BUKTI DAN PEMBUKTIAN DALAM PENGAJARAN MATEMATIKA DI SEKOLAH MENENGAH

Tedy Machmud
Fakultas MIPA Universitas Negeri Gorontalo

Abstrak: Pengajaran matematika pada dasarnya dititikberatkan pada perubahan tingkah laku yang berorientasi pada tiga aspek menurut Taksonomi Bloom, yaitu aspek kognirif, afektif dan psikomotorik. Dengan tidak mengecilkan aspek lain, aspek penalaran matematika menjadi fokus utama karena penalaran matematika ini merupakan semacam benang merah yang mendasari dan menjiwai seluruh matematika. Salah satu hal yang terpenting dalam kegiatan bernalar dan penalaran adalah perlunya penguasaan akan prinsip-prinsip logika. Prinsip-prinsip logika ini sangat penting dipahami terutama disaat akan memahami konsep bukti dan pembuktian dalam matematika. Konsep bukti dan pembuktian dalam matematika pada dasarnya telah dikenal siswa sekolah menengah. Strategi pembuktian dalam matematika yang telah dikenal siswa tersebut secara umum dapat dibagi atas dua kelompok besar yaitu pembuktian secara langsung dan pembuktian secara tidak langsung.

Kata-kata kunci: Logika, penalaran, bukti dan pembuktian

Prinsip-prinsip logika yang diajarkan kepada siswa di sekolah menengah adalah prinsip-prinsip dalam logika matematika (logika formal), yang digunakan sebagai sarana pembuktian yang sah dalam matematika. Mengenai prinsip-prinsip logika ada ahli matematika berpendapat bahwa hal ini tidak/belum perlu diajarkan kepada siswa sekolah menengah, dengan alasan bahwa konsep-konsep/ prinsip-prinsip logika tidak menarik untuk dipelajari oleh siswa sekolah menengah bahkan mungkin hal ini sulit untuk dipelajari.

Sedangkan pendapat yang lain mengatakan bahwa tanpa aturan penarikan kesimpulan tidaklah mungkin bagi siswa untuk menentukan apakah sebuah argumen valid atau tidak, sehingga dengan sendirinya siswa tidak tahu apakah suatu pernyataan atau proposisi maupun teorema/dalil terbukti atau tidak. Lebih parah lagi siswa akan membenarkan apa saja yang dikatakan gurunya. Pendapat ini didasari oleh pemikiran bahwa dalam pengajaran matematika aspek penalaran matematika menjadi fokus utama karena penalaran matematika ini merupakan semacam benang merah yang mendasari dan menjiwai seluruh matematika, dan salah satu aspek terpenting dalam kegiatan bernalar dan penalaran adalah perlunya penguasaan akan prinsip-prinsip yang mendasarinya yakni prinsip-prinsip logika.

Di samping itu jika ditinjau dari tahap perkembangan berpikir anak menurut teori Piaget yang dikutip oleh Ruseffendy (1982:24) siswa sekolah menengah, tahap berpikirnya dikategorikan pada tahap ke IV yaitu: tahap pengerjaan-pengerjaan logis dikerjakan tanpa bantuan benda-benda konkrit. Pada tahap ini siswa sudah dapat berpikir secara abstrak menurut logika-logika tertentu. Periode operasi formal ini disebut juga periode operasi hipotetik deduktif yang merupakan tahap tertinggi dari perkembangan intelektual (Hudojo, 1990:37). Lebih lanjut menurut Hudojo, siswa pada periode ini sudah dapat memberikan alasan dengan menggunakan lebih banyak simbol atau gagasan dalam cara berpikirnya. Siswa sudah dapat mengoperasikan argumen-argumen tanpa dikaitkan dengan benda-benda empirik. Siswa telah mampu melihat hubungan-hubungan abstrak dan menggunakan proposisi-proposisi logik-formal termasuk aksioma dan definisi-definisi verbal. Siswa juga sudah dapat berpikir kombinatorial untuk menuju pada penyelesaian suatu masalah matematik.

