RESEARCH ARTICLE • OPEN ACCESS

Analisis Dinamik Model Penyebaran COVID-19 dengan Vaksinasi

Resmawan, Lailany Yahya, Revandi S. Pakaya, Hasan S. Panigoro, and Agusyarif Rezka Nuha

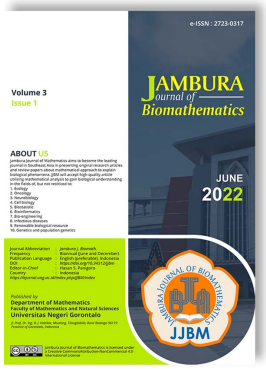
Volume 3, Issue 1, Pages 29–38, June 2022

Received 10 Januari 2022, Accepted 21 June 2022, Published Online 1 July 2022

To Cite this Article : Resmawan dkk., "Analisis Dinamik Model Penyebaran COVID-19 dengan Vaksinasi", *Jambura J. Biomath*, vol. 3, no. 1, pp. 29–38, 2022, *https://doi.org/10.34312/jjbm.v3i1.13176*

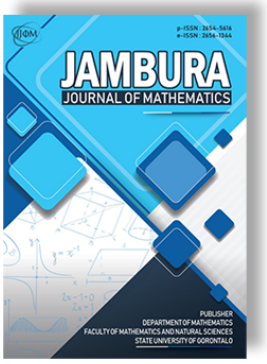
© 2022 by author(s)

JOURNAL INFO • JAMBURA JOURNAL OF BIOMATHEMATICS



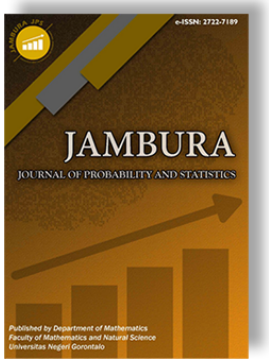
Homepage	:	http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/JJBM/index
Journal Abbreviation	:	Jambura J. Biomath.
Frequency	:	Biannual (June and December)
Publication Language	:	English (preferable), Indonesia
DOI	:	https://doi.org/10.34312/jjbm
Online ISSN	:	2723-0317
Editor-in-Chief	:	Hasan S. Panigoro
Publisher	:	Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo
Country	:	Indonesia
OAI Address	:	http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjbm/oai
Google Scholar ID	:	XzYgeKQAAAAJ
Email	:	editorial.jjbm@ung.ac.id

JAMBURA JOURNAL • FIND OUR OTHER JOURNALS

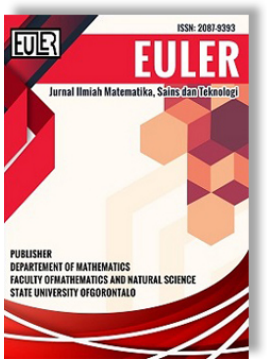


Jambura Journal of Mathematics

Jambura Journal of Mathematics Education



Jambura Journal of Probability and Statistics



EULER : Jurnal Ilmiah Matematika, Sains, dan Teknologi

Jambura Journal of Biomathematics, Volume 3, Issue 1, Pages 29–38, June 2022 https://doi.org/10.34312/jjbm.v3i1.13176

Research Article

Analisis Dinamik Model Penyebaran COVID-19 dengan Vaksinasi

Resmawan[1,*], **Lailany Yahya**[2], **Revandi S. Pakaya**[3], **Hasan S. Panigoro**[4], dan **Agusyarif Rezka Nuha**[5]

[1,2,3,4,5]*Jurusan Matematika, Universitas Negeri Gorontalo, Bone Bolango 96119, Indonesia*

ARTICLE HISTORY
Received 10 Januari 2022
Accepted 21 June 2022
Published 1 July 2022

KEYWORDS
Dynamic Analysis
Lyapunov function
Sensitivity Analysis
COVID-19
Vaccinate

