagai (R,S) -submodul dan struktur (R,S) -modul faktor juga harus menjaga kekonsistenan aksi kiri dari ring R sekaligus aksi kanan dari ring S secara simultan.

ABSTRACT. The (R,S) -module structure is a generalization of the (R,S) -bimodule structure. The (R,S) -bimodule structure itself is an extension of the R -module structure. Thus, some properties that apply to R -modules can be extended to (R,S) -modules. In this article, we discuss the (R,S) -module homomorphism and its properties. The method used is to add a ring S action on the right to the R -module homomorphism and extend the compatibility condition to the (R,S) -bimodule homomorphism. The result is that the (R,S) -module homomorphism can be constructed from the R -module homomorphism by adding a ring S action from the right and extending the compatibility condition to the (R,S) -bimodule homomorphism with the associative condition of simultaneous action to obtain the left-linear and right-linear conditions simultaneously on the (R,S) -module homomorphism. Furthermore, the kernel and image structures as (R,S) -submodules and (R,S) -factor module structures must also maintain the consistency of the left action of the ring R as well as the right action of the ring S simultaneously.



This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License. **Editorial of EULER:** Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo, Jln. Prof. Dr. Ing. B. J. Habibie, Bone Bolango 96554, Indonesia.

1. Pendahuluan

Pada teori ring, homomorfisma ring merupakan suatu fungsi yang mengawetkan operasi penjumlahan dan perkalian pada ring. Jika diberikan dua buah ring R dan R' , maka fungsi $f : R \rightarrow R'$ dinamakan homomorfisma ring apabila untuk setiap $a, b \in R$ memenuhi $f(a + b) = f(a) + f(b)$ dan $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$. Pada homomorfisma ring, pembahasan mengenai struktur kernel dan image suatu homomorfisma ring merupakan kajian yang penting untuk fondasi Teorema Utama Homomorfisma ring. Pembahasan mengenai homomorfisma ring merujuk pada [1–3].

Modul merupakan generalisasi dari ruang vektor atas lapangan dengan memperlemah syarat skalarnya merupakan elemen pada ring. Untuk R adalah suatu ring, R -modul adalah sebuah struktur di mana sebuah grup Abel M dikendalikan oleh oleh satu buah ring R dengan aksi skalarnya hanya terjadi dari satu arah saja yakni dari kiri saja atau dari kanan saja. Grup Abel M merupakan R -modul kiri apabila operasi skalarnya memenuhi syarat untuk setiap

*Penulis Korespondensi.

$r, r_1, r_2 \in R$ dan $m, m_1, m_2 \in R$. berlaku (i) $r.(m_1 + m_2) = r.m_1 + r.m_2$, (ii) $(r_1 + r_2).m = r_1.m + r_2.m$ dan (iii) $(r_1 r_2).m = r_1.(r_2.m)$.

Sementara untuk M adalah R -modul kanan, operasi skalarnya juga harus memenuhi ketiga syarat tersebut, akan tetapi dengan posisi skalar disebelah kanan. Pada teori modul, homomorfisma R -modul merupakan suatu fungsi yang mengawetkan operasi penjumlahan dan perkalian skalar pada R -modul. Jika diberikan dua buah R -modul M dan M' , maka fungsi $f : M \rightarrow M'$ dinamakan homomorfisma modul apabila untuk setiap $a, b \in M$ dan $r \in R$ memenuhi $f(a+b) = f(a) + f(b)$ dan $f(r.a) = r.f(a)$. Pada homomorfisma modul, struktur kernel dan image suatu homomorfisma R -modul juga merupakan kajian yang penting untuk fondasi Teorema Utama Homomorfisma modul. Kajian mengenai homomorfisma modul merujuk pada [4–6].

Dari suatu struktur R -modul kiri, selanjutnya dapat dilakukan perluasan untuk membentuk struktur (R, S) -bimodul dengan aksi skalar dari ring yang kedua (misalkan ring S) agar beroperasi dari sebelah kanan, tanpa merusak aksi skalar kiri dari ring R . Syarat yang harus dipenuhi oleh M agar menjadi (R, S) -bimodul adalah (i) M adalah R -modul kiri, (ii) M adalah S -modul kanan, dan (iii) memenuhi sifat kompatibilitas, yakni $(r.m).s = r.(m.s)$, untuk setiap $r \in R, m \in M$ dan $s \in S$. Sifat kompatibilitas ini diperlukan untuk mengikat agar pada saat mengalikan elemen m dengan skalar kiri r terlebih dahulu baru kemudian skalar kanan s , hasilnya harus sama persis dengan mengalikan dengan skalar kanan s terlebih dahulu baru kemudian skalar kiri r . Artinya bahwa, urutan tanda kurung pada saat mengoperasikan skalar tidak mempengaruhi hasil akhir. Dengan cara yang sama, dari suatu struktur S -modul kanan, juga dapat dilakukan perluasan untuk membentuk struktur (R, S) -bimodul. Pembahasan struktur (R, S) -bimodul merujuk pada [7–14]. Pembahasan mengenai homomorfisma pada (R, S) -bimodul merujuk pada [15]. Untuk (R, S) -bimodul M dan M' , fungsi $f : M \rightarrow M'$ dikatakan homomorfisma (R, S) -bimodul apabila f merupakan homomorfisma R -modul kiri dan homomorfisma S -modul kanan. Dengan kata lain, $f(m+n) = f(m) + f(n)$, $f(rm) = rf(m)$, dan $f(ms) = f(m)s$, untuk setiap $m, n \in M, r \in R$ dan $s \in S$.

Berdasarkan suatu struktur (R, S) -bimodul, selanjutnya dapat dilakukan perluasan untuk membentuk (R, S) -modul. Perluasan dilakukan dengan mengubah syarat sifat kompatibilitas pada (R, S) -bimodul. Untuk membentuk suatu (R, S) -modul dari suatu (R, S) -bimodul dilakukan dengan menyatukan dua operasi perkalian skalar yang terpisah kiri dan kanan pada (R, S) -bimodul menjadi satu operasi simultan gabungan pada (R, S) -modul. Akibatnya, sifat kompatibilitas pada (R, S) -bimodul diubah menjadi asosiatif aksi simultan $r_1.(r_2.m.s_1).s_2 = (r_1 r_2).m.(s_1 s_2)$, untuk setiap $r_1, r_2 \in R, m \in M$ dan $s_1, s_2 \in S$, pada saat berbicara di (R, S) -modul. Dengan demikian, suatu struktur (R, S) -bimodul pasti merupakan (R, S) -modul, tetapi tidak berlaku sebaliknya. Pembahasan mengenai (R, S) -modul merujuk pada [16–19].

