

Analisis dinamik model *predator-prey* tipe Gause dengan wabah penyakit pada *prey*

Rusdianto Ibrahim, Lailany Yahya, Emlil Rahmi, and Resmawan

To cite this article:

R. Ibrahim, L. Yahya, E. Rahmi, and R. Resmawan, "Analisis dinamik model *predator-prey* tipe Gause dengan wabah penyakit pada *prey*", *Jambura J. Biomath*, vol. 2, no. 1, pp. 20–28, 2021

DOI: <https://doi.org/10.34312/jjbm.v2i1.10363>

© 2021 Author(s).

Articles You may be interested in

Bifurkasi Hopf pada model prey-predator-super predator dengan fungsi respon yang berbeda

D. Savitri and H. S. Panigoro

<http://dx.doi.org/10.34312/jjbm.v1i2.8399>

Analisis kestabilan model predator-prey dengan infeksi penyakit pada prey dan pemanenan proporsional pada predator

S. Maisaroh, Resmawan, and E. Rahmi

<http://dx.doi.org/10.34312/jjbm.v1i1.5948>

Bifurkasi Hopf pada model Lotka-Volterra orde-fraksional dengan Efek Allee aditif pada predator

H. S. Panigoro and D. Savitri

<http://dx.doi.org/10.34312/jjbm.v1i1.6908>

Discrete-time prey-predator model with θ -logistic growth for prey incorporating square root functional response

P. K. Santra

<http://dx.doi.org/10.34312/jjbm.v1i2.7660>

A stage-structure Rosenzweig-MacArthur model with effect of prey refuge

L. K. Beay and M. Saija

<http://dx.doi.org/10.34312/jjbm.v1i1.6891>

Analisis dinamik model *predator-prey* tipe Gause dengan wabah penyakit pada *prey*

Rusdianto Ibrahim¹, Lailany Yahya², Emli Rahmi^{3,*}, Resmawan⁴

^{1,2,3,4}Jurusan Matematika, Universitas Negeri Gorontalo, Bone Bolango 96119, Indonesia

*Corresponding author: emlirahmi@ung.ac.id

Abstrak

Artikel ini mempelajari dinamika dari model *predator-prey* tipe Gause dengan adanya wabah penyakit pada populasi *prey*. Model yang dibangun merupakan model deterministik yang mengasumsikan *prey* terbagi atas dua kompartemen, yaitu *prey* rentan dan *prey* terinfeksi, dan keduanya dimangsa oleh *predator* secara bilinear. Hasil analisis menunjukkan bahwa terdapat lima titik kesetimbangan secara biologis, yaitu titik kepunahan semua populasi, titik kepunahan *prey* terinfeksi dan *predator*, titik kepunahan *prey* terinfeksi, titik kepunahan *predator*, dan titik eksistensi seluruh populasi. Titik kepunahan semua populasi selalu tidak stabil sedangkan keempat lainnya stabil asimtotik lokal secara kondisional. Simulasi numerik berupa potret fase diberikan untuk menunjukkan kestabilan di setiap titik kesetimbangan yang bersesuaian dengan hasil-hasil analisis sebelumnya.

Kata Kunci: *Predator-prey*; Penyebaran Penyakit; Kestabilan Lokal

Abstract

This article studies the dynamics of a Gause-type predator-prey model with infectious disease in prey. The constructed model is a deterministic model which is assumed the prey is divided into two compartments i.e. susceptible prey and infected prey, and both of them are hunted by predator bilinearly. It is investigated that there exist five biological equilibrium points such as all population extinction point, infected prey and predator extinction point, infected prey extinction point, predator extinction point, and co-existence point. We find that all population extinction point always unstable while others are conditionally locally asymptotically stable. Numerical simulations as well as the phase portraits are given to support the analytical results.

Keywords: *Predator-prey*; Infectious Disease; Local Stability

1. Pendahuluan

Interaksi antara dua atau lebih spesies dalam suatu ekosistem merupakan topik yang populer dalam pemodelan matematika karena menyangkut eksistensi dari populasi spesies-spesies tersebut. Salah satu model interaksi antara dua spesies yang memiliki perkembangan pesat dalam pemodelan matematika yaitu model *predator-prey*, sebagai contoh lihat [1–8]. Selain karena adanya interaksi antara populasi, eksistensi dari suatu populasi juga dipengaruhi oleh adanya infeksi penyakit baik yang mewabah secara tertutup dalam suatu populasi ataupun menyebar lintas populasi. Wabah ini dapat diakibatkan oleh virus, bakteri, dan parasit [9–14]. Dalam artikel ini, dipelajari interaksi antara *predator* dan *prey* dengan wabah penyakit pada *prey*. Diberikan beberapa asumsi berikut untuk membangun model yaitu:

1. Hubungan antara dua populasi mengikuti interaksi *predator-prey* tipe Gause [15] dengan x dan y masing-masing menyatakan populasi *prey* dan *predator*.
2. *Prey* terbagi menjadi dua sub populasi, yaitu *prey* rentan x_S dan *prey* terinfeksi x_I . *Prey* rentan tumbuh secara logistik dengan laju pertumbuhan intrinsik r dan daya dukung lingkungan K . *Prey* terinfeksi tidak memberikan kontribusi terhadap laju kelahiran *prey* rentan, namun turut bersaing mendapatkan makanan dengan *prey* rentan. Laju infeksi *prey* rentan menjadi *prey* terinfeksi diasumsikan bilinear yang disimbolkan dengan β . Selain itu, karena adanya penyakit, *prey* terinfeksi mati dengan laju kematian α .
3. Kedua sub populasi *prey* dimangsa oleh *predator* mengikuti fungsi respon *predator* Holling tipe-I dengan laju pemangsaan *prey* rentan m_1 dan laju pemangsaan *prey* terinfeksi m_2 . Kedua pemangsaan yang dilakukan memberikan kontribusi terhadap laju kelahiran *predator* dengan b_1 adalah laju konversi pemangsaan *prey* rentan menjadi laju kelahiran *predator* dan b_2 adalah laju konversi pemangsaan *prey* terinfeksi menjadi laju kelahiran *predator*. *Predator* mati secara alami dengan laju kematian δ .

