

Analisis kestabilan dan kontrol optimal model matematika penyebaran penyakit Ebola dengan variabel kontrol berupa karantina

Erzalina Ayu Satya Megananda, Cicik Alfiniyah, and Miswanto

To cite this article:

E. A. S. Megananda, C. Alfiniyah, and M. Miswanto, "Analisis kestabilan dan kontrol optimal model matematika penyebaran penyakit Ebola dengan variabel kontrol berupa karantina", *Jambura J. Biomath*, vol. 2, no. 1, pp. 29–41, 2021

DOI: <https://doi.org/10.34312/jjbm.v2i1.10258>

© 2021 Author(s).

Articles You may be interested in

Model matematika SMEIUR pada penyebaran penyakit campak dengan faktor pengobatan

A. F. D. Hubu, N. Achmad, and N. Nurwan

<http://dx.doi.org/10.34312/jjbm.v1i2.7970>

Parameters estimation of generalized Richards model for COVID-19 cases in Indonesia using genetic algorithm

M. Rayungsari, M. AFIN, and N. Imamah

<http://dx.doi.org/10.34312/jjbm.v1i1.6910>

Analisis dinamik model SVEIR pada penyebaran penyakit campak

S. O. S. P. Ahaya, E. Rahmi, and N. Nurwan

<http://dx.doi.org/10.34312/jjbm.v1i2.8482>

Estimasi *Reproduction Number* Model Matematika Penyebaran Malaria di Sumba Tengah, Indonesia

E. M. Banni, M. A. Kleden, M. Lobo, and M. Z. Ndi

<https://doi.org/10.34312/jjbm.v2i1.9971>

Global stability of a fractional-order logistic growth model with infectious disease

H. S. Panigoro and E. Rahmi

<https://doi.org/10.34312/jjbm.v1i2.8135>

Analisis kestabilan dan kontrol optimal model matematika penyebaran penyakit Ebola dengan variabel kontrol berupa karantina

Erzalina Ayu Satya Megananda¹, Cicik Alfiniyah^{1,*}, Miswanto¹

¹Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga, Surabaya

*Corresponding author. Email: cicik-a@fst.unair.ac.id

Abstrak

Penyakit ebola merupakan suatu penyakit menular yang disebabkan oleh virus yang berasal dari genus Ebolavirus dan familia Filoviridae. Penyakit ebola merupakan salah satu penyakit yang paling mematikan bagi manusia. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis kestabilan dari titik setimbang dan menerapkan kontrol optimal berupa karantina pada model matematika penyebaran penyakit ebola. Berdasarkan hasil analisis model tanpa kontrol diperoleh dua titik setimbang, yaitu titik setimbang non endemik dan titik setimbang endemik. Eksistensi dari titik setimbang endemik dan kestabilan lokal titik setimbang bergantung pada bilangan reproduksi dasar (R_0). Titik setimbang non endemik stabil asimtotis jika $R_0 < 1$, sedangkan titik setimbang endemik cenderung stabil asimtotis jika $R_0 > 1$. Permasalahan kontrol optimal diselesaikan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Dari hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa pemberian kontrol cukup efektif untuk meminimalkan jumlah populasi manusia terinfeksi ebola serta meminimalkan biaya yang dikeluarkan.

Kata Kunci: Model Matematika; Penyakit Ebola; Kestabilan; Karantina; Kontrol Optimal

Abstract

Ebola disease is an infectious disease caused by a virus from the genus Ebolavirus and family Filoviridae. Ebola disease is one of the most deadly diseases for human. The purpose of thesis is to analyze the stability of equilibrium point and to apply the optimal control of quarantine on mathematical model of the spread of ebola. Model without control has two equilibria, non-endemic equilibrium and endemic equilibrium. The existence of endemic equilibrium and local stability depends on basic reproduction number (R_0). The non-endemic equilibrium is asymptotically stable if $R_0 < 1$ and endemic equilibrium tend to asymptotically stable if $R_0 > 1$. The problem of optimal control is solved by Pontryagin's Maximum Principle. From the numerical simulation result show that control is effective enough to minimize the number of infected human population and to minimize cost of its control.

Keywords: Mathematical Model; Ebola Disease; Stability; Quarantine; Optimal Control

1. Pendahuluan

Penyakit menular disebabkan oleh mikroorganisme patogen, seperti bakteri, virus, parasit atau jamur. Penyakit dapat menyebar secara langsung atau tidak langsung dari satu orang ke orang lain. Salah satu penyakit menular yang disebabkan oleh virus adalah penyakit ebola. Virus yang menyebabkan penyakit ebola berasal dari genus *Ebolavirus* dan familia *Filoviridae*. Penyakit ebola pertama kali muncul pada tahun 1976 di Sudan, Yambuku, Kongo, dan desa sekitar sungai Ebola. Penyakit ebola adalah salah satu penyakit yang paling mematikan bagi manusia dengan kasus kematian perkiraan antara 25-90% [1].

Masa inkubasi penyakit ebola terjadi antara 2 hingga 21 hari. Gejala awal penyakit ebola berupa demam mendadak, nyeri otot, sakit kepala dan tenggorokan, diikuti dengan muntah, diare, ruam tubuh, tremor, gangguan fungsi ginjal dan hati, serta pendarahan dalam maupun luar. Resiko kematian penyakit ebola cukup tinggi berkisar antara 50-90% pada manusia [1].

Pengobatan untuk penyakit ebola hingga saat ini belum ditemukan. Terapi untuk mempercepat pemulihan kesehatan dapat dilakukan dengan pemberian cairan oralit yang mengandung elektrolit atau cairan infus serta penanganan sesuai gejala akan meningkatkan kesembuhan pada pasien. Pencegahan penyakit ebola dapat dilakukan dengan pemberian vaksinasi [2].

Wabah penyakit ebola terbesar terjadi di Afrika Barat terutama di Guinea, Liberia dan Sierra Leone [3]. Penularan penyakit ebola dapat melalui kontak langsung dengan cairan tubuh, sekresi, organ-organ, dan darah [1]. Penularan melalui peralatan rumah sakit juga terjadi karena buruknya perawatan dan penggunaan kembali

peralatan yang tidak didesinfeksi [4]. Penularan tidak hanya terjadi dari penderita yang masih hidup. Penderita yang telah meninggal juga dapat menularkan penyakit, sehingga penguburan yang benar oleh pihak medis sangat penting dalam pencegahan penularan penyakit [1].

Banyaknya kasus penyakit ebola yang dapat menyebabkan kematian menunjukkan bahwa penyakit ini merupakan penyakit yang perlu penanganan serius. Pemodelan matematika merupakan salah satu cara yang dapat digunakan untuk mengetahui dinamika penyebaran suatu penyakit. Banyak peneliti berusaha mempelajari penyebaran penyakit ebola. Diantaranya Agosto (2017) [5] mengembangkan model matematika penyebaran penyakit ebola dengan pengaruh penderita yang kambuh dan kembali terinfeksi. Model tersebut terdapat 7 kompartemen yaitu, *Susceptible–Exposed–Infected (early–stage dan late–stage)–Recovered–Immune–Deceased* ($S - E - I_E - I_L - R_1 - R_2 - D$). Diaz dkk (2018) [6] membahas model matematika penyebaran penyakit ebola di Afrika Barat dengan penanganan medis yang terdapat 7 kompartemen yaitu, *Susceptible–Exposed–Infected–Hospitalized–Removed but infectious–Removed and Buried–Recovered* ($S - E - I - H - R_I - R_B - R_R$).