Pembentukan (R, S) -modul dari (R, S) -bimodul sudah dijelaskan pada [16], tetapi pembahasan belum dilakukan pada homomorfisma (R, S) -modul. Sementara itu, pada [15] sudah dibahas mengenai homomorfisma pada (R, S) -bimodul. Dengan demikian, untuk meninjau keisomorfisan dua buah (R, S) -modul belum dapat dilakukan. Hal ini dikarenakan untuk meninjau keisomorfisan dua buah struktur (R, S) -modul diperlukan suatu isomorfisma (R, S) -modul, yakni suatu homomorfisma (R, S) -modul yang bersifat injektif dan surjektif. Dengan belum adanya homomorfisma (R, S) -modul dan homomorfisma (R, S) -modul, mengakibatkan pendefinisian isomorfisma (R, S) -modul belum dapat dilakukan.

Berdasarkan pentingnya struktur homomorfisma (R, S) -modul yang belum dibahas pada penelitian terdahulu, maka pada artikel ini penulis membahas mengenai homomorfisma pada (R, S) -modul. Pembahasan dilakukan dengan memperluas homomorfisma pada R -modul

dengan tambahan aksi ring S disebelah kanan dan mengganti syarat kompatibilitas pada (R, S) -bimodul menjadi asosiatif aksi simultan pada (R, S) -modul. Penelitian konsep homomorfisma pada (R, S) -modul penting dilakukan karena untuk mengetahui keisomorfisan dua buah (R, S) -modul, yakni dua (R, S) -modul yang berbeda tetapi memiliki struktur yang sama. Dengan demikian, suatu struktur (R, S) -modul dapat ditinjau melalui struktur (R, S) -modul lain dengan struktur yang sama.

2. Metode

Penelitian ini dilakukan menggunakan metode studi pustaka yaitu mengembangkan dan melanjutkan konsep yang sudah dibahas pada penelitian sebelumnya. Adapun prosedur langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah :

1. Memberikan definisi homomorfisma pada (R, S) -modul;
2. Menentukan jenis-jenis homomorfisma (R, S) -modul;
3. Memberikan definisi kernel dan image pada homomorfisma (R, S) -modul;
4. Menunjukkan sifat-sifat dan bukti pada homomorfisma (R, S) -modul;
5. Menunjukkan sifat-sifat dan bukti berkaitan dengan kernel dan image pada homomorfisma (R, S) -modul;
6. Menunjukkan pembentukan grup faktor pada (R, S) -modul; dan
7. Menunjukkan bahwa grup faktor yang dibentuk memenuhi semua aksioma (R, S) -modul.

3. Hasil dan Pembahasan

Bagian ini merupakan hasil utama pada artikel ini. Pada bagian ini dibahas pendefinisian homomorfisma (R, S) -modul, sifat-sifat homomorfisma (R, S) -modul, dan pembentukan (R, S) -modul faktor.

Misalkan M adalah R -modul kiri. Apabila ditambahkan suatu aksi ring S disebelah kanan pada modul M maka akan dapat dibentuk M sebagai suatu (R, S) -modul. Berikut diberikan definisi (R, S) -modul yang dibentuk dengan menambahkan aksi ring S disebelah kanan dan memperluas sifat kompatibilitas pada (R, S) -bimodul menjadi sifat asosiatif aksi kiri dan kanan secara simultan.

Definisi 1. Diberikan R dan S masing-masing adalah ring, M adalah suatu grup Abel terhadap operasi penjumlahan, dan operasi perkalian skalar $*, \bullet : R \times M \times S \rightarrow M$ dengan

$$*, \bullet (r, m, s) = r * m \bullet s$$

untuk setiap $(r, m, s) \in R \times M \times S$. Selanjutnya, M dikatakan (R, S) -modul apabila untuk setiap $r, r_1, r_2 \in R, m, n \in M$ dan $s, s_1, s_2 \in S$ berlaku

1. $r * (m + n) \bullet s = r * m \bullet s + r * n \bullet s$
2. $(r_1 + r_2) * m \bullet s = r_1 * m \bullet s + r_2 * m \bullet s$
3. $r * m \bullet (s_1 + s_2) = r * m \bullet s_1 + r * m \bullet s_2$
4. $r_1 * (r_2 * m \bullet s_1) \bullet s_2 = (r_1 r_2) * m \bullet (s_1 s_2)$.

Apabila sifat asosiatif aksi simultan pada syarat 4 **Definisi 1** diganti dengan kejadian khusus sifat kompatibilitas, maka struktur (R, S) -modul tersebut berubah menjadi suatu (R, S) -bimodul. Dengan demikian, (R, S) -bimodul pasti merupakan (R, S) -modul, tetapi tidak berlaku sebaliknya. Lebih lanjut, apabila aksi ring S dari sebelah kanan dihilangkan maka (R, S) -modul akan berubah menjadi R -modul biasa. Berikut diberikan contoh untuk menjelaskan konsep (R, S) -modul.

Contoh 1. Diberikan $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ adalah grup Abel terhadap operasi penjumlahan matriks. Selanjutnya, $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ dan $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ adalah masing-masing adalah ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks. Misal diberikan aksi kiri oleh ring $\mathbb{R}$ yakni operasi perkalian skalar

$$* : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \times M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$$

dengan $*(R, M)$ (dinotasikan $R * M$) didefinisikan sebagai perkalian matriks biasa RM , untuk setiap $(R, M) \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \times M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$. Diperhatikan bahwa untuk setiap $R, R_1, R_2 \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ dan $M, M_1, M_2 \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ berlaku

1. $R * (M_1 + M_2) = R(M_1 + M_2) = RM_1 + RM_2 = R * M_1 + R * M_2$
2. $(R_1 + R_2) * M = (R_1 + R_2)M = R_1M + R_2M = R_1 * M + R_2 * M$
3. $(R_1 R_2) * M = (R_1 R_2)M = R_1(R_2 M) = R_1(R_2 * M) = R_1 * (R_2 * M)$.

Dengan demikian, diperoleh bahwa $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ adalah $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ -modul kiri. Dengan cara yang sama, diperoleh bahwa $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ adalah $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ -modul kanan.