Berdasarkan pemikiran di atas prinsip-prinsip logika dalam matematika sebaiknya diperkenalkan kepada siswa sekolah menengah, akan tetapi porsi logika diajarkan hanyalah yang berkaitan langsung dengan pengertian-pengertian dalam penalaran yang digunakan dan bukan sebagai bagian yang terpisah. Dengan demikian ada dua efek yang bisa dicapai dengan pengajaran prinsip-prinsip logika ini yaitu efek instruksional dan efek pengiring yaitu akan lebih mempertajam cara siswa dalam melakukan penalaran-penalaran matematika dan secara umum dapat berkakibat positif untuk penalaran-penalaran yang nonmatematik.

Bukti dan Pembuktian Dalam Matematika

Konsep bukti dalam matematika pada dasarnya telah mulai dikenal siswa di sekolah menengah. Mungkin konsep ini belum secara langsung diajarkan pada mereka, namun mereka telah sering mendengar istilah bukti dan pembuktian banyak digunakan dalam berbagai konteks yang selanjutnya mereka abstraksikan sebagai konsep bukti. Walaupun konsep bukti mereka ini masih kabur namun cukup memberikan suatu gambaran akan keberadaan penalaran dalam suatu pembuktian. Dan selanjutnya mereka percaya bahwa kebenaran suatu proporsi-proporsi memerlukan bukti. Akan tetapi bila mereka dihadapkan pada suatu soal yang memerlukan bukti, cukup diragukan reaksi mereka, terhadap sejauh mana bagian-bagian bukti yang diperlukan dan seberapa kuat alasan-alasan yang harus diajukan.

Siswa berpikir secara empiris yang merupakan hasil dari pengalaman-pengalaman mereka yang selalu berurusan dengan dalil-dalil yang bersifat empiris (yang jelas terbukti) dengan mengemukakan bukti-bukti yang dapat diamati atau dengan mendengarkan pernyataan dari mereka yang lebih mengetahui. Meskipun dasar pemikiran deduktif yang dipakai siswa masih cenderung menganggap dasar pemikiran sebagai dalil empiris, kriteria mereka terhadap bukti umumnya digambarkan dalam ungkapan berikut: “ jika saya yakin pada suatu proposisi berarti proposisi tersebut telah terbukti”. Siswa mempunyai konsep bukti terlihat dari reaksinya terhadap pertanyaan-pertanyaan yang diajukan guru, seperti pertanyaan mengapa, apa sebab, bagaimana anda tahu atau apa yang menyebabkan anda berpikir demikian? Siswa akan menyadari bahwa pertanyaan tersebut memerlukan bukti atau alasan-alasan untuk menjawabnya.

Berkaitan dengan pengajaran metoda pembuktian ini ada beberapa hal yang perlu diperhatikan oleh guru, yaitu:

1. karena pengertian akan bukti masih banyak yang kabur dan intuitif dalam memahaminya, maka seyogyanya guru harus meluruskan pengertian tentang hal ini. Dalam menambah pengetahuan dasar siswa tentang pembuktian seharusnya guru memberikan pengalaman yang luas bagi siswa dalam membuktikan pernyataan serta bimbingan yang terarah;
2. guru harus membuat soal-soal tersendiri yang bertujuan untuk latihan dalam mempertajam konsep pembuktian siswa, sebab pada umumnya soal-soal yang ada pada buku sedikit sekali memuat soal-soal seperti yang dimaksud di atas;
3. tujuan pengajaran metoda bukti ini sebaiknya ditekankan pada prinsip-prinsip pembuktian dan pengembangan keterampilan dalam menyajikan bukti, sehingga dengan demikian siswa tidak perlu menghafal bukti-bukti dan teorema-teorema. Agar siswa lebih menikmati dan memahami sifat khas yang penting yakni struktur bangunnya yang aksiomatik deduktif, maka sebaiknya kepada siswa

disuruh melakukan pendaftaran semua aksioma dan teorema yang digunakan dalam pembuktian;
4. perlu disampaikan pada siswa bahwa dalam membuktikan suatu teorema atau dalil, hendaknya harus mengetahui maksud teorema tersebut, sifat-sifat apa yang akan digunakan untuk membuktikan teorema itu, strategi apa yang akan digunakan untuk membuktikan teorema itu dan penggunaan pembuktian teorema tersebut.