Dengan asumsi tersebut, dibangun model sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dx_S}{dt} &= rx_S \left(1 - \frac{x_S + x_I}{K}\right) - m_1 x_S y - \beta x_S x_I \\ \frac{dx_I}{dt} &= \beta x_S x_I - m_2 x_I y - \alpha x_I \\ \frac{dy}{dt} &= b_1 x_S y + b_2 x_I y - \delta y\end{aligned}\quad (1)$$

dengan $x_S(0) \geq 0, x_I(0) \geq 0, y(0) \geq 0$ dan $r, K, m_1, m_2, b_1, b_2, \beta, \alpha, \delta > 0$. Beberapa model yang relevan dengan (1) dapat dilihat pada [16–22]. Penelitian yang paling mendekati model (1) dikerjakan oleh Hasan dkk. [17] dan Maisaroh dkk. [18] yang masing-masing mengasumsikan adanya pemanenan konstan dan proposional pada predator, sedangkan pada artikel ini diasumsikan tidak ada pemanenan pada kedua populasi. Penelitian yang serupa juga dipelajari oleh Panigoro dkk. [16] yang secara asumsi sama, namun menggunakan operator yang berbeda yaitu operator turunan fraksional Caputo. Panigoro dkk [16] juga melakukan penskalaan terhadap model untuk mempermudah analisis dinamik yang dilakukan. Dalam artikel ini digunakan persamaan diferensial orde-satu dan tidak dilakukan nondimensionalisasi sehingga makna biologis dari model dapat dipertahankan.

Artikel ini disusun sebagai berikut. Pada **Pokok Bahasan 2** diberikan pembuktian bahwa model layak secara biologis yaitu memiliki solusi tak negatif dan selalu terbatas. Pada **Pokok Bahasan 3** diidentifikasi eksistensi titik kesetimbangan biologis dari model (1) dan dipelajari kestabilan lokal dari titik kesetimbangan tersebut. Untuk memperlihatkan dinamika secara lokal di sekitar titik kesetimbangan, diberikan simulasi numerik berupa potret fase pada **Pokok Bahasan 4**. Artikel ini diakhiri dengan memberikan kesimpulan pada **Pokok Bahasan 5**.

2. Keberartian Model Matematika Biologi

Model (1) dikatakan layak secara biologis jika memenuhi beberapa kriteria berikut:

1. Untuk suatu kondisi awal kepadatan populasi tertentu yang tak-negatif, kepadatan populasi akan selalu tak-negatif sepanjang $t \rightarrow \infty$.
2. Kepadatan populasi harus selalu terbatas sepanjang $t \rightarrow \infty$ mengingat bahwa daya dukung lingkungan seperti sumber daya dan kondisi tempat tinggal atau habitat yang ada juga memiliki keterbatasan.

Dengan demikian diberikan teorema berikut.

Teorema 1. Untuk setiap nilai awal $(x_S(0), x_I(0), y(0))$ tak negatif, solusi $x_S(t), x_I(t)$, dan $y(t)$ selalu tak-negatif dan terbatas sepanjang $t \rightarrow \infty$.

bukti. Pertama-tama, akan ditunjukkan bahwa solusi selalu tak negatif. Perhatikan bahwa model (1) dapat dituliskan menjadi

$$\frac{dx_S}{dt} = F_1(x_S, x_I, y)x_S, \quad \frac{dx_I}{dt} = F_2(x_S, x_I, y)x_I, \quad \frac{dy}{dt} = F_3(x_S, x_I, y)y, \quad (2)$$

dengan

$$\begin{aligned}F_1(x_S, x_I, y) &= r \left(1 - \frac{x_S + x_I}{K}\right) - m_1 y - \beta x_I, \\ F_2(x_S, x_I, y) &= \beta x_S - m_2 y - \alpha, \\ F_3(x_S, x_I, y) &= b_1 x_S + b_2 x_I - \delta.\end{aligned}$$

Dari pers. (2) diperoleh

$$\frac{dx_S}{x_S} = F_1(x_S, x_I, y) dt, \quad \frac{dx_I}{x_I} = F_2(x_S, x_I, y) dt, \quad \frac{dy}{y} = F_3(x_S, x_I, y) dt. \quad (3)$$

Dengan menyelesaikan pers. (3) didapatkan

$$x_S = x_S(0) \exp \left\{ \int_0^t F_1(x_S, x_I, y) dt \right\}, \quad x_I = x_I(0) \exp \left\{ \int_0^t F_2(x_S, x_I, y) dt \right\}, \quad y = y(0) \exp \left\{ \int_0^t F_3(x_S, x_I, y) dt \right\}.$$

Karena $\exp \left\{ \int F_i(x_S, x_I, y) dt \right\} > 0, \forall i = 1..3, x_S(0) \geq 0, x_I(0) \geq 0, \text{ dan } y(0) \geq 0$ maka terbukti bahwa $x_S(t), x_I(t), \text{ dan } y(t)$ selalu tak-negatif $t \rightarrow \infty$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $x_S(t), x_I(t), \text{ dan } y(t)$ terbatas sepanjang $t \rightarrow \infty$. Diberikan fungsi definit positif sebagai berikut.

$$\mathcal{V}(x_S(t), x_I(t), y(t)) = x_S + \left(\frac{r + \beta K}{\beta K} \right) x_I + \eta y. \quad (4)$$