ABSTRAK. *Coronavirus Disease 2019* (COVID-19) adalah virus jenis baru dari keluarga besar virus yang ditularkan antara manusia dan hewan (ditularkan secara zoonosis) yang pertama kali ditemukan di Kota Wuhan, Provinsi Hubei, China pada akhir 2019 yang hingga saat ini masih menyebar luas dan menjadi ancaman diseluruh dunia termasuk Indonesia. Pada artikel ini dibahas tentang model matematika penyebaran COVID-19 dengan vaksinasi. Dalam hal ini, populasi manusia dibagi menjadi 5 kelas, yaitu kelas *suspected, vaccine, exposed, infected dan recovered*. Model yang dikontruksi membentuk model *SVEIR* yang mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik. Analisis kestabilan menunjukkan bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal dan global jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$. Kemudian dilakukan analisis sensitivitas untuk mengetahui parameter yang sangat berpengaruh terhadap model serta selanjutnya diberikan simulasi secara numerik untuk mengambarkan perilaku dari model yang telah diperoleh berdasarkan analisis sensitivitas bilangan reproduksi dasar, diperoleh beberapa parameter yang berpengaruh terhadap penyebaran COVID-19. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa vaksinasi dapat menekan penambahan populasi terinfeksi dan bergantung pada tingkat efektivitas vaksinasi.

ABSTRACT. *Coronavirus Disease 2019 (COVID-19) is a new type of virus from a large family of viruses transmitted between humans and animals (zoonotically transmitted) that was first discovered in Wuhan City, Hubei Province, China in late 2019 which is still widespread and threat throughout the world including Indonesia. This article discussed about the mathematical model of the spread of COVID-19 with vaccinations. In this case, the human population is divided into 5 classes, namely the suspected, vaccine, exposed, infected and recovered classes. The constructed model forms an SVEIR model that has two equilibrium points, namely disease-free and endemic equilibrium points. Stability analysis shows that the equilibrium point is stable local and global asymptotic if $R_0 < 1$ and unstable if $R_0 > 1$. Then a sensitivity analysis was carried out to determine the parameters that greatly affect the model as well as furthermore, numerical simulations are given to describe the behavior of the model that has been obtained based on the analysis of the sensitivity of basic reproductive numbers, obtained several parameters that affect the spread of COVID-19. Numerical simulation results show that vaccination can suppress the addition of infected populations and depend on the level of effectiveness of vaccination.*

This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComercial 4.0 International License. ***Editorial of JJBM:*** *Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo, Jln. Prof. Dr. Ing. B. J. Habibie, Bone Bolango 96119, Indonesia.*

1. Pendahuluan

Coronavirus merupakan keluarga besar virus yang ditularkan antara manusia dan hewan (ditularkan secara zoonosis). Terdapat dua jenis coronavirus yang diketahui menyebabkan penyakit pada manusia, yaitu *Middle East Respiratory Syndrome (MERS-CoV)* dan *Severe Acute Respiratory Syndrome (SARS-CoV)*. Pada akhir tahun 2019 telah ditemukan jenis baru coronavirus yang dapat menimbulkan gejala gangguan pernapasan akut seperti demam, batuk, dan sesak napas di Kota Wuhan, Provinsi Hubei, China yang mempunyai nama resmi Coronavirus Disease 2019 (COVID-19) [1].

World Health Organization (WHO) atau Badan Kesehatan Dunia secara resmi menetapkan virus corona (COVID-19) sebagai suatu pandemi pada tanggal 11 Maret 2020 [2]. Virus ini kemudian telah menyebar secara luas dan mendadak menjadi ancaman di dunia, terutama setelah merenggut ribuan nyawa manusia dalam waktu yang relatif singkat [3]. Penyakit ini menjadi salah satu topik pembicaraan utama karena dampak yang diakibatkannya, sehingga membuat banyak pihak untuk terjun langsung mengambil langkah-langkah aktif dalam menemukan solusi penanganan kesehatan dan sarana pencegahan agar dampak yang ditimbulkan tidak akan lebih meluas. Dari sudut pandang matematis, fokus ini berkaitan erat dengan implementasi model matematika untuk mempermudah memahami dan menganalisa suatu permasalahan dalam kehidupan sehari-hari.