Berdasarkan uraian diatas penulis tertarik untuk mengkaji analisis kestabilan titik setimbang dari model penyebaran penyakit ebola serta mengembangkan model yang merujuk pada jurnal yang ditulis oleh Denes dan Gumel, (2019) [7] dengan pemberian kontrol optimal berupa karantina pada populasi yang terinfeksi penyakit ebola.

2. Formulasi Model

Pada bagian ini akan diformulasikan model matematika penyebaran penyakit ebola. Adapun asumsi yang digunakan untuk kontruksi model sebagai berikut:

1. Populasi manusia yang laten virus ebola (E) tidak dapat menularkan penyakit ebola.
2. Populasi manusia yang terinfeksi virus ebola yang dirawat (I_T) dapat menularkan penyakit ebola.
3. Populasi manusia yang mati karena virus ebola (D) dapat menularkan penyakit ebola.
4. Populasi manusia yang sembuh (R) dianggap kebal terhadap penyakit ebola.

Populasi manusia dibagi menjadi enam kompartemen yaitu populasi manusia yang rentan terhadap virus ebola (S), populasi manusia yang laten virus ebola (E), populasi manusia yang terinfeksi virus ebola (I), populasi manusia yang terinfeksi virus ebola yang dirawat (I_T), populasi manusia yang sembuh (R), dan populasi manusia yang mati karena virus ebola (D). Pendefinisian parameter dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Pendefinisian Parameter Model.

Notasi	Keterangan
Π	Laju kelahiran
d	Laju kematian alami
b	Probabilitas penularan tiap kontak
η_T	Modifikasi parameter untuk individu terinfeksi virus ebola yang dirawat
η_D	Modifikasi parameter untuk individu terinfeksi virus ebola
k	Laju rata-rata kontak di suatu komunitas per kapita
v	Laju penyembuhan
m	Laju kematian penyakit
w	Laju perawatan
f	Laju perlakuan penguburan mayat ebola
p	Masa inkubasi

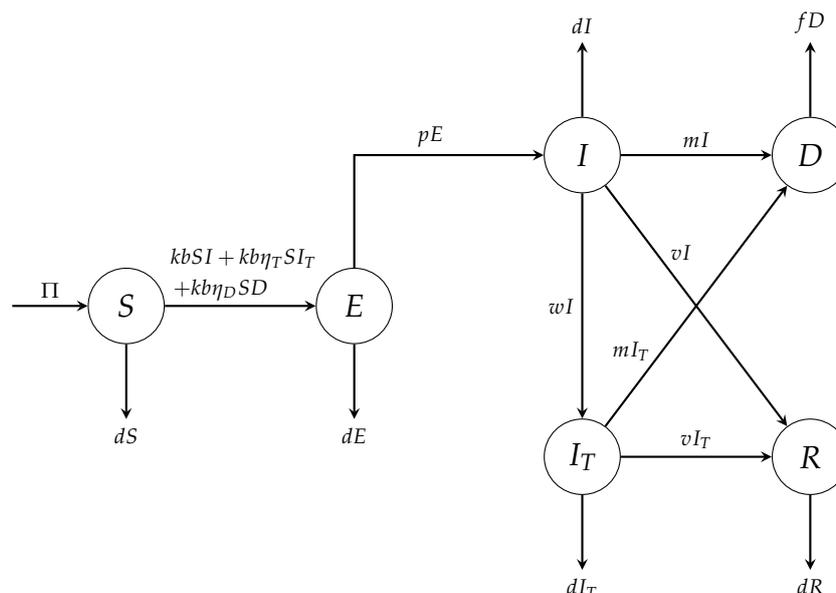
Berdasarkan asumsi dan pendefinisian parameter serta variabel dapat dibentuk diagram transmisi penyebaran penyakit ebola yang disajikan pada Gambar 1. Dari diagram transmisi pada Gambar 1 dapat diformulasikan model sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Pi - kbSI - kb\eta_T SI_T - kb\eta_D SD - dS, \quad (1a)$$

$$\frac{dE}{dt} = kbSI + kb\eta_T SI_T + kb\eta_D SD - pE - dE, \quad (1b)$$

$$\frac{dI}{dt} = pE - (v + m + w)I - dI, \quad (1c)$$

$$\frac{dI_T}{dt} = wI - (v + m)I_T - dI_T, \quad (1d)$$



Gambar 1. Diagram Transmisi Model.

$$\frac{dR}{dt} = v(I + I_T) - dR, \quad (1e)$$

$$\frac{dD}{dt} = m(I + I_T) - fD \quad (1f)$$

dengan $S, E, I, I_T, R, D \geq 0$. $\Pi, d, b, \eta_T, \eta_D, k, v, m, w, f, p > 0$.

Persamaan (1a) menyatakan laju perubahan populasi manusia yang rentan terkena virus ebola per satuan waktu. Populasi ini bertambah karena adanya kelahiran. Populasi ini berkurang karena populasi yang rentan berinteraksi dengan populasi yang terinfeksi, populasi terinfeksi yang dirawat, dan populasi yang mati karena virus ebola. Populasi ini juga berkurang karena adanya kematian alami.

Persamaan (1b) menyatakan laju perubahan populasi yang laten virus ebola per satuan waktu. Populasi ini bertambah karena populasi yang rentan berinteraksi dengan populasi yang terinfeksi, populasi terinfeksi yang dirawat, dan populasi yang mati karena virus ebola. Populasi ini berkurang karena masa inkubasi dari virus ebola. Populasi ini juga berkurang karena adanya kematian alami.

Persamaan (1c) menyatakan laju perubahan populasi manusia yang terinfeksi virus ebola per satuan waktu. Populasi ini bertambah karena masa inkubasi dari virus ebola. Populasi ini berkurang karena laju perawatan pada individu yang terinfeksi, laju penyembuhan pada individu yang terinfeksi dan laju kematian penyakit pada individu yang terinfeksi. Populasi ini juga berkurang karena adanya kematian alami.

Persamaan (1d) menyatakan laju perubahan populasi manusia yang terinfeksi yang dirawat per satuan waktu. Populasi ini bertambah karena laju perawatan pada individu yang terinfeksi. Populasi ini berkurang karena adanya laju penyembuhan pada individu yang terinfeksi dan laju kematian penyakit pada individu yang terinfeksi. Populasi ini juga berkurang karena adanya kematian alami.

Persamaan (1e) menyatakan laju perubahan populasi manusia yang sembuh per satuan waktu. Populasi ini bertambah karena laju penyembuhan pada individu yang terinfeksi yang dirawat maupun yang tidak dirawat. Populasi ini berkurang karena adanya kematian alami.