Jelas bahwa jika V terbatas maka $x_S, x_I, \text{ dan } y$ terbatas. Selanjutnya, berdasarkan pers. (4) didapatkan

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{V}}{dt} + \zeta \mathcal{V} &= \frac{dx_S}{dt} + \left(\frac{r + \beta K}{\beta K} \right) \frac{dx_I}{dt} + \eta \frac{dy}{dt} + \zeta \left(x_S + \left(\frac{r + \beta K}{\beta K} \right) x_I + \eta y \right) \\ &= \left(rx_S \left(1 - \frac{x_S + x_I}{K} \right) - m_1 x_S y - \beta x_S x_I \right) + \left(\frac{r + \beta K}{\beta K} \right) (\beta x_S x_I - m_2 x_I y - \alpha x_I) \\ &\quad + \eta (b_1 x_S y + b_2 x_I y - \delta y) + \left(\zeta x_S + \zeta \left(\frac{r + \beta K}{\beta K} \right) x_I + \zeta \eta y \right) \\ &= rx_S - \frac{r}{K} x_S^2 - \left(\frac{r}{K} + \beta \right) x_S x_I - m_1 x_S y + \frac{\beta(r + \beta K)}{\beta K} x_S x_I - \frac{m_2(r + \beta K)}{\beta K} x_I y - \frac{\alpha(r + \beta K)}{\beta K} x_I \\ &\quad + \eta b_1 x_S y + \eta b_2 x_I y - \eta \delta y + \zeta x_S + \frac{\zeta(r + \beta K)}{\beta K} x_I + \zeta \eta y \\ &= (r + \zeta) x_S - \frac{r}{K} x_S^2 - (m_1 - \eta b_1) x_S y - \left(\frac{m_2(r + \beta K)}{\beta K} - \eta b_2 \right) x_I y \\ &\quad - \frac{(r + \beta K)}{\beta K} (\alpha - \zeta) x_I - \eta (\delta - \zeta) y. \end{aligned}$$

Pilih $\eta < \min \left\{ \frac{m_1}{b_1}, \frac{m_2(r + \beta K)}{b_2 \beta K} \right\}$ dan $\zeta < \min \{ \alpha, \delta \}$ sehingga

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{V}}{dt} + \zeta \mathcal{V} &\leq (r + \zeta) x_S - \frac{r x_S^2}{K} \\ &= -\frac{r}{K} \left(x_S^2 - \frac{(r + \zeta) K}{r} x_S + \frac{(r + \zeta)^2 K^2}{4r^2} \right) + \frac{(r + \zeta)^2 K}{4r} \\ &= -\frac{r}{K} \left(x_S - \frac{(r + \zeta) K}{2r} \right)^2 + \frac{(r + \zeta)^2 K}{4r} \\ &\leq \frac{(r + \zeta)^2 K}{4r}. \end{aligned}$$

Dengan memanfaatkan teorema perbandingan [23] diperoleh

$$0 \leq \mathcal{V}(x_S(t), x_I(t), y(t)) \leq \frac{(r + \zeta)^2 K}{4\zeta r} + \frac{\mathcal{V}(x_S(0), x_I(0), y(0))}{e^{\zeta t}}.$$

Ketika $t \rightarrow \infty$ maka $0 \leq \mathcal{V}(x_S(t), x_I(t), y(t)) \leq \frac{(r + \zeta)^2 K}{4\zeta r}$. Dengan demikian, model (1) terbatas. ■

3. Titik Kesetimbangan, Eksistensi, dan Kestabilannya

Titik kesetimbangan model (1) diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan berikut.

$$\begin{aligned} \left[r \left(1 - \frac{x_S + x_I}{K} \right) - m_1 y - \beta x_I \right] x_S &= 0 \\ [\beta x_S - m_2 y - \alpha] x_I &= 0 \\ [b_1 x_S + b_2 x_I - \delta] y &= 0 \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh lima titik kesetimbangan sebagai berikut.

1. $E_0 := (0, 0, 0)$ dimana titik kesetimbangan pertama ini menunjukkan suatu kondisi ketika terjadi kepunahan pada semua populasi.

2. $E_1 := (K, 0, 0)$ kondisi ini menunjukkan kepunahan yang terjadi pada populasi *prey* terinfeksi dan *predator*.
3. $E_2 := \left(\frac{\delta}{b_1}, 0, \frac{r(b_1K - \delta)}{Km_1b_1} \right)$ kondisi yang menunjukkan ketika populasi *prey* terinfeksi punah.
4. $E_3 := \left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{r(\beta K - \alpha)}{\beta(\beta K + r)}, 0 \right)$ titik ini menunjukkan kepunahan pada populasi *predator*.
5. $E_4 := \left(X, \frac{\delta - b_1X}{b_2}, \frac{\beta X - \alpha}{m_2} \right)$ dimana $X = \frac{m_2\delta(\beta K + r) - b_2K(rm_2 + m_1\alpha)}{b_1m_2(\beta K + r) - b_2(rm_2 + m_1\beta K)}$ kondisi yang menunjukkan eksistensi seluruh populasi.

Berdasarkan kondisi biologis maka E_i , $i = 0..4$ merupakan titik kesetimbangan biologis dari model (1) jika $E_i \in \mathbb{R}_+^3$ dengan $\mathbb{R}_+^3 := \{(x_s, x_I, y) | x_s \geq 0, x_I \geq 0, y \geq 0, (x_s, x_I, y) \in \mathbb{R}\}$. Dengan demikian diperoleh teorema sebagai berikut.

Teorema 2. (i) E_0 dan E_1 adalah titik kesetimbangan biologis.

(ii) E_2 adalah titik kesetimbangan biologis jika $K > \frac{\delta}{b_1}$.

(iii) E_3 adalah titik kesetimbangan biologis jika $K > \frac{\alpha}{\beta}$.