Misalkan pada $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ diberikan aksi kiri oleh ring $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ dan aksi kanan oleh ring $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ secara simultan yakni operasi perkalian skalar

$$*, \bullet : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \times M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \times M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$$

dengan $*, \bullet(R, M, S)$ (dinotasikan $R * M \bullet S$) didefinisikan sebagai perkalian matriks biasa RMS , untuk setiap $(R, M, S) \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \times M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \times M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

Diperhatikan bahwa untuk setiap $R, R_1, R_2 \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $M, M_1, M_2 \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ dan $S, S_1, S_2 \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ berlaku

1. $R * (M_1 + M_2) \bullet S = R(M_1 + M_2)S = RM_1S + RM_2S = R * M_1 \bullet S + R * M_2 \bullet S$
2. $(R_1 + R_2) * M \bullet S = (R_1 + R_2)MS = R_1MS + R_2MS = R_1 * M \bullet S + R_2 * M \bullet S$
3. $R * M \bullet (S_1 + S_2) = RM(S_1 + S_2) = RMS_1 + RMS_2 = R * M \bullet S_1 + R * M \bullet S_2$
4. Syarat kompatibilitas yakni

$$R_1 * (R_2 * M \bullet S_1) \bullet S_2 = R_1 * (R_2MS_1) \bullet S_2 = R_1(R_2MS_1)S_2 = (R_1R_2)M(S_1S_2) \\ = (R_1R_2) * M \bullet (S_1S_2).$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ adalah $(M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), M_{3 \times 3}(\mathbb{R}))$ -modul.

Perilaku aksi ring S disebelah kanan pada pembentukan (R, S) -modul dari R -modul tentunya juga sangat berpengaruh pada struktur submodule. Misalkan M adalah (R, S) -modul, suatu subhimpunan bagian N pada M dikatakan (R, S) -submodul apabila N merupakan (R, S) -modul terhadap operasi seperti pada M . Dengan demikian, submodul juga harus mempertahankan sifat kompatibilitas agar tetap konsisten terhadap aksi ring ring R dari kiri dan aksi ring R dari kanan. Misalkan M adalah (R, S) -modul dan N adalah himpunan bagian tak kosong dari M , maka syarat cukup dan perlu N adalah (R, S) -submodul yakni untuk setiap $r \in R, n, n_1, n_2 \in N$ dan $s \in S$ harus memenuhi $n_1 - n_2 \in N$ dan $r * n \bullet s \in N$. Apabila aksi kanan ring S dihilangkan maka N sebagai (R, S) -submodul akan berubah menjadi R -submodul biasa.

Perilaku aksi ring S disebelah kanan pada pembentukan (R, S) -modul dari R -modul tentunya juga sangat berpengaruh pada struktur homomorfisma. Suatu fungsi yang hanya bersifat linear kiri terhadap ring R pada homomorfisma R -modul, tentunya juga harus berubah syarat memenuhi sifat linier kiri terhadap ring R sekaligus linear kanan terhadap ring S secara simultan. Dengan demikian, sifat-sifat homomorfisma pada (R, S) -modul juga harus menyesuaikan perubahan dengan kondisi sifat linier kiri terhadap ring R sekaligus linear kanan

terhadap ring S secara simultan.

Berikut diberikan definisi homomorfisma pada (R, S) -modul yang harus memenuhi sifat linier kiri terhadap ring R sekaligus linear kanan terhadap ring S secara simultan. Sifat linier kiri dan linier kanan yang simultan tersebut diperumum dari syarat sifat linier kiri dan linier kanan yang tidak simultan pada (R, S) -bimodul.

Definisi 2. Diberikan M dan M' masing-masing merupakan (R, S) -modul. Suatu fungsi $f : M \rightarrow M'$ disebut homomorfisma (R, S) -modul apabila untuk setiap $m_1, m_2 \in M$, $r \in R$ dan $s \in S$ memenuhi

1. $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$
2. $f(r * m_1 \bullet s) = r *' f(m_1) \bullet' s$.

Diperhatikan bahwa syarat 2 pada **Definisi 2** merupakan syarat terpenuhinya sifat linier kiri terhadap ring R sekaligus linear kanan terhadap ring S secara simultan. Syarat tersebut memperumum syarat linier kiri dan linier kanan yang berlaku tidak secara simultan pada homomorfisma (R, S) -bimodul yakni $f(r.m_1) = rf(m_1)$ dan $f(m_1.s) = f(m_1).s$. Hal ini yang membedakan dengan antara homomorfisma (R, S) -modul dengan homomorfisma (R, S) -bimodul.

Selanjutnya, apabila aksi ring S disebelah kanan dihilangkan, maka syarat 2 pada **Definisi 2** akan berubah menjadi $f(r * m_1) = r *' f(m_1)$. Dengan demikian, pendefinisian homomorfisma pada **Definisi 2** berubah menjadi pendefinisian homomorfisma R -modul. Dengan kata lain, homomorfisma (R, S) -modul dapat diperoleh dengan memperluas homomorfisma R -modul dengan menambahkan aksi ring S pada sebelah kanan dengan mempertahankan konsistensi aksi ring R dari kiri dan aksi ring S dari kanan secara simultan. Contoh berikut menjelaskan konsep homomorfisma pada (R, S) -modul.

Contoh 2. Diberikan $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ adalah $(M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), M_{3 \times 3}(\mathbb{R}))$ -modul seperti pada **Contoh 1**. Selanjutnya, $\mathbb{R}$ adalah $(M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), M_{3 \times 3}(\mathbb{R}))$ -modul dengan definisi operasi perkalian skalar

$$*', \bullet' : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

dengan $*', \bullet' \left(\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}, m, \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \right)$ didefinisikan sebagai

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} *' m \bullet' \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}$$

$$= (r_{11} + r_{12} + r_{21} + r_{22})m(s_{11} + s_{12} + s_{13} + s_{21} + s_{22} + s_{23} + s_{31} + s_{32} + s_{33}),$$

untuk setiap $\left(\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}, m, \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \right) \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