Persamaan (1f) menyatakan laju perubahan populasi manusia yang mati karena virus ebola per satuan waktu. Populasi ini bertambah karena laju kematian penyakit pada individu yang terinfeksi yang dirawat maupun yang tidak dirawat. Populasi ini berkurang karena adanya laju perlakuan penguburan pada mayat ebola.

3. Titik Setimbang Model

Model matematika penyebaran penyakit ebola memiliki dua titik setimbang, yaitu titik setimbang non endemik $E_0 = (S, E, I, I_T, D) = \left(\frac{\Pi}{d}, 0, 0, 0, 0\right)$ dan titik setimbang endemik $E_1 = (S^*, E^*, I^*, I_T^*, D^*)$ dengan

$$S^* = \frac{\Pi - E^*(p+d)}{d}, \quad (2a)$$

$$E^* = \frac{\pi}{p+d} - \frac{df(v+m+d)(v+m+w+d)}{kbp(p+d)(f(v+m+d) + \omega\eta_T f + m\eta_D(v+m+w+d))}, \quad (2b)$$

$$I^* = \frac{pE^*}{v+m+w+d}, \quad (2c)$$

$$I_T^* = \frac{\omega p E^*}{(v+m+w+d)(v+m+d)}, \quad (2d)$$

$$D^* = \frac{m p E^*}{f(v+m+d)}. \quad (2e)$$

Selanjutnya, dari titik setimbang non endemik E_0 dengan menggunakan metode *Next Generation Matrix* (NGM) [8] sehingga dapat diperoleh bilangan reproduksi dasar (R_0) sebagai berikut.

$$R_0 = \frac{kbp\Pi(d(f+\eta_D m) + f(m+v+\eta_T w) + \eta_D m(m+v+w))}{df(p+d)(m+v+w+d)(m+v+d)}.$$

Berdasarkan uraian diatas, titik setimbang endemik (E_1) akan eksis atau ada jika memenuhi syarat $\Pi > E^*(p+d)$ dan $\frac{\pi}{p+d} > \frac{df(v+m+d)(v+m+w+d)}{kbp(p+d)(f(v+m+d) + \omega\eta_T f + m\eta_D(v+m+w+d))}$ atau $R_1 > 1$.

4. Kestabilan Lokal Titik Setimbang

Pada bagian ini akan dilakukan analisis kestabilan lokal pada kedua titik setimbang model, yaitu titik setimbang non endemik E_0 dan titik setimbang endemik E_1 .

4.1. Kestabilan Lokal Titik Setimbang Non Endemik

Analisis kestabilan lokal titik setimbang non endemik diawali dengan mensubstitusikan nilai titik setimbang non endemik $E_0 = (S, E, I, I_T, D) = (\frac{\Pi}{d}, 0, 0, 0, 0)$ ke dalam matriks Jacobian, dengan demikian diperoleh:

$$J_{E_0} = \begin{pmatrix} -d & 0 & \frac{-kb\Pi}{d} & \frac{-kb\eta_T\Pi}{d} & \frac{-kb\eta_D\Pi}{d} \\ 0 & -p-d & \frac{kb\Pi}{d} & \frac{-kb\eta_T\Pi}{d} & \frac{kb\eta_D\Pi}{d} \\ 0 & p & -v-m-w-d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & -v-m-d & 0 \\ 0 & 0 & m & m & -f \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan matriks Jacobian J_{E_0} , dapat dibentuk persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\det(J_{E_0} - \lambda I) = 0.$$

$$\det \begin{pmatrix} -d-\lambda & 0 & \frac{-kb\Pi}{d} & \frac{-kb\eta_T\Pi}{d} & \frac{-kb\eta_D\Pi}{d} \\ 0 & -p-d-\lambda & \frac{kb\Pi}{d} & \frac{-kb\eta_T\Pi}{d} & \frac{kb\eta_D\Pi}{d} \\ 0 & p & -v-m-w-d-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & -v-m-d-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & m & m & -f-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

dengan demikian diperoleh bentuk yang ekuivalen sebagai berikut

$$(-d-\lambda) [\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4] = 0 \quad (3)$$

dengan

$$a_1 = a_1 = 2v + 2m + f + p + w + 3d$$

$$a_2 = 2vm + 2pm + 3d^2 + v^2 + m^2 + wm + 3df + 2fm + 4dv + 4dm + 2pv + wf + vw + pf + 2fv$$

$$\begin{aligned}
& + 2dw + 2pd + pw - \frac{kb\Pi p}{d} \\
a_3 = & d^3 + 2fvm + 4dfv + 4dfm + 2dvm + 2pfv + 2pfm + 2dfw + pfw + fvw + fwm + 2pmv \\
& + dwv + dwm + 2pdv + 2pdm + 2pdf + pww + pwm + fv^2 + 2d^2m + dm^2 + 3d^2f + 2d^2v + pm^2 \\
& + fm^2 + pv^2 + d^2w + pd^2 + pwd - \frac{kb\Pi p}{d} (v + m + d + f + \eta_T w + \eta_D m) \\
a_4 = & dfwv + dfwm + 2dfmv + pfwv + pfwm + 2pfmv + 2pdfv + 2pdfm + 2d^2fv + dfm^2 + pfm^2 \\
& + 2d^2fm + dfv^2 + pfv^2 + fpd^2 + fd^2w + fpdw + fd^3 \\
& - \frac{kb\Pi p}{d} (d(f + \eta_D m) + f(v + m + \eta_T w) + \eta_D m(w + v + m)).
\end{aligned}$$

Berdasarkan pers. (3), diperoleh nilai eigen $\lambda = -d$, dan sisanya adalah akar-akar dari persamaan berikut.

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0 \quad (4)$$

Titik setimbang non endemik akan stabil asimtotis jika dan hanya jika persamaan karakteristik (3) memiliki akar-akar bagian real negatif. Jelas bahwa λ bernilai negatif karena semua parameter seperti yang telah dijelaskan bernilai positif. Kemudian akan ditentukan pers. (4) memiliki akar-akar bagian real negatif, yaitu dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, titik setimbang non endemik akan stabil asimtotis jika dan hanya jika $R_i < 1$, dengan $i = 0, 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned}
R_0 &= \frac{kb\Pi(d(f+\eta_D m)+f(m+v+\eta_T w)+\eta_D m(m+v+w))}{df(p+d)(m+v+w+d)(m+v+d)}, \\
R_1 &= \frac{kb\Pi p}{d(2vm+2pm+3d^2+v^2+m^2+wm+3df+2fm+4dv+4dm+2pv+wf+vw+pf+2fv+2dw+2pd+pw)}, \\
R_2 &= \frac{kb\Pi p(v+m+d+f+\eta_T w+\eta_D m)}{d^4+Ad^3+Bd^2+Cd}, \\
R_3 &= \frac{a_1^2 a_4 + a_3^2}{a_1 a_2 a_3}, \\
A &= (2m + 3f + 2v + w + p), \\
B &= (4fv + 4fm + 2vm + 2fw + wv + wm + 2pv + 2pm + 2pf + m^2 + pw), \\
C &= (2fvm + 2pfv + 2pfm + pfw + fvw + fwm + 2pmv + pww + pwm + fv^2 + pm^2 + fm^2 + pv^2).
\end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa jika syarat terpenuhi maka tidak ada penyebaran penyakit.