(iv) E_4 adalah titik kesetimbangan biologis jika $\frac{\alpha}{\beta} < X < \frac{\delta}{b_1}$ dan; $m_2 > \max\{m_2^*, \hat{m}_2\}$ atau $m_2 < \min\{m_2^*, \hat{m}_2\}$ dengan $m_2^* = \frac{b_2K(rm_2 + m_1\alpha)}{\delta(\beta K + r)}$ dan $\hat{m}_2 = \frac{b_2(rm_2 + m_1\beta K)}{b_1(\beta K + r)}$.

bukti. (i) Karena E_0 dan E_1 selalu berada di \mathbb{R}_+^3 , maka E_0 dan E_1 adalah titik kesetimbangan biologis.

(ii) Jika $K > \frac{\delta}{b_1}$ maka $\frac{r(b_1K - \delta)}{Km_1b_1} > 0$ sehingga $E_2 \in \mathbb{R}_+^3$. Dengan demikian E_2 merupakan titik kesetimbangan biologis.

(iii) Jika $K > \frac{\alpha}{\beta}$ maka $\frac{r(\beta K - \alpha)}{\beta(\beta K + r)} > 0$ sehingga $E_3 \in \mathbb{R}_+^3$. Akibatnya E_3 merupakan titik kesetimbangan biologis.

(iv) Akan ditunjukkan bahwa $\frac{\delta - b_1X}{b_2} > 0$, $\frac{\beta X - \alpha}{m_2} > 0$, dan $X > 0$ sehingga $E_4 \in \mathbb{R}_+^3$. Perhatikan bahwa $\frac{\delta - b_1X}{b_2} > 0$ jika $X < \frac{\delta}{b_1}$, dan $\frac{\beta X - \alpha}{m_2} > 0$ jika $X > \frac{\alpha}{\beta}$. Oleh karena itu, jika $\frac{\alpha}{\beta} < X < \frac{\delta}{b_1}$ maka $\frac{\delta - b_1X}{b_2} > 0$ dan $\frac{\beta X - \alpha}{m_2} > 0$ secara simultan. Selanjutnya akan diidentifikasi kondisi parameter sehingga $X > 0$. Perhatikan bahwa $X > 0$ jika

(a) $m_2\delta(\beta K + r) - b_2K(rm_2 + m_1\alpha) > 0$ dan $b_1m_2(\beta K + r) - b_2(rm_2 + m_1\beta K) > 0$, atau;

(b) $m_2\delta(\beta K + r) - b_2K(rm_2 + m_1\alpha) < 0$ dan $b_1m_2(\beta K + r) - b_2(rm_2 + m_1\beta K) < 0$.

Jika $m_2 > \max\{m_2^*, \hat{m}_2\}$ maka poin (a) terpenuhi sehingga $X > 0$ yang mengakibatkan $E_4 \in \mathbb{R}_+^3$. Jika $m_2 < \min\{m_2^*, \hat{m}_2\}$ maka poin (b) terpenuhi sehingga $X > 0$ yang mengakibatkan $E_4 \in \mathbb{R}_+^3$. Akibatnya E_4 adalah titik kesetimbangan biologis. ■

Selanjutnya akan dipelajari dinamika dari model (1) secara lokal disekitar titik-titik kesetimbangan E_i , $i = 0..4$. Dinamika secara lokal dari model (1) tersebut dipelajari dengan terlebih dahulu melakukan pelinearan disekitar titik-titik kesetimbangan. Hasil pelinearan memberikan matriks Jacobi sebagai berikut.

$$J(x_s, x_i, y) = \begin{bmatrix} r\left(1 - \frac{2x_s + x_i}{K}\right) - m_1y - \beta x_i & -\frac{rx_s}{K}(\beta K + r) & -m_1x_s \\ \beta x_i & \beta x_s - m_2y - \alpha & m_2x_i \\ yb_1 & yb_2 & b_1x_s + b_2x_i - \delta \end{bmatrix} \quad (5)$$

Kestabilan dari titik-titik kesetimbangan secara lokal diberikan oleh beberapa teorema berikut.

Teorema 3. E_0 adalah titik kesetimbangan tidak stabil tipe pelana.

bukti. Dengan mensubstitusikan E_0 ke matriks Jacobi (5) diperoleh

$$J(x_s, x_i, y)|_{E_0} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\delta \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Dari matriks Jacobi (6) diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = r, \lambda_2 = -\alpha, \text{ dan } \lambda_3 = -\delta. \tag{7}$$

Karena ada satu nilai eigen bernilai positif dan dua lainnya bernilai negatif maka E_0 tidak stabil tipe pelana. ■

Teorema 4. E_1 stabil asimtotik lokal jika $K < \min \left\{ \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\delta}{b_1} \right\}$.

bukti. Di titik kesetimbangan E_1 , matriks Jacobi (5) menjadi

$$J(x_s, x_i, y)|_{E_1} = \begin{bmatrix} -r & -(\beta K + r) & -m_1 K \\ 0 & \beta K - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & b_1 K - \delta \end{bmatrix},$$

yang memberikan nilai eigen: $\lambda_1 = -r, \lambda_2 = \beta K - \alpha$, dan $\lambda_3 = b_1 K - \delta$. Jelas bahwa $\lambda_1 < 0$. Selanjutnya jika $K < \min \left\{ \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\delta}{b_1} \right\}$ mengakibatkan $K < \frac{\alpha}{\beta}$ dan $K < \frac{\delta}{b_1}$ sehingga berturut-turut memberikan $\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_3 < 0$. Dengan demikian E_1 stabil asimtotik lokal. ■

Berdasarkan Teorema 4 dan syarat eksistensi pada Teorema 2 terlihat bahwa syarat kestabilan E_1 bertentangan dengan syarat eksistensi E_2 dan E_3 . Dengan demikian diperoleh Lema 5.