Diketahui fungsi $f : M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$f \left(\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} \right) = m_{11} + m_{12} + m_{13} + m_{21} + m_{22} + m_{23}$$

untuk setiap $\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$. Diperhatikan bahwa untuk setiap $\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} m'_{11} & m'_{12} & m'_{13} \\ m'_{21} & m'_{22} & m'_{23} \end{bmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}), \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \text{ dan } \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

berlaku

$$\begin{aligned} 1. & f \left(\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m'_{11} & m'_{12} & m'_{13} \\ m'_{21} & m'_{22} & m'_{23} \end{bmatrix} \right) \\ &= f \left(\begin{bmatrix} m_{11} + m'_{11} & m_{12} + m'_{12} & m_{13} + m'_{13} \\ m_{21} + m'_{21} & m_{22} + m'_{22} & m_{23} + m'_{23} \end{bmatrix} \right) \\ &= m_{11} + m'_{11} + m_{12} + m'_{12} + m_{13} + m'_{13} + m_{21} + m'_{21} + m_{22} + m'_{22} + m_{23} + m'_{23} \\ &= m_{11} + m_{12} + m_{13} + m_{21} + m_{22} + m_{23} + m'_{11} + m'_{12} + m'_{13} + m'_{21} + m'_{22} + m'_{23} \\ &= f \left(\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} \right) + f \left(\begin{bmatrix} m'_{11} & m'_{12} & m'_{13} \\ m'_{21} & m'_{22} & m'_{23} \end{bmatrix} \right) \\ 2. & f \left(\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \right) \\ &= f \left(\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \right) \\ &= f \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} a_{11} &= r_{11}m_{11}s_{11} + r_{12}m_{21}s_{11} + r_{11}m_{12}s_{21} + r_{12}m_{22}s_{21} + r_{11}m_{13}s_{31} + r_{12}m_{23}s_{31} \\ a_{12} &= r_{11}m_{11}s_{12} + r_{12}m_{21}s_{12} + r_{11}m_{12}s_{22} + r_{12}m_{22}s_{22} + r_{11}m_{13}s_{32} + r_{12}m_{23}s_{32} \\ &\vdots \\ a_{23} &= r_{21}m_{11}s_{13} + r_{22}m_{21}s_{13} + r_{21}m_{12}s_{23} + r_{22}m_{22}s_{23} + r_{21}m_{13}s_{33} + r_{22}m_{23}s_{33} \\ &= r_{11}m_{11}s_{11} + r_{12}m_{21}s_{11} + r_{11}m_{12}s_{21} + r_{12}m_{22}s_{21} + r_{11}m_{13}s_{31} + r_{12}m_{23}s_{31} \\ &\quad + r_{11}m_{11}s_{12} + r_{12}m_{21}s_{12} + r_{11}m_{12}s_{22} + r_{12}m_{22}s_{22} + r_{11}m_{13}s_{32} + r_{12}m_{23}s_{32} + \dots \\ &\quad + r_{21}m_{11}s_{13} + r_{22}m_{21}s_{13} + r_{21}m_{12}s_{23} + r_{22}m_{22}s_{23} + r_{21}m_{13}s_{33} + r_{22}m_{23}s_{33} \\ &= (r_{11} + r_{12} + r_{21} + r_{22})(m_{11} + m_{12} + \dots + m_{23})(s_{11} + s_{12} + \dots + s_{33}) \\ &= (r_{11} + r_{12} + r_{21} + r_{22})f \left(\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} \right) (s_{11} + s_{12} + \dots + s_{33}) \\ &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} *' f \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} \bullet' \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Diperhatikan bahwa f mengawetkan operasi penjumlahan pada $(M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), M_{3 \times 3}(\mathbb{R}))$ -modul serta f memenuhi sifat linier kiri terhadap ring $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ sekaligus linear kanan terhadap ring $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ secara simultan. Dengan demikian, f adalah homomorfisma pada $M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ -modul.

Pada **Contoh 2**, apabila aksi ring $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ pada sebelah kanan dihilangkan maka fungsi f yang semula merupakan homomorfisma $(M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), M_{3 \times 3}(\mathbb{R}))$ -modul akan berubah menjadi homomorfisma $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ -modul biasa. Pada kasus tersebut, aksi ring $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ pada sebelah kanan $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ -modul kebetulan masih bisa mempertahankan homomorfisma $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ -modul biasa menjadi homomorfisma $(M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), M_{3 \times 3}(\mathbb{R}))$ -modul.

Akan tetapi tidak semua aksi ring S pada sebelah kanan pada suatu R -modul kiri mengakibatkan homomorfisma R -modul tetap bertahan sebagai homomorfisma (R, S) -modul. Berikut adalah contoh untuk menjelaskan aksi ring S pada sebelah kanan pada suatu R -modul kiri yang mengakibatkan homomorfisma R -modul akan gagal menjadi homomorfisma (R, S) -modul.

Contoh 3. Misalkan diambil ring R dan S masing-masing merupakan ring himpunan semua bilangan riil $\mathbb{R}$, dan $\mathbb{R}^2$ adalah $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ -modul. Apabila didefinisikan fungsi $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dengan $f(x, y) = (2x, y)$, maka fungsi tersebut merupakan suatu homomorfisma $\mathbb{R}$ -modul. Akan tetapi apabila dilakukan aksi ring $\mathbb{R}$ pada sebelah kanan maka $f(x, y) = (2x, y)$ akan gagal untuk memenuhi homomorfisma $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ -modul. Hal ini disebabkan oleh kegagalan mempertahankan sifat linier kiri terhadap ring $\mathbb{R}$ dan linier kanan terhadap ring $\mathbb{R}$ secara simultan.

Misalkan $f : M \rightarrow M'$ adalah homomorfisma (R, S) -modul. Pada struktur (R, S) -modul terdapat tiga jenis homomorfisma (R, S) -modul yakni

1. Monomorfisma (R, S) -modul, apabila f merupakan fungsi injektif
2. Epimorfisma (R, S) -modul, apabila f merupakan fungsi surjektif
3. Isomorfisma (R, S) -modul, apabila f merupakan fungsi bijektif. Apabila terdapat isomorfisma (R, S) -modul dari M ke M' atau sebaliknya maka M dan M' dikatakan isomorfik yang dinotasikan dengan $M \cong M'$.

Perilaku aksi ring S pada (R, S) -modul memberikan pengaruh yang signifikan terhadap jenis-jenis homomorfisma pada (R, S) -modul. Pada saat membandingkan homomorfisma R -modul kiri klasik dengan homomorfisma (R, S) -modul, kehadiran ring S bertindak sebagai semacam restriksi tambahan (pembatas) yang memperketat syarat pemetaan. Perilaku aksi ring S menuntut bahwa pemetaan harus memenuhi linear kiri dan linier kanan secara simultan. Jika terdapat elemen skalar dari ring S yang merusak kesimultanan tersebut, maka syarat terpenuhinya isomorfisma kemungkinan akan mengalami kegagalan. Hal ini membuat dua buah (R, S) -modul bersifat isomorfis akan menjadi sulit tercapai apabila dibandingkan pada saat dipandang sebagai R -modul biasa.

Berikut diberikan sifat yang menunjukkan sifat-sifat homomorfisma (R, S) -modul yang berkaitan dengan pengawetan elemen identitas dan elemen invers. Sifat pengawetan ini tidak terpengaruh oleh adanya aksi ring S dari sebelah kanan pada homomorfisma R -modul, karena operasi yang dilakukan tidak melibatkan operasi perkalian skalar.