4.2. Kestabilan Lokal Titik Setimbang Endemik

Langkah pertama untuk menentukan kestabilan titik setimbang endemik yaitu dengan mensubstitusikan titik setimbang endemik $E_1 = (S^*, E^*, I^*, I_T^*, D^*)$ pada matriks Jacobian, sehingga diperoleh :

$$J_{E_1} = \begin{pmatrix} -kbI^* - kb\eta_T I_T^* - kb\eta_D D^* - d & 0 & -kbS^* & -kb\eta_T S^* & -kb\eta_D S^* \\ kbI^* + kb\eta_T I_T^* + kb\eta_D D^* & -p - d & kbS^* & kb\eta_T S^* & kb\eta_D S^* \\ 0 & p & -(v + m + w + d) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & -(v + m + d) & 0 \\ 0 & 0 & m & m & -f \end{pmatrix},$$

dengan

$$\begin{aligned}
S^* &= \frac{\Pi - E^*(p + d)}{d}, \\
I^* &= \frac{pE^*}{v + m + w + d}, \\
I_T^* &= \frac{wpE^*}{(v + m + w + d)(v + m + d)}, \\
D^* &= \frac{mpE^*}{f(v + m + d)}, \\
E^* &= \frac{\pi}{p + d} - \frac{df(v + m + d)(v + m + w + d)}{kbp(p + d)(f(v + m + d) + w\eta_T f + m\eta_D(v + m + w + d))}.
\end{aligned}$$

Berdasarkan matriks Jacobian di sekitar titik setimbang endemik E_1 , akan ditentukan nilai eigennya dengan menggunakan $\det (J_{E_1} - \lambda I) = 0$, yaitu

$$\det \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & -kbS^* & -kb\eta_T S^* & -kb\eta_D S^* \\ b_{21} & \lambda - [-p - d] & kbS^* & kb\eta_T S^* & kb\eta_D S^* \\ 0 & p & b_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & b_{44} & 0 \\ 0 & 0 & m & m & \lambda - [-f] \end{pmatrix} = 0.$$

dengan

$$\begin{aligned} b_{11} &= \lambda - [-kb(I^* + \eta_T I_T^* + \eta_D D^*) - d], \\ b_{21} &= kb(I^* + \eta_T I_T^* + \eta_D D^*), \\ b_{33} &= \lambda - [-(v + m + w + d)], \\ b_{44} &= \lambda - [-(v + m + d)]. \end{aligned}$$

Dalam menentukan akar-akar persamaan karakteristik dari $\det (J_{E_1} - \lambda I) = 0$ sulit dilakukan secara analitik karena persamaan yang dihasilkan rumit dan bergantung pada variabel E^* , maka dilakukan analisis secara numerik dengan menggunakan bidang fase.

Simulasi dilakukan dengan memberikan tiga nilai awal yang berbeda untuk setiap populasi ($S(0), E(0), I(0), I_T(0), R(0), D(0)$). Hal ini bertujuan untuk mengetahui kekonvergenan solusi dari masing-masing nilai awal parameter pada model penyebaran penyakit ebola. Adapun nilai awal dan nilai parameter disajikan pada [Tabel 2](#) dan [Tabel 3](#).

Tabel 2. Nilai Awal Bidang Fase Titik Setimbang Endemik E_1

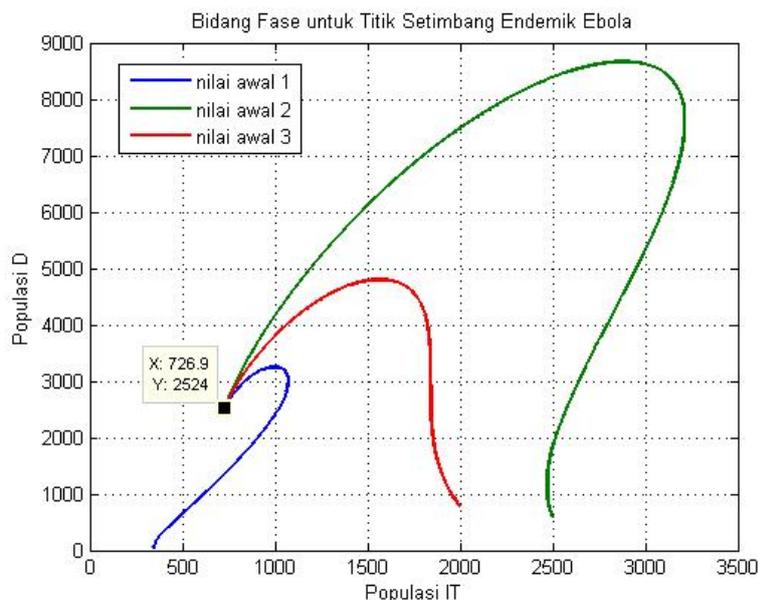
Nilai Awal	$S(0)$	$E(0)$	$I(0)$	$I_T(0)$	$R(0)$	$D(0)$	Warna
Nilai Awal 1	9800	700	520	350	100	20	Biru
Nilai Awal 2	20000	12000	4500	2500	5000	600	Hijau
Nilai Awal 3	10000	4500	3000	2000	1000	800	Merah

Tabel 3. Nilai Parameter Model Matematika Penyebaran Penyakit Ebola

Parameter	Nilai	Satuan	Sumber
Π	2800	$\frac{\text{orang}}{\text{minggu}}$	Asumsi
d	0.00054	$\frac{1}{\text{minggu}}$	[7]
b	0.054	-	[7]
η_T	0.86	-	[7]
η_D	3.89	-	[7]
k	9.15	$\frac{1}{\text{minggu}}$	[7]
v	0.362	$\frac{1}{\text{minggu}}$	[7]
m	0.797	$\frac{1}{\text{minggu}}$	[7]
w	0.5	$\frac{1}{\text{minggu}}$	[6]
f	0.762	$\frac{1}{\text{minggu}}$	[7]
p	0.6675	$\frac{1}{\text{minggu}}$	[7]

Hasil simulasi bidang fase pada titik setimbang endemik model matematika penyebaran penyakit ebola ditunjukkan pada [Gambar 2](#).

[Gambar 2](#) menunjukkan simulasi bidang fase untuk populasi manusia yang mati karena virus ebola (D) dan populasi manusia terinfeksi yang sedang dirawat (I_T) pada model matematika penyebaran penyakit ebola. Dari [Gambar 2](#) menunjukkan dari waktu ke waktu (t) nilai D dan I_T cenderung menuju ke suatu titik yaitu $D \rightarrow 2524$ dan $I_T \rightarrow 726.9$ atau cenderung stabil asimtotis ke titik $(2524, 726.9)$ yang tidak lain merupakan bagian dari titik setimbang endemik $E_1 = (S^*, E^*, I^*, I_T^*, D^*) = (1, 4191.3, 1686, 726.9, 2524)$. Nilai E_1 diperoleh melalui substitusi nilai parameter pada [Tabel 3](#) terhadap titik setimbang endemik yang telah diperoleh secara analitik. Selain itu, berdasarkan nilai parameter yang diberikan diperoleh nilai $R_0 = 1.109704577 \times 10^7 > 1$.