Strategi Pembuktian

Cooney yang dikuti oleh Wirano (1993:3) mengidentifikasi empat bentuk pembuktian yaitu:

1. bukti sebagai jaminan atas kebenaran dari pernyataan yang didasarkan pada pengamalaman pribadi;
2. bukti sebagai jaminan atas kebenaran dari pernyataan yang didasarkan pada pendapat para ahli;
3. bukti sebagai jaminan atas kebenaran dari pernyataan (teorema) yang didasarkan argumen-argumen yang sahih/ valid;
4. bukti sebagai jaminan atas kebenaran dari pernyataan (teorema) yang didasarkan pada induksi matematis.

Jenis bukti yang ke 3 dan ke 4 inilah yang paling banyak digunakan (dominan) dalam matematika. Bila suatu bukti digunakan dalam matematika, pembuktian semacam ini yang dimaksud.

Seorang guru dapat membantu siswa untuk lebih cepat memahami pembuktian dengan menggunakan beberapa strategi pembuktian. Berikut ini akan diuraikan beberapa strategi pembuktian yang dihimpun dari berbagai literatur antara lain dalam Suhakso (1990:56-70), Bachtiar (1990:24-51), Hudojo (1990:70-76), Daiman (1994:92), Purcell (1995:538-539), Purwanto (1998:3-14).

1. Modus Ponens

Bentuk argumennya: p $\Rightarrow$ q

Digunakan untuk membuktikan suatu pernyataan q. Siswa diharapkan untuk menemukan proposisi yang berentuk p $\Rightarrow$ q, kemuadian menunjukkan pernyataan bernilai benar. Jika pernyataan p benar, kesimpulannya q benar dan pernyataan q terbukti. Modus Ponens biasanya diberi notasi: $[(p \Rightarrow q\ )\ dan\ p] \Rightarrow q$.

Contoh: Buktikan: $x^2 - 4x + 5 = 0$, tidak mempunyai akar real.

Bukti:

Jika Diskriminan D < 0, diambil sebagai p, dan sebagai q diambil $x^2 - 4x + 5 = 0$, tidak mempunyai akar real. Sekarang tinggal menunjukkan apakah D < 0. Jika ternyata p benar, maka terbukti bahwa: $x^2 - 4x + 5 = 0$, tidak mempunyai akar real.

2. Bukti dengan contoh penyangkal

Bukti dengan contoh penyangkal merupakan suatu bentuk strategi bukti dengan menunjukkan suatu generalisasi yang salah, yaitu dengan memperlihatkan sedikitnya satu yang tidak terpenuhi. Sebagai ilustrasi diberikan contoh berikut:

Contoh: Buktikan pernyataan bahwa: setiap grafik parabola adalah fungsi, merupakan pernyataan yang salah

Bukti: Ambil suatu lengkungan $x = y^2$, merupakan parabola tapi bukan suatu fungsi.

3. Pembuktian dengan menggunakan kasus

Prosedur pembuktian dilakukan dengan pemeriksaan satu persatu (kasus demi kasus) terhadap setiap kemungkinan, setelah itu baru diambil suatu kesimpulan benar atau salahnya suatu teorema.

Contoh: Buktikan: $|a + b| \leq |a| + |b|$; a, b bilangan real.