Lemma 1. Jika $f : M \rightarrow M'$ merupakan homomorfisma (R, S) -modul, maka

1. $f(0_M) = 0_{M'}$.
2. $f(-m) = -f(m)$, untuk setiap $m \in M$.

Bukti.

1. Diketahui bahwa $f : M \rightarrow M'$ merupakan homomorfisma (R, S) -modul. Akan dibuktikan bahwa $f(0_M) = 0_{M'}$. Elemen identitas di M adalah 0_M yang dapat dinyatakan sebagai

$0_M = 0_M + 0_M$. Karena f homomorfisma (R, S) -modul maka $f(0_M) = f(0_M + 0_M) = f(0_M) + f(0_M)$. Berdasarkan sifat elemen identitas maka $f(0_M)$ dapat dituliskan sebagai $f(0_M) = f(0_M) + 0_{M'}$ sehingga diperoleh bahwa $f(0_M) + f(0_M) = f(0_M) + 0_{M'}$. Dengan menggunakan hukum kanselasi kiri diperoleh $f(0_M) = 0_{M'}$.

2. Diketahui bahwa $f : M \rightarrow M'$ merupakan homomorfisma (R, S) -modul. Akan dibuktikan bahwa $f(-m) = -f(m)$ untuk setiap $m \in M$. Ambil sembarang $m \in M$. Diperhatikan bahwa $-m \in M$. Berdasarkan sifat dari elemen invers, diperoleh $m + (-m) = 0_M$ dan $(-m) + m = 0_M$. Karena $f : M \rightarrow M'$ merupakan homomorfisma (R, S) -modul, maka $f(m) + f(-m) = f(m + (-m)) = f(0_M)$. Pada pembuktian (1) diketahui bahwa $f(0_M) = 0_{M'}$ sehingga $f(m) + f(-m) = 0_{M'}$. Karena $0_{M'}$ merupakan elemen identitas di M' , maka $f(-m)$ merupakan invers kanan dari $f(m)$. Hal ini analog untuk kasus $(-m) + m = 0_M$, diperoleh $f(-m)$ merupakan invers kiri dari $f(m)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $f(-m) = -f(m)$. □

Berikut diberikan sifat yang menunjukkan sifat-sifat homomorfisma (R, S) -modul yang berkaitan dengan (R, S) -submodul. Sifat ini sangat dipengaruhi oleh adanya aksi ring S dari sebelah kanan pada homomorfisma R -modul, karena operasi yang dilakukan melibatkan operasi perkalian skalar. Dalam hal ini, struktur submodul yang terbentuk harus mempertahankan kekonsistenan aksi ring R dari kiri dan aksi ring S dari kanan secara simultan.

Lemma 2. Diberikan $f : M \rightarrow M'$ merupakan homomorfisma (R, S) -modul.

1. Jika H adalah (R, S) -submodul M , maka $f(H) = \{f(h) \mid h \in H\}$ adalah (R, S) -submodul M' .
2. Jika N adalah (R, S) -submodul M' , maka $f^{-1}(N) = \{m \in M \mid f(m) \in N\}$ adalah (R, S) -submodul M .

Bukti.

1. Diketahui bahwa $f : M \rightarrow M'$ adalah homomorfisma (R, S) -modul dan H merupakan (R, S) -submodul M . Akan dibuktikan $f(H) = \{f(h) \mid h \in H\}$ merupakan (R, S) -submodul M' . Karena H merupakan (R, S) -submodul M maka $H \subseteq M$. Karena $H \subseteq M$ maka setidaknya terdapat $0_M \in H$ sehingga $f(0_M) = 0_{M'}$. Karena pengawetan elemen identitas tersebut, maka dapat ditunjukkan $0_{M'} \in f(H)$ yang membuktikan $f(H)$ bukan himpunan kosong. Untuk setiap $x, y \in f(H), r \in R$ dan $s \in S$, dengan $x = f(h_1)$ dan $y = f(h_2)$ untuk $h_1, h_2 \in H$ berlaku $x - y = f(h_1) - f(h_2) = f(h_1 - h_2) \in f(H)$ dan $r \circ' x \bullet' s = r \circ' f(h_1) \bullet' s = f(r \circ h_1 \bullet s) \in f(H)$. Dengan demikian, terbukti $f(H)$ merupakan (R, S) -submodul M' .
2. Diketahui $f : M \rightarrow M'$ merupakan homomorfisma (R, S) -modul dan N merupakan (R, S) -submodul M' . Akan dibuktikan $f^{-1}(N) = \{m \in M \mid f(m) \in N\}$ merupakan (R, S) -submodul M . Karena N merupakan (R, S) -submodul M' maka $0_{M'} \in N$. Karena $f(m) \in N$ maka $f(0_M) = 0_{M'} \in N$ dengan $0_M \in M$ sehingga $0_M \in f^{-1}(N)$ yang berarti $f^{-1}(N)$ bukan himpunan kosong. Ambil sebarang $x, y \in f^{-1}(N), r \in R$, dan $s \in S$. Karena $x, y \in f^{-1}(N)$, maka $f(x) \in N$ dan $f(y) \in N$. Karena $f(x), f(y) \in N$ dan f homomorfisma (R, S) -modul maka $f(x) - f(y) = f(x - y) \in N$ sehingga $x - y \in f^{-1}(N)$. Lebih lanjut, karena $f(x) \in N, r \in R$, dan $s \in S$ serta f homomorfisma (R, S) -modul maka $r \circ' f(x) \bullet' s = f(r \circ x \bullet s) \in N$, sehingga mengakibatkan $r \circ x \bullet s \in f^{-1}(N)$. Dengan demikian, terbukti $f^{-1}(N)$ merupakan (R, S) -submodul.

□

Apabila aksi ring S untuk sebelah kanan pada **Lemma 2** dihilangkan, maka sifat-sifat pengawetan suatu (R, S) -submodul pada homomorfismanya akan berubah menjadi sifat pengawetan suatu R -submodul biasa. Selanjutnya disajikan pendefinisian kernel dan image pada homomorfisma (R, S) -modul.

Definisi 3. Diberikan $f : M \rightarrow M'$ merupakan homomorfisma (R, S) -modul.