Gambar 2. Simulasi Bidang Fase pada Bidang $D - I_T$ untuk Titik Setimbang Endemik Model Matematika Penyebaran Penyakit Ebola

Berdasarkan penjelasan di atas, maka titik setimbang endemik $E_1 = (S^*, E^*, I^*, I_T^*, D^*)$ pada model matematika penyebaran penyakit ebola akan stabil asimtotis jika dan hanya jika $R_0 > 1$. Hal ini menunjukkan bahwa terjadi penyebaran penyakit ebola.

5. Analisis Sensitivitas Parameter

Pada saat menganalisis syarat kestabilan dari titik setimbang tentunya terdapat beberapa parameter yang berpengaruh cukup besar. Analisis sensitivitas bertujuan untuk menentukan parameter yang memiliki pengaruh besar pada syarat kestabilan dari titik setimbang non endemik maupun endemik. Parameter yang digunakan hanya parameter yang terdapat pada R_0 saja karena parameter tersebut yang menunjukkan kondisi adanya penyebaran penyakit atau tidak. Hal tersebut dapat diketahui melalui indeks sensitivitas (e_m) dari masing-masing parameter. Adapun indeks sensitivitas parameter dirumuskan sebagai berikut [9]:

$$e_m = \left(\frac{\partial R_0}{\partial m} \right) \frac{m}{R_0},$$

dengan:

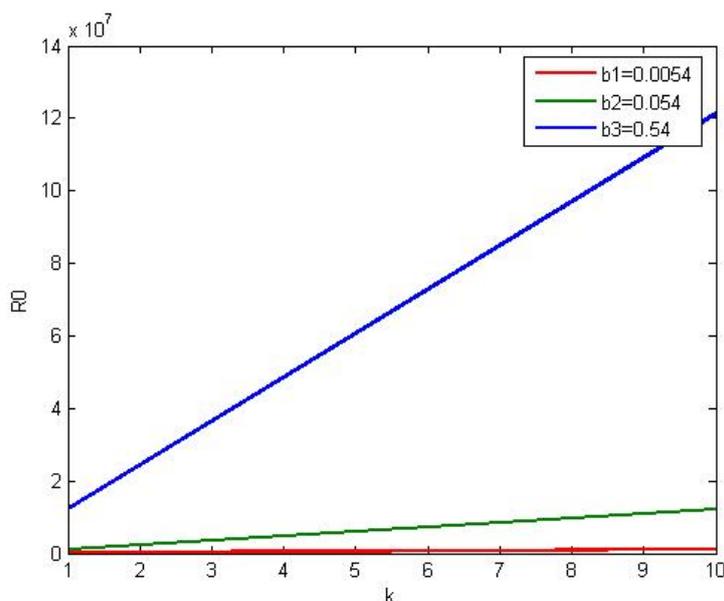
- m : parameter yang akan dianalisis
- e_m : indeks sensitivitas parameter m .

Pada penelitian ini, R_0 yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$R_0 = \frac{kbp\Pi(d(f + \eta_D m) + f(m + v + \eta_T w) + \eta_D m(m + v + w))}{df(p + d)(m + v + w + d)(m + v + d)}.$$

Pada nilai R_0 ini dipengaruhi oleh 11 parameter yaitu $k, b, p, \Pi, d, f, \eta_D, m, v, \eta_T$ dan w . Dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 3, berikut diberikan contoh untuk perhitungan nilai indeks sensitivitas parameter η_D .

$$\begin{aligned} e_{\eta_D} &= \left(\frac{\partial R_0}{\partial \eta_D} \right) \frac{\eta_D}{R_0} \\ &= \frac{kbp\Pi m(d + m)}{df(p + d)(m + v + w + d)(m + v + d)} \frac{\eta_D(df(p + d)(m + v + w + d)(m + v + d))}{kbp\Pi(d(f + \eta_D m) + f(m + v + \eta_T w) + \eta_D m(m + v + w))} \\ &= \frac{(dm + m(m + v + w))\eta_D}{d(f + \eta_D m) + f(m + v + \eta_T w) + \eta_D m(m + v + w)} = 0.8094. \end{aligned}$$



Gambar 3. Sensitivitas k Terhadap Nilai R_0 dengan Tiga Nilai b yang Berbeda

Hasil perhitungan indeks sensitivitas parameter model matematika penyebaran penyakit ebola dapat dilihat pada [Tabel 4](#).

Tabel 4. Hasil Perhitungan Indeks Sensitivitas Parameter

Parameter	Indeks Sensitivitas
Π	1
b	1
k	1
p	0.0008
d	-1.0012
f	-0.8094
η_D	0.8094
m	0.1261
v	-0.3103
η_T	0.0515
w	-0.0058

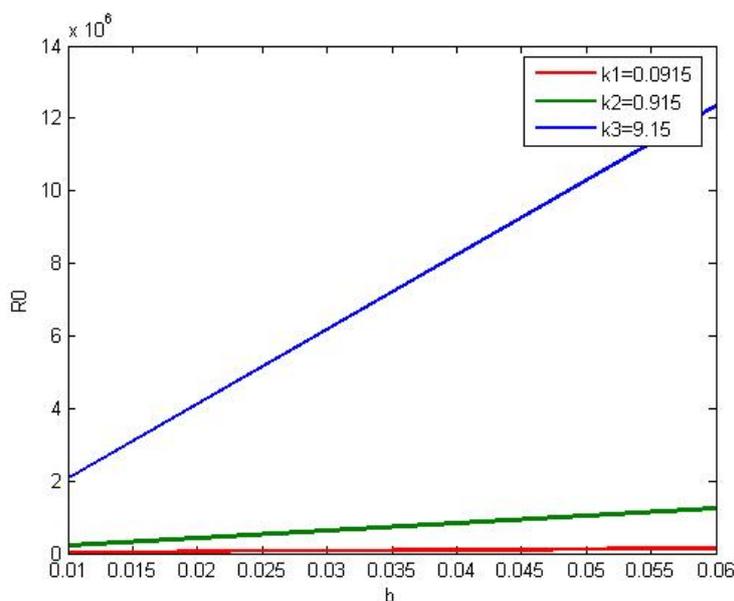
Pada [Tabel 4](#) terdapat nilai indeks sensitivitas yang bernilai positif dan negatif. Indeks sensitivitas yang bernilai positif berarti jika nilai parameter dinaikkan maka nilai R_0 akan bertambah. Sebaliknya, untuk indeks sensitivitas yang bernilai negatif berarti jika nilai parameter dinaikkan maka nilai R_0 akan berkurang.