Bukti:

Ambil semua kasus yang mungkin dari teorema tersebut:

a > 0 dan b > 0 $\rightarrow$ $|a + b| = |a| + |b|$

a > 0 dan b = 0 $\rightarrow$ $|a + b| = |a| + |b|$

a > 0 dan b < 0 $\rightarrow$ $|a + b| < |a| + |b|$

a = 0 dan b > 0 $\rightarrow$ $|a + b| = |a| + |b|$

a = 0 dan b = 0 $\rightarrow$ $|a + b| = |a| + |b|$

a = 0 dan b < 0 $\rightarrow$ $|a + b| = |a| + |b|$

a < 0 dan b > 0 $\rightarrow$ $|a + b| < |a| + |b|$

a < 0 dan b = 0 $\rightarrow$ $|a + b| = |a| + |b|$

a < 0 dan b < 0 $\rightarrow$ $|a + b| = |a| + |b|$

Dari 9 kasus di atas yang mungkin untuk teorema tersebut dapat disimpulkan bahwa $|a+b| \leq |a| + |b|$; a, b bilangan real, adalah benar.

4. Pembuktian dengan cara kondisional

Suatu pembuktian yang berpangkal dari suatu pernyataan p yang diasumsikan benar, dapat diturunkan pernyataan q, sehingga kesimpulannnya adalah p $\Rightarrow$ q. Bentuk argumennya adalah sebagai berikut:

p	dengan p adalah pernyataan yang diasumsikan benar,
q	q adalah pernyataan yang dapat diturunkan, dan
———————	p $\Rightarrow$ q adalah kesimpulan.
p $\Rightarrow$ q	

Strategi ini dikenal dengan : Jika p maka q.

Contoh: Buktikan:jika *a* adalah bilangan ganjil maka a^2 bilangan ganjil.

Bukti:

Misalkan atau asumsikan a bilangan ganjil. Dengan asumsi ini dapat diturunkan a^2. Selanjutnya bilangan ganjil *a* dirumuskan dalam bentuk: $a = 2k + 1$, dengan *k* adalah bilangan bulat.

Untuk bilangan ganjil $a \rightarrow a^2 = (2k+1)^2$

$$= 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 2(2k^2 + 2k) + 1$$

karena $2k^2$ dan 2k adalah bulat, maka $(2k^2 + 2k)$ adalah bulat yang kita misalkkan sebagai w. Jadi: $2(2k^2 + 2k) + 1$

$$= 2w + 1$$

= ganjil.

Jadi terbukti bahwa a dan a^2 adalah ganjil juga.

5. Pembuktian dengan implikasi transitif

Pembuktian dengan implikasi transitif adalah suatu pernyataan jika p maka q dan jika q maka r akibatnya jika p maka r. Bentuk argumennya adalah:

$$p \Rightarrow q$$
$$q \Rightarrow r$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$p \Rightarrow r$$

Strategi ini biasanya digunakan dengan strategi pembuktian kondisional.

Contoh: Buktikan:jika a > b dan b > c maka a > c, untuk a, b ∈ R.

Bukti:

a > b dianggap sebagai $p \Rightarrow q$, b > c dianggap sebagai $q \Rightarrow r$,

dan a > c dianggap sebagai kesimpulan.

a > b → a = b + m dengan m > 0 → b = a – m

b > c → b = c + n dengan n > 0 → c = b – n

Selanjutnya: c = b – n, untuk b = a – m diperoleh

c = a – m – n

a = c + m + n; karena m > 0 dan n > 0 maka m + n > 0

Karena itulah a = c + (m + n) menyebabkan a > c.