1. Kernel dari f , dinotasikan dengan $\ker(f)$, didefinisikan

$$\ker(f) = \{m \in M \mid f(m) = 0_{M'}\}$$

2. Image dari f , dinotasikan dengan $\text{im}(f)$, didefinisikan

$$\text{im}(f) = \{m' \in M' \mid f(m) = m', m \in M\}.$$

Homomorfisma (R, S) -modul memiliki pengaruh terhadap keberadaan kernel dan image pada homomorfisma R -modul. Karena homomorfisma (R, S) -modul harus menjaga aksi kiri dari ring R sekaligus aksi kanan dari ring S , maka kernel dan image yang dihasilkan akan secara otomatis mewarisi struktur dua sisi tersebut. Bentuk kernel dan image pada homomorfisma (R, S) -modul mirip dengan bentuk kernel dan image pada homomorfisma R -modul. Akan tetapi, dengan adanya aksi ring S pada sebelah kanan homomorfisma R -modul, hal ini mengakibatkan dampak terhadap struktur dari kernel dan image yang harus menjaga aksi kiri dari ring R sekaligus aksi kanan dari ring S secara simultan. Struktur kernel dan image sebagai submodul tentunya juga harus menjaga aksi kiri dari ring R sekaligus aksi kanan dari ring S secara simultan.

Sifat yang disajikan pada **Lemma 3** menjelaskan struktur $\ker(f)$ dan $\text{im}(f)$ sebagai suatu (R, S) -submodul. Struktur tersebut sangat dipengaruhi oleh adanya perilaku aksi ring S dari sebelah kanan.

Lemma 3. Jika $f : M \rightarrow M'$ merupakan homomorfisma (R, S) -modul, maka kernel f merupakan (R, S) -submodul M .

Bukti. Diketahui bahwa $f : M \rightarrow M'$ merupakan homomorfisma (R, S) -modul. Akan dibuktikan bahwa $\ker(f)$ merupakan (R, S) -submodul M . Berdasarkan definisi dari $\ker(f)$ diperoleh $\ker(f) \subseteq M$. Diketahui $f(0_M) = 0_{M'}$, menunjukkan setidaknya terdapat satu elemen di $\ker(f)$ yaitu 0_M sehingga terbukti $\ker(f)$ bukan himpunan kosong. Ambil sembarang $x, y \in \ker(f)$, $r \in R$, dan $s \in S$. Karena $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0_{M'} - 0_{M'} = 0_{M'}$, sehingga diperoleh $x - y \in \ker(f)$. Lebih lanjut, $f(r \circ x \bullet s) = r \circ f(x) \bullet s = r \circ (0_{M'}) \bullet s = (r \circ 0_{M'}) \bullet s = 0_{M'}$ sehingga $r \circ x \bullet s \in \ker(f)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $\ker(f)$ merupakan (R, S) -submodul M . □

Lemma 4. Jika $f : M \rightarrow M'$ merupakan homomorfisma (R, S) -modul, maka image f merupakan (R, S) -submodul M' .

Bukti. Diketahui bahwa $f : M \rightarrow M'$ merupakan homomorfisma (R, S) -modul. Akan dibuktikan bahwa $\text{im}(f)$ merupakan (R, S) -submodul M' . Berdasarkan definisi dari image diperoleh

leh $\text{im}(f) \subseteq M'$. Diketahui $f(0_M) = 0_{M'}$ menunjukkan setidaknya terdapat satu elemen di $\text{im}(f)$ yaitu $0_{M'}$ sehingga $\text{im}(f)$ bukan himpunan kosong. Ambil sembarang $x, y \in \text{im}(f)$, $r \in R$, dan $s \in S$. Misalkan $x = f(a)$ dan $y = f(b)$ dengan $a, b \in M$. Perhatikan bahwa $x - y = f(a) - f(b) = f(a - b)$, untuk $a - b \in M$, hal ini mengakibatkan $x - y \in \text{im}(f)$. Selanjutnya, $r \circ' x \bullet' s = r \circ' f(a) \bullet' s = f(r \circ a \bullet s)$, dengan $r \circ a \bullet s \in M$. Akibatnya, $r \circ' x \bullet' s \in \text{im}(f)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $\text{im}(f)$ merupakan (R, S) -submodul M' . $\square$

Apabila aksi ring S untuk sebelah kanan pada Lemma 3 dan Lemma 4 dihilangkan, maka struktur $\ker(f)$ dan $\text{im}(f)$ sebagai suatu (R, S) -submodul akan berubah menjadi suatu R -submodul biasa seperti pada pembahasan homomorfisma modul biasa. Pada (R, S) -modul terdapat hubungan antara struktur kernel sebagai syarat cukup dan perlu sifat injektif pada homomorfisma.

Lemma 5. Diberikan $f : M \rightarrow M'$ merupakan homomorfisma (R, S) -modul. Selanjutnya, f bersifat injektif jika dan hanya jika $\ker(f) = \{0_M\}$.

Bukti.

$(\Rightarrow)$ Diketahui f homomorfisma (R, S) -modul. Akan dibuktikan bahwa jika f injektif maka $\ker(f) = \{0_M\}$. Ambil sembarang $a \in \ker(f)$. Karena $f(0_M) = 0_{M'}$ maka $f(a) = f(0_M)$. Oleh karena f injektif maka haruslah $a = 0_M$. Jadi, terbukti jika f injektif maka $\ker(f) = \{0_M\}$.

$(\Leftarrow)$ Diketahui f homomorfisma (R, S) -modul. Akan dibuktikan bahwa jika $\ker(f) = \{0_M\}$ maka f injektif. Ambil sembarang $a, b \in M$ dengan $f(a) = f(b)$. Karena f adalah homomorfisma (R, S) -modul maka $f(a - b) = f(a) - f(b) = f(a) - f(a) = 0_{M'}$. Oleh karena $f(a - b) = 0_{M'}$ maka $a - b \in \ker(f)$. Karena diketahui $\ker(f) = \{0_M\}$, maka haruslah $a - b = 0_M$. Dengan demikian diperoleh $a = b$ yang menunjukkan bahwa f injektif. Dengan demikian, terbukti f injektif jika dan hanya jika $\ker(f) = \{0_M\}$. $\square$

Berdasarkan suatu (R, S) -modul dan (R, S) -submodul, selanjutnya dapat dikonstruksi suatu (R, S) -modul faktor. Konstruksi ini tentunya dengan memperhatikan syarat kekonsistenan aksi ring R dari kiri dan aksi ring S dari kanan secara simultan.

Teorema 1. Diberikan M merupakan (R, S) -modul dan N merupakan (R, S) -submodul M . Suatu grup faktor M/N merupakan (R, S) -modul dengan operasi perkalian skalar

$$r * (x + N) \bullet s = (r * x \bullet s) + N$$

untuk setiap $r \in R, x + N \in M/N$ dan $s \in S$.