Berdasarkan [Tabel 4](#) dapat diketahui bahwa indeks sensitivitas dari Π , b , dan k adalah 1 maka dapat diinterpretasikan bahwa jika laju kelahiran (Π), probabilitas penularan tiap kontak (b) dan laju rata-rata kontak di suatu komunitas per kapita (k) bertambah 10%, maka nilai R_0 akan bertambah sebesar 10% dan begitu pula sebaliknya. Analisis tersebut juga berlaku pada parameter d , apabila laju kematian alami (d) bertambah 10%, maka nilai R_0 akan berkurang 10%. Analisis tersebut juga berlaku untuk f , v , dan w .

Dari penjelasan di atas, parameter yang memiliki pengaruh besar pada model matematika penyebaran penyakit ebola adalah Π , b , k , dan d . Namun, karena parameter laju kelahiran (Π) dan laju kematian alami (d) tidak dapat dikontrol, maka salah satu parameter yang berpengaruh dan dapat dikontrol adalah parameter b dan k .

Selanjutnya, disimulasikan sensitivitas parameter b dan k terhadap R_0 . Pada simulasi yang pertama, dipilih nilai $b = 0.0054$, $b = 0.054$, dan $b = 0.54$, dengan nilai k berada pada interval $1 \leq k \leq 10$. Simulasi kedua, dipilih nilai k yang berbeda yaitu $k = 0.0915$, $k = 0.915$, dan $k = 9.15$, sedangkan nilai b berada pada interval $0.01 \leq b \leq 0.06$. Adapun hasil simulasi berupa grafik sensitivitas b dan k terhadap R_0 dapat dilihat pada [Gambar 3](#) and [4](#).

[Gambar 3](#) and [4](#) menunjukkan bahwa probabilitas penularan tiap kontak (b) dan laju rata-rata kontak di suatu komunitas per kapita (k) semakin besar, maka nilai R_0 juga akan semakin besar, artinya penyebaran penyakit ebola akan semakin meluas. Hal tersebut dikarenakan indeks sensitivitas dari parameter b dan k bernilai positif.



Gambar 4. Sensitivitas b Terhadap Nilai R_0 dengan Tiga Nilai k yang Berbeda

6. Analisis Masalah Kontrol Optimal

Model matematika penyebaran penyakit ebola ini dikembangkan dengan penambahan variabel kontrol diberikan pada kompartemen I (populasi manusia terinfeksi) berupa karantina. Tambahkan parameter yang digunakan pada model dengan kontrol dapat dilihat pada Tabel 5.

Tabel 5. Paramater Tambahan pada Model Matematika Penyebaran Penyakit Ebola

Parameter	Keterangan
u	Kontrol berupa karantina
A	Biaya yang dikeluarkan untuk karantina

Berdasarkan penjelasan diatas, maka dapat dibentuk model matematika penyebaran penyakit ebola dengan variabel kontrol berupa karantina adalah sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Pi - kbSI - kb\eta_T SI_T - kb\eta_D SD - dS, \quad (5a)$$

$$\frac{dE}{dt} = kbSI + kb\eta_T SI_T + kb\eta_D SD - pE - dE, \quad (5b)$$

$$\frac{dI}{dt} = pE - (v + m + w) I - dI - uI, \quad (5c)$$

$$\frac{dI_T}{dt} = wI - (v + m) I_T - dI_T, \quad (5d)$$

$$\frac{dR}{dt} = v(I + I_T) - dR + uI, \quad (5e)$$

$$\frac{dD}{dt} = m(I + I_T) - fD. \quad (5f)$$

Variabel kontrol berupa upaya karantina (u) diletakkan pada pers. (5c) and (5e). Pengaplikasian pemberian variabel kontrol ini bertujuan untuk mengurangi jumlah individu yang terinfeksi virus ebola dan meminimumkan biaya yang dikeluarkan untuk upaya tersebut. Untuk mencapai tujuan ini digunakan metode Prinsip Maksimum Pontryagin.

Fungsi ongkos atau indeks performansi yang dapat dibentuk berdasarkan penjelasan di atas adalah sebagai berikut:

$$\text{Min } J = \int_0^{t_f} \left(I + \frac{A}{2} u^2 \right) dt$$

dengan $A \geq 0$ dan batas kontrol optimal berada pada $0 \leq u(t) \leq 1$ dan $0 \leq t \leq t_f$ serta t_f merupakan waktu akhir.

6.1. Penyelesaian Kontrol Optimal

Berdasarkan Prinsip Maksimum Pontryagin [10], langkah pertama yang dilakukan adalah membentuk fungsi Hamiltonian pada model sebagai berikut:

$$\mathcal{H} = I + \frac{A}{2}u^2 + \lambda^T(t) (f(x(t), u(t), t)) \quad (6)$$

Fungsi Hamiltonian tersebut dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & I + H + \frac{A}{2}u^2 + \lambda_1 [\Pi - kbSI - kb\eta_T SI_T - kb\eta_D SD - dS] \\ & + \lambda_2 [kbSI + kb\eta_T SI_T + kb\eta_D SD - pE - dE] \\ & + \lambda_3 [pE - (v + m + w)I - dI - uI] \\ & + \lambda_4 [wI - (v + m)I_T - dI_T] \\ & + \lambda_5 [v(I + I_T) - dR + uI] \\ & + \lambda_6 [m(I + I_T) - fD]. \end{aligned}$$

Selanjutnya, agar diperoleh kondisi optimal maka fungsi Hamiltonian harus memenuhi kondisi stasioner yaitu $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0$, maka didapatkan

$$u - \lambda_3 [pE - (v + m + w)I - dI] + \lambda_5 [v(I + I_T) - dR] = 0,$$

sehingga

$$u = \frac{\lambda_3 [pE - (v + m + w)I - dI] + \lambda_5 [v(I + I_T) - dR]}{A}.$$

Oleh karena rentang nilai $0 \leq u(t) \leq 1$, maka terdapat beberapa kemungkinan nilai untuk u sebagai berikut:

$$u^* = \begin{cases} 0 & \text{untuk } u^* \leq 0 \\ \frac{\lambda_3 [pE - (v + m + w)I - dI] + \lambda_5 [v(I + I_T) - dR]}{A} & \text{untuk } 0 < u^* < 1 \\ 1 & \text{untuk } u^* \geq 1 \end{cases}$$

Berdasarkan kemungkinan diatas, maka diperoleh nilai kontrol yang optimal adalah sebagai berikut

$$u^* = \min \left(1, \max \left(0, \frac{\lambda_3 [pE - (v + m + w)I - dI] + \lambda_5 [v(I + I_T) - dR]}{A} \right) \right) \quad (7)$$