Jadi terbukti bahwa jika a > b dan b > c maka a > c

5. Pembuktian dengan kontrapositif (kontraposisi)

Pembuktian ini adalah termasuk pembuktian secara tidak lansung. Suatu pernyataan implikasi $p \Rightarrow q$ dapat dibuktikan dengan pernyataan yang ekivalen dengan pernyataan semula. Pernyataan $p \Rightarrow q$ ekivalen dengan kontraposisinya yaitu $\sim q \Rightarrow \sim p$ (~ p adalah ingkaran dari pernyataan p)

Bentuk argumennya:

$$\sim q \Rightarrow \sim p$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$p \Rightarrow q$$

Sebagai ilustrasi akan dibuktikan implikasi berikut:

Contoh:

“Jika x^2 bilangan genap maka x juga bilangan genap”. Kontraposisi implikasi ini adalah: “ jika x bukan bilangan genap, maka x^2 bukan bilangan genap. Karena setiap bilangan bulat yang bukan bilangan genap adalah bilangan ganjil, maka kontraposisi yang akan dibuktikan adalah: “Jika x bilangan ganjil, maka x^2 juga bilangan ganjil”. Bukti implikasi ini sudah dibuktikan pada pembahasan tentang pembuktian dengan cara kondisional. Ini berarti bentuk implikasi : “Jika x^2 bilangan genap maka x juga bilangan genap” juga telah terbukti.

6. Pembuktian dengan kontradiksi

Pembuktian secara tidak langsung yang lain adalah pembuktian dengan kontradiksi *(reductio ad adsurdum).* Pada implikasi $p \Rightarrow q$, bukti bahwa q benar dilakukan dengan menggunakan sifat ~(~q) = q. Dengan mengandaikan ingkaran q (~q) benar ditunjukkan bahwa ini mengakibatkan suatu pertentangan, dengan p atau dengan sesuatu yang dianggap benar. Karena kekonsistenan dalam matematika, ini berarti salah, dan dari sini disimpulkan ~(~q) = q benar.

Sebagai contoh akan dibuktikan pernyataan:

Buktikan: “Tidak ada bilangan rasional yang kuadratnya 2”

Pernyataan ini dapat ditulis dalam bentuk implikasi: “Jika $x^2 = 2$, maka x bukan bilangan rasional”

Bukti:

Andaikan x bilangan rasional, maka x = m/n, m, n $\in$ bilangan bulat, n $\neq$ 0 dan m, n, tidak mempunyai faktor persekutuan selain satu. Dari $x^2 = m^2 / n^2 = 2$, diperloeh $m^2 = 2n^2$ dengan n bilangan asli. Akibatnya m^2 haruslah bilangan genap, sehingga m juga harus bilangan genap (telah terbukti pada contoh bukti dengan kontraposisi). Karena m dan n tidak mempunyai faktor persekutuan selain satu, maka n harus bilangan ganjil. Selanjutnya dari m bilangan genap diperoleh m = 2k, k bilangan bulat. Akibatnya $m^2 = 4k^2 = 2n^2$ atau $n^2 = 2k^2$, ini berarti n^2 bilangan genap, sehingga n juga bilangan genap. Hasil ini bertentangan dengan hasil sebelumnya yang menyatakan n harus bilangan ganjil. Pertentangan ini disebabkan oleh pengandaian bahwa x bilangan rasional, karena itu haruslah x bukan rasional. Jadi tidak mungkin terdapat bilangan rasional yang kuadratnya 2.

7. Bukti dengan induksi matematika

Pembuktian ini didasarkan pada prinsip induksi matematis yaitu: "Misalkan P(n) adalah suatu deret proposisi yang memenuhi dua persyaratan, yakni:

(1) P_N adalah benar (biasanya N adalah 1);

(2) Kebenaran P_i secara tidak langsung menyatakan kebenaran P_{i+1} , $i \geq N$ maka P(n) adalah benar untuk setiap bilangan bulat n $\geq N$.

Prinsip ini tidak perlu dibuktikan karena dianggap sebagai suatu aksioma yang wajar.

Sebagai contoh diberikan soal berikut:

Contoh: Buktikan bahwa: P(n): $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = [n\,(n+1)\,(2n+1)]/6$ adalah benar untuk semua n ≥ 1 .