Bukti. Diketahui M merupakan (R, S) -modul dan N merupakan (R, S) -submodul M . Karena M merupakan (R, S) -modul maka M merupakan suatu grup Abel terhadap penjumlahan. Selanjutnya, karena N merupakan (R, S) -submodul M maka N merupakan suatu subgrup Abel terhadap penjumlahan. Dengan demikian dapat dibentuk suatu grup factor M/N dimana

$$M/N = \{x + N \mid x \in M\}.$$

Operasi pada M/N didefinisikan sebagai

$$(x + N) + (y + N) = (x + y) + N$$

untuk setiap $x + N, y + N \in M/N$. Diperhatikan bahwa

1. Untuk setiap $x + N, y + N \in M/N$ berlaku $(x + N) + (y + N) = (x + y) + N$, sehingga operasi $+$ tertutup pada M/N
2. Untuk setiap $x + N, y + N, z + N \in M/N$ berlaku

$$((x + N) + (y + N)) + z + N = ((x + y) + N) + (z + N) = (x + y) + z + N$$

$$= x + (y + z) + N = (x + N) + (y + z + N) = (x + N) + ((y + N) + (z + N))$$
 sehingga operasi $+$ bersifat asosiatif pada M/N
3. Terdapat elemen identitas $0_M + N \in M/N$ sedemikian hingga

$$(x + N) + (0_M + N) = (0_M + N) + (x + N) = x + N$$

4. Untuk setiap elemen $x + N \in M/N$ memiliki invers yakni $-x + N \in M/N$ sedemikian hingga

$$(x + N) + (-x + N) = (-x + N) + (x + N) = 0_M + N$$

5. Untuk setiap $x + N, y + N \in M/N$ berlaku

$$(x + N) + (y + N) = (x + y) + N = (y + x) + N = (y + N) + (x + N)$$

sehingga operasi $+$ bersifat komutatif pada M/N .

Dengan demikian, M/N terhadap operasi penjumlahan membentuk suatu grup Abel. Selanjutnya didefinisikan operasi perkalian skalar $*, \bullet : R \times M/N \times S \rightarrow M/N$ dengan

$$*, \bullet(r, x + N, s) = r * (x + N) \bullet s \stackrel{\text{def}}{=} (r * x \bullet s) + N$$

untuk setiap $(r, x + N, s) \in R \times M/N \times S$. Akan dibuktikan bahwa M/N merupakan (R, S) -modul. Diperhatikan bahwa untuk setiap $r_1, r_2 \in R, x + N, y + N \in M/N$, dan $s_1, s_2 \in S$ memenuhi

1. $r_1 * (x + N + y + N) \bullet s_1 = r_1 * (x + N) \bullet s_1 + r_1 * (y + N) \bullet s_1$
2. $(r_1 + r_2) * (x + N) \bullet s_1 = r_1 * (x + N) \bullet s_1 + r_2 * (x + N) \bullet s_1$
3. $r_1 * (x + N) \bullet (s_1 + s_2) = r_1 * (x + N) \bullet s_1 + r_1 * (x + N) \bullet s_2$
4. $r_1 * (r_2 * (x + N) \bullet s_1) \bullet s_2 = (r_1 r_2) * (x + N) \bullet (s_1 s_2)$

Dengan demikian, terbukti bahwa M/N merupakan (R, S) -modul. $\square$

Untuk selanjutnya, (R, S) -modul M/N pada **Teorema 1** dinamakan (R, S) -modul faktor M oleh N . Apabila aksi ring S disebelah kanan pada **Teorema 1** dihilangkan, maka M/N yang semula merupakan (R, S) -modul faktor M oleh N , akan berubah menjadi M/N merupakan R -modul faktor M oleh N . Dengan kata lain, (R, S) -modul faktor dapat diperoleh dengan memperluas R -modul dengan menambahkan aksi ring S pada sebelah kanan dengan mempertahankan konsistensi aksi ring R dari kiri dan aksi ring S dari kanan secara simultan.

Akibat 1. Apabila M dan M' merupakan (R, S) -modul dan $f : M \rightarrow M'$ merupakan homomorfisma (R, S) -modul, maka $M / \ker(f)$ adalah modul faktor M oleh $\ker(f)$.

Bukti. Berdasarkan **Lemma 3** diperoleh bahwa $\ker(f)$ adalah (R, S) -submodul M . Selanjutnya berdasarkan **Teorema 1** diperoleh bahwa $M / \ker(f)$ adalah modul faktor M oleh $\ker(f)$. $\square$

Berdasarkan **Lemma 4**, diketahui bahwa $\text{im}(f)$ adalah (R, S) -submodul M' . Selanjutnya dibentuk suatu fungsi $v : M / \ker(f) \rightarrow \text{im}(f)$ dengan definisi

$$v(m + \ker(f)) = f(m)$$

untuk setiap $m + \ker(f) \in M/\ker(f)$. **Teorema 2** menjelaskan hubungan struktur antara modul faktor $M/\ker(f)$ dan $\text{im}(f)$.

Teorema 2. Apabila M dan M' merupakan (R, S) -modul dan $f : M \rightarrow M'$ merupakan homomorfisma (R, S) -modul, maka $M/\ker(f)$ isomorfis dengan $\text{im}(f)$

Bukti. Diperhatikan bahwa untuk setiap $m_1 + \ker(f), m_2 + \ker(f) \in M/\ker(f)$ dan $r \in R, s \in S$ berlaku

1. $v(m_1 + \ker(f) + m_2 + \ker(f)) = v(m_1 + m_2 + \ker(f)) = f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$
 $= v(m_1 + \ker(f)) + v(m_2 + \ker(f))$
2. $v(r * (m_1 + \ker(f)) \bullet s) = v(r * m_1 \bullet s + \ker(f)) = f(r * m_1 \bullet s) = r *' f(m_1) \bullet' s$
 $= r *' v(m_1 + \ker(f)) \bullet' s$

Dengan demikian, v adalah suatu homomorfisma (R, S) -modul. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa v bersifat injektif dan surjektif.

Diperhatikan bahwa

1. $\ker(v) = \{m + \ker(f) \in M/\ker(f) \mid v(m + \ker(f)) = 0_{M'}\}$
 $= \{m + \ker(f) \in M/\ker(f) \mid f(m) = 0_{M'}\}$
 $= \{m + \ker(f) \in M/\ker(f) \mid m \in \ker(f)\}$
 $= \{0_{M/\ker(f)}\}$

Karena $\ker(v) = \{0_{M/\ker(f)}\}$ maka f bersifat injektif

2. $\text{im}(v) = \{m' \in \text{im}(f) \mid m' = v(m + \ker(f)), m + \ker(f) \in M/\ker(f)\}$
 $= \{m' \in \text{im}(f) \mid m' = f(m), m \in M\}$
 $= \text{im}(f)$

Karena $\text{im}(v) = \text{im}(f)$ maka f bersifat surjektif.