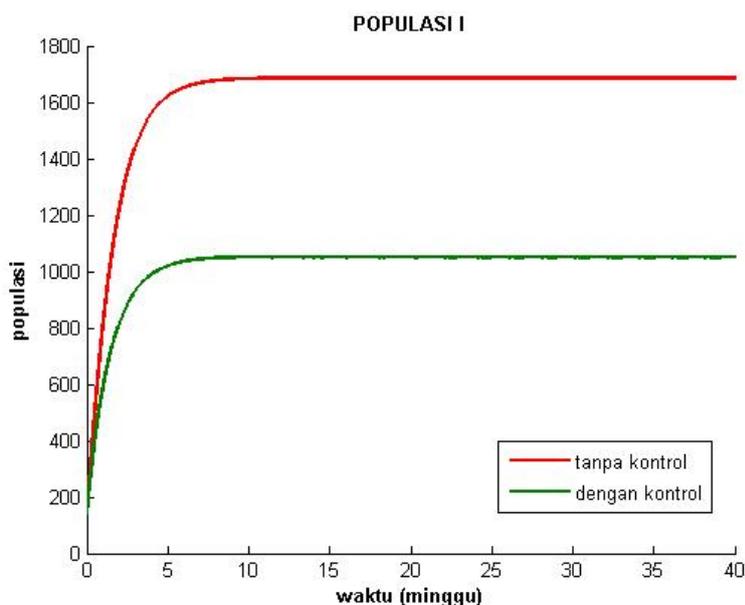
Dari persamaan pers. (7) diketahui bahwa nilai kontrol u bergantung pada variabel *state* dan *co-state*, sehingga perlu adanya penyelesaian persamaan *state* dan persamaan *co-state* untuk memperoleh variabel tersebut. Persamaan *state* dapat diselesaikan dari $\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}$.

Lebih lanjut, akan ditentukan persamaan *co-state* pada pengontrol u^* dapat diperoleh dari

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}$$

dengan demikian, dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S} = -(\lambda_1 [-kbI - kb\eta_T I_T - kb\eta_D D - d] + \lambda_2 [kbI + kb\eta_T I_T + kb\eta_D D]) \\ \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E} = -(\lambda_2 [-p - d] + \lambda_3 p) \\ \dot{\lambda}_3 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = -(\lambda_1 [-kbS] + \lambda_2 [kbS] + \lambda_3 [-(v + m + w + d + u)] + \lambda_4 w + \lambda_5 [v + u] + \lambda_6 m) \\ \dot{\lambda}_4 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_T} = -(\lambda_1 [-kb\eta_T S] + \lambda_2 [kb\eta_T S] + \lambda_4 [-m - d] + \lambda_5 v + \lambda_6 m) \end{aligned}$$



Gambar 5. Simulasi Perbandingan Jumlah Individu Terinfeksi (*Infected*) Selama 40 Minggu

$$\dot{\lambda}_5 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial R} = -\lambda_5 [-d]$$

$$\dot{\lambda}_6 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial D} = -(\lambda_1 [-kb\eta_D S] + \lambda_2 [kb\eta_D S] + \lambda_6 [-f]).$$

Berdasarkan penjelasan di atas, untuk memperoleh S, E, I, I_T, R, D dari bentuk u^* yang optimal, maka tahap yang perlu dilakukan selanjutnya adalah dengan menyelesaikan persamaan *state* dan *co-state* yang berbentuk persamaan diferensial non linear. Karena persamaan diferensial non linear sulit diselesaikan secara analitik, maka dilakukan penyelesaian secara numerik.

6.2. Simulasi

Penyelesaian masalah kontrol optimal dapat dilakukan secara numerik dengan cara mensimulasikan permasalahan kontrol optimal dengan menggunakan program DOTcvp pada *software* MATLAB. Pada simulasi numerik model penyebaran penyakit ebola dengan program DOTcvp ini, sebelumnya akan didefinisikan persamaan *state* yaitu $S = y(1), E = y(2), I = y(3), I_T = y(4), R = y(5), D = y(6)$ dan indeks performansi didefinisikan sebagai *state* baru yakni $y(7)$, serta variabel kontrol yang berupa karantina yang didefinisikan dengan u_1 .

Simulasi numerik ini dilakukan dengan membandingkan model matematika penyebaran penyakit ebola tanpa adanya variabel kontrol dan dengan adanya variabel kontrol. Hal tersebut bertujuan untuk mengetahui tingkat keefektifan dari karantina sehingga tujuan dari fungsi ongkos yang diberikan akan tercapai.

Peneliti menggunakan algoritma Runge-Kutta orde 4 (RK4) untuk mendapatkan solusi numerik yang diharapkan [11]. Simulasi yang dilakukan menggunakan nilai awal untuk setiap kondisi adalah sebagai berikut $S(0) = 980, E(0) = 508, I(0) = 137, I_T(0) = 49, R(0) = 12, D(0) = 122$ dan dilakukan saat $t = 0$ sampai $t = 40$ minggu. Nilai parameter yang digunakan sama dengan nilai parameter saat mensimulasikan bidang fase untuk titik setimbang endemik. Konstanta pembobot untuk pemberian karantina sebesar $A = 350$.

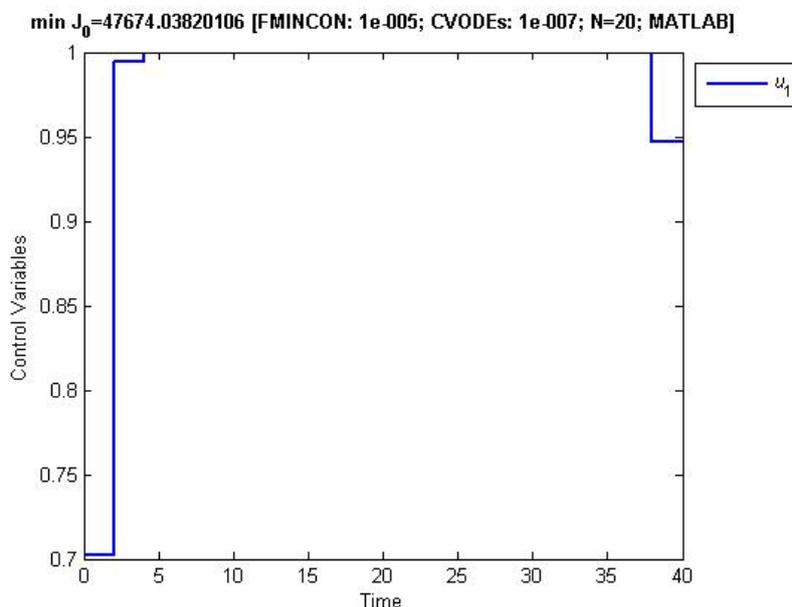
Simulasi dilakukan sebanyak dua skenario. Simulasi pertama dilakukan untuk kondisi tanpa adanya pengontrol, sehingga $u = 0$. simulasi kedua dilakukan untuk kondisi adanya pengontrol berupa karantina (u).

Berikut adalah hasil simulasi perbandingan model matematika penyebaran penyakit ebola tanpa adanya variabel kontrol dan dengan adanya variabel kontrol.

Berdasarkan Gambar 5 menunjukkan bahwa terdapat perbedaan antara jumlah populasi manusia terinfeksi (*Infected*) pada model tanpa adanya variabel kontrol dan model dengan adanya variabel kontrol. Hal ini ditunjukkan pada Tabel 6 bahwa jumlah populasi manusia terinfeksi (*Infected*) dengan kontrol u mengalami

Tabel 6. Perbandingan Jumlah Individu Terinfeksi (*Infected*) Selama 40 Minggu

Skenario	Jumlah Populasi <i>I</i> pada Minggu ke-40
Tanpa Variabel Kontrol	1686
Dengan Variabel Kontrol	1073

**Gambar 6.** Profil Kontrol u

penurunan di akhir pengamatan yaitu pada minggu ke-40.