Bukti:

P(1) : $1^2 = [1\,(1+1)\,(2+1)]/6$ adalah suatu pernyataan yang benar.

P(i): $1^2 + 2^2 + \ldots + i^2 + (i+1)^2 = [i\,(i+1)\,(2i+1)]/6$

P(i+1) = $1^2 + 2^2 + \ldots + i^2 + (i+1)^2 = [\;(i+1)\,(2i+1)(2i+3)]/6$

Dengan mengasumsikan Pi benar, suku ruas kiri pada P(i+1) dapat ditulis sebagai berikut:

$[1^2 + 2^2 + \ldots + i^2\,] + (i+1)^2 = \;[\;i\;\;(i+1)\,(2i+1)(2i+3)]/6\; + (i + I)^2$

$= (i + 1)\;[(2i^2 + i + 6i + 6)]/6$

$= (i + 1)\;[(2i^2 + 7i\; + 6)]/6$

$= [(i+1)\,(i+2)\,(2i+3)]/6$

= ruas kanan. Terbukti.

Berdasarkan prinsip induksi matematika Pn adalah benar untuk setiap bilangan bulat positif N.

Simpulan

Secara garis besar bentuk pembuktian dubagi dua bagian yaitu pembuktian secara langsung dan tidak langsung. Pembuktian secara tidak langsung biasanya digunakan apabila pembuktian secara langsung sukar dilaksanakan. Hal ini karena tidak ada keharusan untuk membuktikan teorema dengan salah satu metode yang telah dibahas. Tujuan pembuktian sesungguhnya adalah untuk mengajarkan prinsip-prinsip pembuktian dan mengembangkan keterampilan cara berpikir dan meningkatkan kreatifitas dalam bermatematika.

Saran

Dalam mengajarkan materi yang berkaitan dengan pembuktian hendaknya memperlihatkan kondisi siswa yang diajar (SD, SLTP, SLTA atau mahasiswa). Sesuaikan pemberian materi dengan tingkatan yang berbeda-beda. Siswa jangan dipaksa untuk mengingat bukti teorema karena tujuan pembuktian sebenarnya adalah upaya untuk makin mengembangkan keterampilan berpikir.

DAFTAR PUSTAKA

Daiman, E. 1994. *Penuntun Belajar Matematika 1 SMU Cawu 1, 2, 3*. Bandung: Ganeca Exact

Daiman, E. 1994. *Penuntun Belajar Matematika 3 SMU Cawu 1, 2, 3*. Bandung: Ganeca Exact

Daiman, E. dan Tri Dewi. 1994. *Penuntun Belajar Matematika 1 SMU Cawu 1, 2, 3*. Bandung: Ganeca Exact

Hodojo, Herman 1990. *Strategi Mengajar Belajar Matematika*. Surabaya: IKIP Malang

Purcell, J. Edwin dan Varberg, Dale. 1995. *Kalkulus dan Geomatri Analisis*. Jilid I Edisi 5. Jakarta: Erlangga

Purwanto, 1998. *Beberapa Teknik Pembuktian. Makalah disampaikan dalam semiloka pada PSSJ Matematika*. PPS IKIP Malang

Ruseffendi, E.T. 1984. *Dasar-dasar Matematika Modern dan Komputer untuk Guru.* Edisi 4. Bandung: Tarsito

Simanjuntak, Lisnawaty. 1993. *Metode Mengajar Matematika.* Jakarta: Rineka Cipta

Soehakso, RMJT. 1990. *Pengantar Matematika Modern.* Yokyakarta: FMIPA UGM. Proyek Pembinaan Tenaga Kependidikan Program B

Spiegel, S. murray. 1996. *Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*

Syarif, Bachtiar. 1990. *Pengantar Dasar Matematika (Himpunan dan Logika) Bandung: FPMIPA ITB*. Proyek Pembinaan Tenaga Kependidikan Program B

Wirano, 1991. *Strategi Pengajaran Matematika*. Makalah. ITB Bandung