Lema 5. Jika E_1 stabil asimtotik lokal maka E_2 dan E_3 bukan merupakan titik kesetimbangan biologis.

Selanjutnya akan dipelajari kestabilan dari titik kesetimbangan E_2 . Perhatikan teorema berikut.

Teorema 6. E_2 stabil asimtotik lokal jika $\beta < \frac{\alpha b_1}{\delta} + \frac{(b_1 K - \delta) r m_2}{\delta m_1 K}$.

bukti. Matriks Jacobi model (1) di titik kesetimbangan E_2 yaitu

$$J(x_s, x_i, y)|_{E_2} = \begin{bmatrix} -\frac{r\delta}{b_1 K} & -\frac{r\delta b_1 + \beta\delta b_1 K}{b_1^2 K} & -\frac{m_1 \delta}{b_1} \\ 0 & \frac{K m_1 \beta \delta - r(b_1 K - \delta) m_2 - K m_1 b_1 \alpha}{b_1^2 K} & 0 \\ \frac{r(b_1 K - \delta)}{K m_1} & \frac{r b_2 (b_1 K - \delta)}{K m_1 b_1} & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Matriks Jacobi (8) memberikan nilai eigen

$$\lambda_1 = -\frac{\alpha K m_1 b_1 + (b_1 K - \delta) r m_2 - \delta \beta K m_1}{K m_1 b_1},$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-\delta r \pm \sqrt{\delta r \hat{\Delta}}}{2 b_1 K},$$

dengan $\hat{\Delta} = \delta r - 4 b_1 K (b_1 K - \delta)$. Perhatikan bahwa $\lambda_1 < 0$ jika $\beta < \frac{\alpha b_1}{\delta} + \frac{(b_1 K - \delta) r m_2}{\delta m_1 K}$. Dengan demikian, kestabilan E_2 bergantung pada λ_2 dan λ_3 . Untuk $\hat{\Delta} < 0$ maka $\lambda_{2,3} \in \mathbb{C}$ dengan $Re(\lambda_i) < 0, i = 2, 3$ sehingga E_2 stabil asimtotik lokal. Selanjutnya untuk $\hat{\Delta} \geq 0$ mengakibatkan $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = 2, 3$. Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa $\lambda_i < 0, i = 2, 3$ yang juga mengakibatkan E_2 stabil asimtotik lokal. ■

Teorema 7. E_3 stabil asimtotik lokal jika $b_2 < \frac{(\beta\delta - \alpha b_1)(K\beta + r)}{(\beta K - \alpha)r}$.

bukti. Dengan mensubstitusikan E_3 ke matriks Jacobi (5) diperoleh

$$J(x_s, x_i, y)|_{E_3} = \begin{bmatrix} r - \frac{2r\alpha}{\beta K} - \frac{r(\beta K - \alpha)}{\beta K(\beta K + r)} - \frac{r(\beta K - \alpha)}{\beta K + r} & -\frac{\alpha(\beta K + r)}{\beta K} & -\frac{m_1\alpha}{\beta} \\ \frac{r(\beta K - \alpha)}{\beta K + r} & 0 & -\frac{m_2r(\beta K - \alpha)}{\beta(\beta K + r)} \\ 0 & 0 & \frac{b_1\alpha}{\beta} + \frac{b_2r(\beta K - \alpha)}{\beta(\beta K + r)} - \delta \end{bmatrix},$$

yang memberikan nilai eigen

$$\lambda_1 = -\frac{(\beta\delta - \alpha b_1)(K\beta + r) - (\beta K - \alpha)rb_2}{\beta(\beta K + r)}, \quad \lambda_3 = \frac{-\alpha r - \sqrt{\alpha r \tilde{\Delta}}}{2\beta K},$$

$$\lambda_2 = \frac{-\alpha r + \sqrt{\alpha r \tilde{\Delta}}}{2\beta K}, \quad \tilde{\Delta} = \alpha r - 4\beta K(\beta K - \alpha)$$

Jika $b_2 < \frac{(\beta\delta - \alpha b_1)(K\beta + r)}{(\beta K - \alpha)r}$ maka $\lambda_1 < 0$. Selanjutnya, untuk $\tilde{\Delta} < 0$ maka $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 2, 3$ dengan $Re(\lambda_{2,3}) < 0$ sehingga E_3 stabil asimtotik lokal. Jika $\tilde{\Delta} > 0$ maka dengan mudah dapat dibuktikan bahwa $\lambda_{2,3} < 0$. Dengan demikian E_3 stabil asimtotik lokal. ■

Teorema 8. Misalkan:

$$\xi_1 = \frac{rX}{K}, \quad \xi_2 = \frac{m_1 X b_1 (\beta X - \alpha)}{m_2} + \frac{\beta X (\beta K + r) (\delta - b_1 X)}{b_2 K} + (\beta X - \alpha) (\delta - b_1 X),$$

$$\xi_3 = \frac{m_1 \beta X (\delta - b_2 X) (\beta X - \alpha)}{m_2} + \frac{r X (\beta X - \alpha) (\delta - b_1 X)}{K} - \frac{X b_1 (\beta K + r) (\delta - b_1 X) (\beta X - \alpha)}{b_2 K}.$$

E_4 stabil asimtotik lokal jika $\xi_3 > 0$ dan $\xi_1 \xi_2 > \xi_3$.

bukti. Dengan mengevaluasi matriks Jacobi (5) pada titik E_4 , diperoleh

$$J(x_s, x_i, y)|_{E_4} = \begin{bmatrix} -\frac{rX}{K} & -\frac{X}{K}(\beta K + r) & -m_1 X \\ \frac{\beta(\delta - b_1 X)}{b_2} & 0 & -\frac{m_2(\delta - b_1 X)}{b_2} \\ \frac{b_1(\beta X - \alpha)}{m_2} & \frac{b_2(\beta X - \alpha)}{m_2} & 0 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

yang memberikan persamaan karakteristik $P(\lambda) = \lambda^3 + \xi_1 \lambda^2 + \xi_2 \lambda + \xi_3 = 0$. Dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz [24], E_4 stabil asimtotik lokal jika $\xi_3 > 0$ dan $\xi_1 \xi_2 > \xi_3$. ■