Selanjutnya untuk simulasi profil kontrol u akan disajikan pada **Gambar 6**.

Pada **Gambar 6** menunjukkan pemberian kontrol u yaitu karantina dalam jangka waktu 40 minggu. Dari awal pengamatan hingga minggu ke-4 upaya karantina terus menerus naik, pada minggu ke-4 hingga minggu ke-38 upaya karantina dilakukan secara maksimal, kemudian upaya karantina mengalami penurunan menjadi 95% hingga akhir pengamatan.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa untuk meminimumkan populasi manusia yang terinfeksi (*Infected*) serta biaya yang dikeluarkan untuk karantina maka dilakukan penerapan kontrol berupa karantina itu sendiri. Tindakan ini meminimumkan populasi manusia yang terinfeksi (*Infected*).

7. Kesimpulan

Analisis kestabilan dan kontrol optimal model matematika penyebaran penyakit Ebola dengan variabel kontrol berupa karantina telah dipelajari. Model ini memiliki dua titik setimbang yaitu titik setimbang non endemik (E_0) dan titik setimbang endemik (E_1). Titik setimbang non endemik akan stabil asimtotis jika $R_0 < 1$ dan memenuhi beberapa kondisi. Titik setimbang endemik cenderung stabil asimtotis jika memenuhi $R_0 > 1$ dengan

$$R_0 = \frac{kbp\Pi(d(f+\eta_D m) + f(m+v+\eta_T w) + \eta_D m(m+v+w))}{df(p+d)(m+v+w+d)(m+v+d)}.$$

Untuk mengurangi jumlah individu yang terinfeksi Ebola dan meminimumkan biaya yang dikeluarkan, diberikan intervensi berupa karantina sebagai variabel kontrolnya. Diperoleh persamaan kontrol optimal model matematika penyebaran penyakit ebola yaitu

$$u^* = \min \left(1, \max \left(0, \frac{\lambda_3 [pE - (v+m+w)I - dI] + \lambda_5 [v(I+I_T) - dR]}{A} \right) \right)$$

Berdasarkan hasil simulasi secara numerik pada model matematika penyebaran penyakit ebola sebelum dan setelah diberi kontrol berupa karantina dapat meminimalkan jumlah manusia yang terinfeksi virus ebola serta

menimimalkan biaya yang dikeluarkan. Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan modifikasi pada model matematika penyebaran penyakit ebola dengan penambahan variabel kontrol lain berupa vaksinasi yang diberikan pada populasi manusia yang rentan. Dengan demikian dapat diketahui upaya yang paling efektif dalam mengurangi penyebaran penyakit ebola serta dapat diketahui biaya yang paling minimal yang dikeluarkan untuk pengontrol.

Referensi

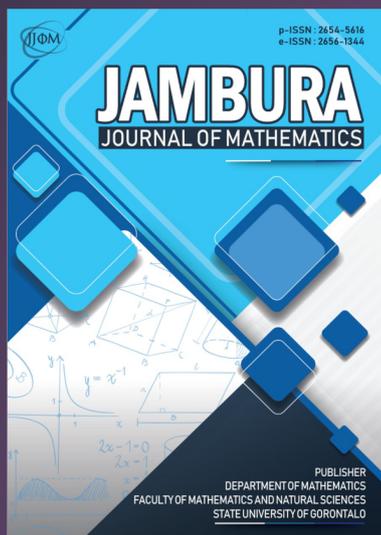
- [1] World Health Organization, "Ebola virus disease," <https://www.who.int/>, Beijing, accessed on March 13, 2018.
- [2] N. Dharmayanti dan I. Sendow, "Awareness of Ebola: exotic zoonotic disease," *Indonesian Bulletin of Animal and Veterinary Sciences*, vol. 25, no. 1, 2015.
- [3] Centers for Disease Control and Prevention, "Ebola hemorrhagic fever," <https://www.cdc.gov/>, accessed on March 13, 2018.
- [4] S. A. Carroll, J. S. Towner, T. K. Sealy, L. K. McMullan, M. L. Khristova, F. J. Burt, R. Swanepoel, P. E. Rollin, dan S. T. Nichol, "Molecular evolution of viruses of the family *Filoviridae* Based on 97 whole-genome sequences," *Journal of Virology*, vol. 87, no. 5, hal. 2608–2616, 2013.
- [5] F. Agosto, "Mathematical model of Ebola transmission dynamics with relapse and reinfection," *Mathematical Biosciences*, vol. 283, hal. 48–59, 2017.
- [6] P. Diaz, P. Constantine, K. Kalmbach, E. Jones, dan S. Pankavich, "A modified SEIR model for the spread of Ebola in Western Africa and metrics for resource allocation," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 324, hal. 141–155, 2018.
- [7] A. Dénes dan A. B. Gumel, "Modeling the impact of quarantine during an outbreak of Ebola virus disease," *Infectious Disease Modelling*, vol. 4, hal. 12–27, 2019.
- [8] P. Van Den Driessche dan J. Watmough, "Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission," *Mathematical Biosciences*, vol. 180, no. 1-2, hal. 29–48, 2002.
- [9] N. Chitnis, J. M. Hyman, dan J. M. Cushing, "Determining important parameters in the spread of malaria through the sensitivity analysis of a mathematical model," *Bulletin of Mathematical Biology*, vol. 70, no. 5, hal. 1272–1296, 2008.
- [10] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, G. R. V. dan E. F. Mishchenko, *The mathematical theory of optimal processes*. New York: Wiley, 1962.
- [11] S. Lenhart dan J. T. Workman, *Optimal control applied to biological models*. Chapman and Hall/CRC, 2007.



©2021 by the Author(s). This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License. **Editorial of JJBM:** Department of Mathematics, State University of Gorontalo, Jln. Prof. Dr. Ing. B. J. Habibie, Bone Bolango 96119, Indonesia.



Submit your manuscript at
<http://ejournal.ung.ac.id/>



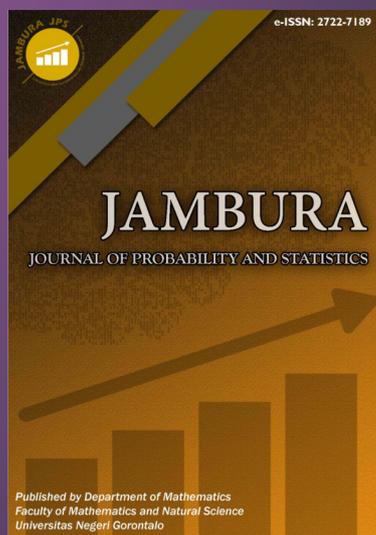
Jambura Journal of
Mathematics



Jambura Journal of
Biomathematics



Jambura Journal of
Mathematics Education



Jambura Journal of
Probability and Statistics

Published by
Department of Mathematics
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
State University of Gorontalo