Dengan demikian, $v : M/\ker(f) \rightarrow \text{im}(f)$ merupakan suatu isomorfisma (R, S) -modul. Akibatnya $M/\ker(f)$ isomorfis dengan $\text{im}(f)$. $\square$

4. Kesimpulan

Homomorfisma (R, S) -modul dibentuk dari homomorfisma R -modul dengan menambahkan aksi ring S disebelah kanan. Suatu homomorfisma yang hanya bersifat linear kiri terhadap ring R pada homomorfisma R -modul, berubah syarat memenuhi sifat linier kiri terhadap ring R sekaligus linear kanan terhadap ring S secara simultan pada homomorfisma (R, S) -modul. Suatu homomorfisma (R, S) -bimodul dapat dipandang sebagai kejadian khusus dari homomorfisma (R, S) -modul dengan mengganti syarat sifat linier kiri dan linier kanan yang simultan menjadi tidak simultan. Suatu homomorfisma R -modul dapat dipandang sebagai kejadian khusus dari homomorfisma (R, S) -modul dengan menghapus aksi ring S dari sebelah kanan, sehingga hanya mempertahankan linier dari kiri terhadap R . Lebih lanjut, struktur kernel dan image suatu (R, S) -homomorfisma modul, serta (R, S) -modul faktor juga disyaratkan harus menjaga kekonsistenan aksi kiri dari ring R sekaligus aksi kanan dari ring S secara simultan. Untuk penelitian selanjutnya dapat dilakukan pada pengembangan Teorema Fundamental Homomorfisma pada (R, S) -modul dengan memanfaatkan konsep homomorfisma (R, S) -modul yang sudah diperoleh pada artikel ini.

Kontribusi Penulis. **Ira Lefiana:** Merupakan penulis dengan kontribusi investigasi, analisis formal dan persiapan draf. **Suroto:** Merupakan penulis dengan kontribusi konseptualisasi, metodologi, validasi dan penyuntingan. Selain itu juga merupakan penulis korespondensi. **Ari Wardayani:** Merupakan penulis de-

ngan kontribusi administrasi. **Najmah Istikaanah:** Merupakan penulis dengan kontribusi administrasi.

Ucapan Terima Kasih. Para penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah berkontribusi dalam penelitian ini dan dalam penyusunan manuskrip. Kami sangat menghargai editor dan reviewer atas masukan serta dukungannya dalam menyempurnakan karya ini.

Pembiayaan. Penelitian ini tidak menerima pendanaan eksternal.

Konflik Kepentingan. Para penulis menyatakan tidak ada konflik kepentingan yang terkait dengan artikel ini.

Ketersediaan Data. Tidak tersedia.

Referensi

- [1] J. A. Gallian, *Contemporary Abstract Algebra*, 7th ed. Belmont, CA: Brooks-Cole/Cengage Learning, 2025.
- [2] D. Saracino, *Abstract Algebra: A First Course*, 2nd ed. Long Grove, IL: Waveland Press, 2017.
- [3] J. B. Fraleigh and N. Brand, *A First Course in Abstract Algebra*, 8th ed. London: Pearson Education, Limited, 2020.
- [4] I. Assem and F. U. Coelho, *An Introduction to Module Theory*. Oxford: Oxford University Press, 2024.
- [5] A. Facchini, *Introduction to Ring and Module Theory*, 1st ed., ser. Compact Textbooks in Mathematics. Cham: Birkhäuser, 2025, doi:[10.1007/978-3-031-82509-5](https://doi.org/10.1007/978-3-031-82509-5).
- [6] F. Wang and H. Kim, *Foundations of Commutative Rings and Their Modules*, 2nd ed., ser. Algebra and Applications. Singapore: Springer, 2024, doi:[10.1007/978-981-97-5284-3](https://doi.org/10.1007/978-981-97-5284-3).
- [7] H. Bourlès, *Fundamentals of Advanced Mathematics: V1: Categories, Algebraic Structures, Linear and Homological Algebra*. Amsterdam: Elsevier / ScienceDirect, 2017.
- [8] D. Teixeira, "Algebras and bimodules," Lecture Notes, Scottish Talbot Workshop, Edinburgh, 2022.
- [9] H. Jonsson, "Structure and representations of bimodule categories," Ph.D. dissertation, Department of Mathematics, Uppsala University, Uppsala, 2023.
- [10] Ø. Solberg, K. B. Vashaw, and S. Witherspoon, "Noncommutative tensor triangular geometry: Modules, bimodules, and unipotent hopf algebras," 2026.
- [11] T.-Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*, ser. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1991, vol. 131.
- [12] P. Aluffi, *Algebra: Chapter 0*, ser. Graduate Studies in Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society, 2009, vol. 104.
- [13] J. J. Rotman, *Advanced Modern Algebra*, 2nd ed., ser. Graduate Studies in Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society, 2010, vol. 114.
- [14] J. Fjelstad and U. Schreiber, "Bimodules," Lecture Notes, Department of Mathematics, Universität Hamburg, Hamburg, 2007.
- [15] D. A. Yuwaningsih, I. E. Wijayanti, and B. Surodjo, "A study of (R,S) -bimodules homomorphisms," *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*, vol. 22, no. 2, pp. 315–321, 2026, doi:[10.20956/j.v22i2.48175](https://doi.org/10.20956/j.v22i2.48175).
- [16] E. D. Ratnasari, S. Suroto, and B. H. Guswanto, "Pembentukan (R, S) -modul dari (R, S) -bimodul," in *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Statistika*, 2023, pp. 20–28.
- [17] T. Khumrapussorn, S. Pianskool, and M. Hall, " (R,S) -modules and their fully and jointly prime submodules," *International Mathematical Forum*, vol. 7, no. 33, pp. 1631–1643, 2012.
- [18] T. Khumrapussorn, "Left R -prime submodules," *International Mathematical Forum*, vol. 8, no. 13, pp. 619–626, 2013, doi:[10.12988/imf.2013.13064](https://doi.org/10.12988/imf.2013.13064).
- [19] D. A. Yuwaningsih and I. E. Wijayanti, "On jointly prime radicals of (R,S) -modules," *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, vol. 21, no. 1, pp. 25–34, Apr 2015, doi:[10.22342/jims.21.1.199.25-34](https://doi.org/10.22342/jims.21.1.199.25-34).