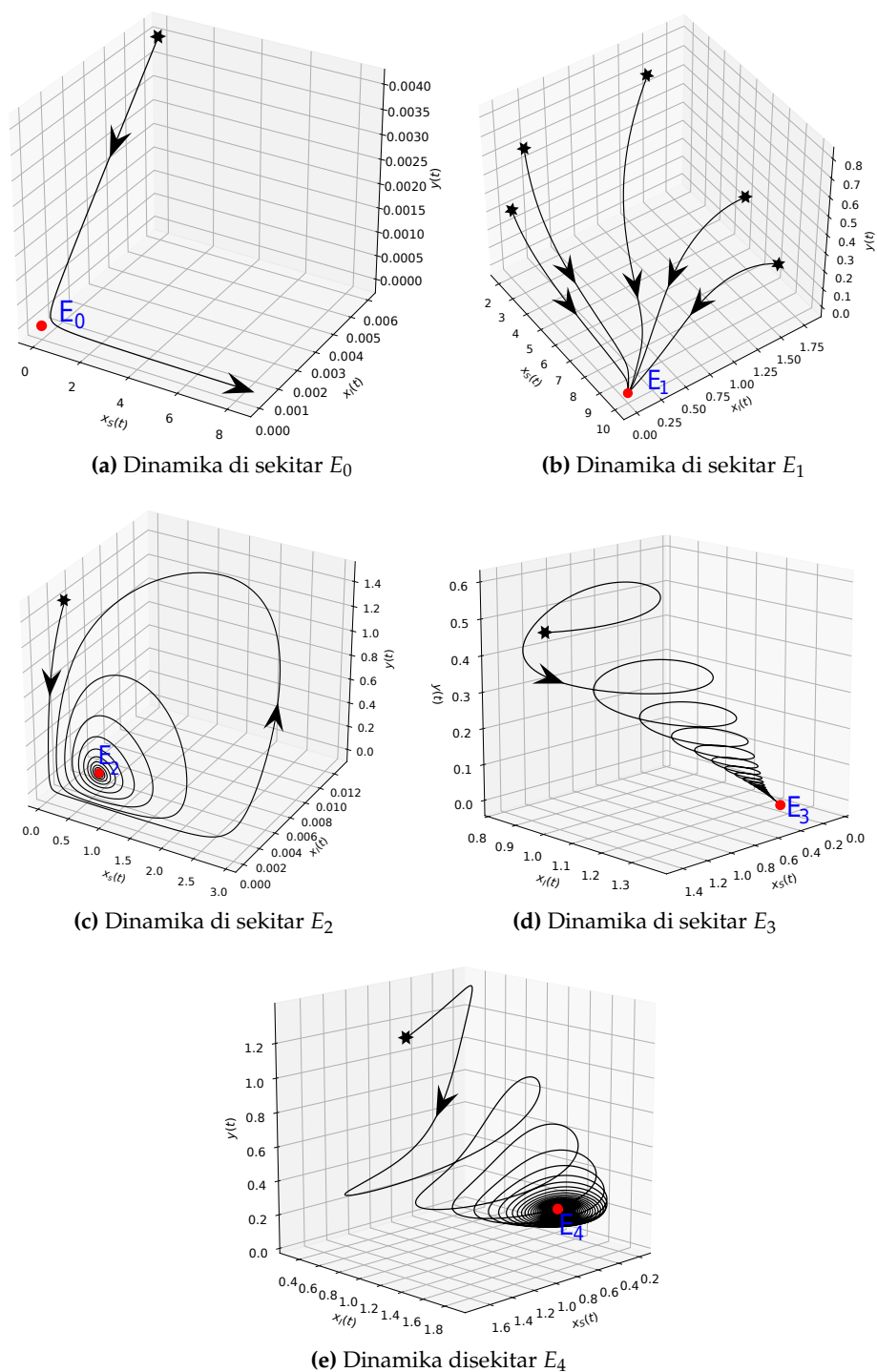
4. Simulasi Numerik

Pada tahapan ini, diberikan simulasi numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde-4 yang diaplikasikan pada Phyton 3.7 [25]. Karena model yang dipelajari tidak merujuk pada suatu kasus khusus yang terjadi pada interaksi dua spesies dalam suatu habitat, maka pemilihan parameter disesuaikan dengan kondisi kestabilan yang diperoleh pada hasil analisis sebelumnya. Nilai-nilai parameter tersebut diberikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Nilai awal dan parameter yang digunakan dalam simulasi numerik

Simulasi	Titik Keseimbangan	Parameter								
		K	α	β	r	b_1	b_2	m_1	m_2	δ
Simulasi 1	E_0	9	0.9	0.1	1	0.1	0.45	0.8	0.9	0.9
Simulasi 2	E_1	10	2.3	0.2	5	0.3	0.25	0.8	0.9	3.5
Simulasi 3	E_2	6	2	3.2	1	2.65	1	3	3.5	2.353
Simulasi 4	E_3	8	1	3	5	1	2	3	4	3
Simulasi 5	E_4	10	0.1	0.5	1	0.4	0.4	0.74	0.45	0.7

Berdasarkan Tabel 1 diperoleh dinamika dari model (1) sebagai berikut:



Gambar 1. Potret fase di sekitar titik kesetimbangan E_0 , E_1 , E_2 , E_3 , dan E_4 dengan nilai-nilai parameter seperti pada **Tabel 1**.

- (i) Berdasarkan **Teorema 3**, titik kesetimbangan E_0 tidak stabil tipe pelana. Oleh karena itu dipilih nilai-nilai parameter seperti pada **Tabel 1**: Simulasi 1, sehingga diperoleh potret fase seperti pada **Gambar 1a**. Awalnya solusi numerik menuju ke titik E_0 , tapi disaat solusinya sudah mendekati titik E_0 lalu menjauhi titik tersebut. Dengan nilai awal yang diberikan, solusi di awal waktu mengindikasikan populasi yang menuju kepunahan, tapi ketika semua populasinya akan punah terjadi peningkatan jumlah populasi pada *prey* rentan.
- (ii) Selanjutnya diberikan nilai-nilai parameter sesuai dengan **Tabel 1**: Simulasi 2. Berdasarkan **Teorema 4**, titik kesetimbangan E_1 stabil asimtotik lokal. Semua solusi dengan nilai-nilai awal yang cukup dekat dengan E_1

akan menuju E_1 yang mengindikasikan kepunahan *prey* dengan penyakit dan kepunahan *predator* sehingga dalam ekosistem tersebut hanya ada *prey* rentan. Lihat [Gambar 1b](#).

- (iii) Untuk menunjukkan dinamika di sekitar E_2 , dipilih nilai-nilai parameter seperti pada [Tabel 1](#): Simulasi 3. Solusi yang cukup dekat dengan E_2 bergerak mendekati E_2 secara periodik seperti pada [Gambar 1c](#). Hal ini sesuai dengan [Teorema 6](#) yang menyatakan kejadian punahnya populasi *prey* dengan penyakit sehingga yang tersisa adalah *prey* rentan dan *predator*.
- (iv) Pada [Tabel 1](#): Simulasi 4, dipilih nilai-nilai parameter yang bersesuaian dengan [Teorema 7](#). Dengan nilai awal yang cukup dekat dengan E_3 diperoleh solusi yang beresolusi menuju titik kesetimbangan E_3 . Dapat dilihat pada [Gambar 1d](#) bahwa *predator* akan punah sehingga pada ekosistem tersebut yang mampu bertahan hanya *prey* saja, meskipun tetap ada penyakit yang menyebar di dalam populasi *prey*.
- (v) Diakhir simulasi, diberikan nilai-nilai parameter seperti pada [Tabel 1](#): Simulasi 5. Berdasarkan [Teorema 8](#), terdapat titik kesetimbangan E_4 yang stabil asimtotik lokal yang mengindikasikan eksistensi dari semua populasi seperti pada [Gambar 1e](#). Solusi bergerak secara periodik ke titik E_4 .

Dengan demikian, telah diberikan simulasi numerik yang mendukung hasil analisis yang diberikan pada [Pokok Bahasan 3](#).

5. Kesimpulan

Model *predator-prey* tipe Gause dengan wabah penyakit pada *prey* telah dipelajari. Hasil analisis menunjukkan bahwa model yang dibangun layak secara biologis karena memiliki solusi yang positif dan terbatas. Model yang dibangun memiliki lima titik kesetimbangan dengan syarat-syarat eksistensi tertentu. Selain itu juga diberikan syarat-syarat yang harus dipenuhi secara biologis agar setiap titik-titik kesetimbangan stabil asimtotik lokal. Untuk mendukung hasil analisis yang dilakukan, diberikan simulasi numerik dengan nilai-nilai parameter merujuk pada kondisi eksistensi dan kestabilan dari setiap titik kesetimbangan yang diperoleh sebelumnya. Secara umum, teridentifikasi dari model yang ada bahwa tidak mungkin terjadi kepunahan dari seluruh populasi. Lebih khusus lagi, untuk populasi *prey* terinfeksi dan *predator* dapat punah, namun untuk populasi *prey* rentan tidak mungkin punah. Hal ini dikarenakan daya dukung populasi *prey* rentan bergantung kepada lingkungannya sedangkan daya dukung *predator* bergantung pada kepadatan populasi *prey*.

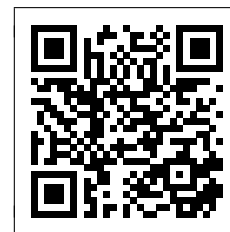
Referensi

- [1] H. S. Panigoro, "Analisis dinamik sistem predator-prey model Leslie-Gower dengan pemanenan secara konstan terhadap predator," *Euler*, vol. 2, no. 1, hal. 1–12, 2014.
- [2] H. S. Panigoro dan D. Savitri, "Bifurkasi Hopf pada model Lotka-Volterra orde-fraksional dengan efek Allee aditif pada predator," *Jambura Journal of Biomathematics*, vol. 1, no. 1, hal. 16–24, 2020.
- [3] L. K. Beay dan M. Saija, "A stage-structure Rosenzweig-MacArthur model with effect of prey refuge," *Jambura Journal of Biomathematics*, vol. 1, no. 1, hal. 1–7, 2020.
- [4] D. Savitri dan H. S. Panigoro, "Bifurkasi Hopf pada model prey-predator-super predator dengan fungsi respon yang berbeda," *Jambura Journal of Biomathematics*, vol. 1, no. 2, hal. 65–70, 2020.
- [5] H. S. Panigoro, A. Suryanto, W. M. Kusumawinahyu, dan I. Darti, "Continuous threshold harvesting in a Gause-type predator-prey model with fractional-order," in *AIP Conference Proceedings*, vol. 2264, no. 1. AIP Publishing, 2020, hal. 040001.
- [6] —, "A Rosenzweig-MacArthur model with continuous threshold harvesting in predator involving fractional derivatives with power law and mittag-leffler kernel," *Axioms*, vol. 9, no. 4, hal. 122, 2020.
- [7] Y. Yao, "Bifurcations of a Leslie-Gower prey-predator system with ratio-dependent Holling IV functional response and prey harvesting," *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 43, no. 5, hal. 2137–2170, 2020.
- [8] P. Mishra, S. Raw, dan B. Tiwari, "On a cannibalistic predator-prey model with prey defense and diffusion," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 90, hal. 165–190, 2021.
- [9] K. Sun, T. Zhang, dan Y. Tian, "Dynamics analysis and control optimization of a pest management predator-prey model with an integrated control strategy," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 292, hal. 253–271, 2017.
- [10] A. Suryanto dan I. Darti, "Dynamics of Leslie-Gower pest-predator model with disease in pest including pest-harvesting and optimal implementation of pesticide," *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 2019, no. June, hal. 1–9, 2019.
- [11] T. Yu, Y. Tian, H. Guo, dan X. Song, "Dynamical analysis of an integrated pest management predator-prey model with weak Allee effect," *Journal of Biological Dynamics*, vol. 13, no. 1, hal. 218–244, 2019.
- [12] H. S. Panigoro dan E. Rahmi, "Modifikasi sistem predator-prey: dinamika model Leslie-Gower dengan daya dukung yang tumbuh logistik," *SEMIRATA MIPAnet*, hal. 94–103, 2017.
- [13] T. Kar, A. Ghorai, dan S. Jana, "Dynamics of pest and its predator model with disease in the pest and optimal use of pesticide," *Journal of Theoretical Biology*, vol. 310, hal. 187–198, 2012.

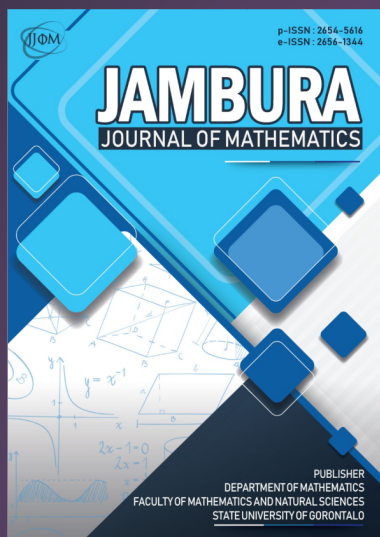
- [14] H. S. Panigoro, A. Suryanto, W. M. Kusumawinahyu, dan I. Darti, "Dynamics of an eco-epidemic predator-prey model involving fractional derivatives with power-law and Mittag-Leffler kernel," *Symmetry*, vol. 13, no. 5, hal. 785, 2021.
- [15] A. A. Berryman, "The origins and evolution of predator-prey theory," *Ecology*, vol. 73, no. 5, hal. 1530–1535, 1992.
- [16] H. S. Panigoro, A. Suryanto, W. M. Kusumawinahyu, dan I. Darti, "Dynamics of a fractional-order predator-prey model with infectious diseases in prey," *Communication in Biomathematical Sciences*, vol. 2, no. 2, hal. 105, 2019.
- [17] N. Hasan, R. Resmawan, dan E. Rahmi, "Analisis kestabilan model eko-epidemiologi dengan pemanenan konstan pada predator," *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*, vol. 16, no. 2, hal. 121, 2019.
- [18] S. Maisaroh, R. Resmawan, dan E. Rahmi, "Analisis kestabilan model predator-prey dengan infeksi penyakit pada prey dan pemanenan proporsional pada predator," *Jambura Journal of Biomathematics*, vol. 1, no. 1, hal. 8–15, 2020.
- [19] Y. H. Hsieh dan C. K. Hsiao, "Predator-prey model with disease infection in both populations," *Mathematical Medicine and Biology*, vol. 25, no. 3, hal. 247–266, 2008.
- [20] F. Rihan dan C. Rajivganthi, "Dynamics of fractional-order delay differential model of prey-predator system with Holling-type III and infection among predators," *Chaos, Solitons Fractals*, vol. 141, hal. 110365, 2020.
- [21] M. S. Rahman dan S. Chakravarty, "A predator-prey model with disease in prey," *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, vol. 18, no. 2, hal. 191–209, 2013.
- [22] A. S. Purnomo, I. Darti, dan A. Suryanto, "Dynamics of eco-epidemiological model with harvesting," *AIP Conference Proceedings*, vol. 1913, no. December 2017, 2017.
- [23] C. Roberts, *Ordinary Differential Equations*. Chapman and Hall/CRC, 2010.
- [24] M. Z. Ndi, *Pemodelan matematika*. Yogyakarta: Penerbit Deepublish, 2018.
- [25] S. Lynch, *Dynamical Systems with Applications using Python*. Manchester: Springer Nature, 2018.



©2021 by the Author(s). This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License. **Editorial of JJBM:** Department of Mathematics, State University of Gorontalo, Jln. Prof. Dr. Ing. B. J. Habibie, Bone Bolango 96119, Indonesia.



Submit your manuscript at
<http://ejournal.ung.ac.id/>



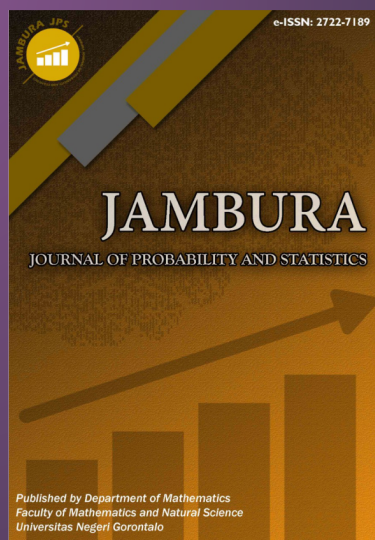
Jambura Journal of
Mathematics



Jambura Journal of
Biomathematics



Jambura Journal of
Mathematics Education



Jambura Journal of
Probability and Statistics

Published by
Department of Mathematics
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
State University of Gorontalo