Model matematika adalah metode mendeskripsikan masalah yang kompleks dalam bentuk matematika. Selain itu, model matematika dapat diterapkan pada berbagai bidang seperti biologi, ekologi, epidemiologi dan kedokteran [4]. Salah satu permasalahan yang dapat diselesaikan dengan menggunakan model matematika yakni masalah penyebaran COVID-19.

*Corresponding Author.

Email : *resmawan@ung.ac.id* (R. Resmawan), *lailany.math@gmail.com* (L. Yahya), *hspanigoro@ung.ac.id* (H.S. Panigoro), and *agusyarif@ung.ac.id* (A.R. Nuha)
Homepage : http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/JJBM/index / E-ISSN : 2723-0317
© 2022 by the Author(s).

Pemodelan matematika memudahkan seseorang untuk dapat memahami dan menemukan solusi yang tepat untuk penanganan COVID-19.

Beberapa penelitian telah membahas model matematika COVID-19. Seperti Khan dan Atangana [5] yang merancang model matematika dengan mengeksplorasi dinamika infeksi COVID-19 menggunakan operator turunan orde-fraksional ABC. Resmawan dkk [6] membahas model transisi COVID-19 dengan melibatkan intervensi karantika. Annas dkk [7] menggunakan model SEIR untuk mempelajari penyebaran COVID-19 di Indonesia. Resmawan dan Yahya [8] melakukan analisis sensitivitas untuk mengetahui parameter mana yang paling dominan untuk mempengaruhi endemisitas COVID-19. Gebremeskel dkk. [9] mempelajari wabah pandemi COVID-19 dan menyelidiki lebih lanjut tren masa depannya di Ethiopia menggunakan data COVID yang dilaporkan harian. Pengembangan model matematika tentang penularan COVID-19 masih sangat terbuka dan terus dilakukan hingga saat ini. Terlebih, setelah ditemukannya vaksin untuk mencegah COVID-19.

Pada penelitian ini, diperkenalkan model baru yang mengacu pada model [6] dengan melakukan modifikasi yaitu dengan menggabungkan kelas populasi manusia yang terinfeksi tanpa gejala dan populasi manusia yang dikarantina kedalam kelas populasi manusia yang terpapar, hal ini dimaksudkan sesuai dengan keadaan dunia nyata bahwa tidak diberlakukannya lagi karantina. Modifikasi lainnya yaitu berupa penambahan kelas populasi vaksin yang mewakili individu yang telah divaksinasi. Vaksin ini dimaksudkan untuk memberi perlindungan tubuh agar tidak jatuh sakit akibat COVID-19 dengan cara menimbulkan atau menstimulasi kekebalan spesifik dalam tubuh. Model yang telah diperoleh akan dianalisis dengan memperhatikan titik kesetimbangan bebas penyakit, selanjutnya menyelidiki stabilitas lokal dan global keseimbangan bebas penyakit. Pada bagian akhir akan diberikan simulasi numerik untuk mengonfirmasi hasil analisa dinamika penyebaran COVID-19 dengan vaksinasi.

2. Metode

Penelitian ini dilakukan menggunakan metode studi pustaka dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Kajian pustaka terkait pemodelan matematika penyebaran COVID-19
2. Memodifikasi model matematika penyebaran COVID-19 dengan vaksinasi dan melakukan penskalaan model
3. Menentukan titik kesetimbangan dan analisis kestabilan titik kesetimbangan modifikasi model matematika penyebaran COVID-19 dengan vaksinasi
4. Melakukan simulasi numerik terhadap modifikasi model matematika penyebaran COVID-19 dengan vaksinasi
5. Menyelidiki efektivitas vaksinasi terhadap model yang dimodifikasi

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Model Matematika

Model pada penelitian ini membahas model matematika penyebaran COVID-19 tipe SVEIR. Model ini terbagi dalam enam kelas populasi, yaitu manusia yang rentan (S), manusia yang divaksin (V), manusia yang terpapar termasuk manusia terinfeksi tanpa gejala dalam masa inkubasi (E), manusia terinfeksi disertai gejala klinis (I) dan manusia yang pulih dari COVID-19 (R). Model yang dimodifikasi dengan pertimbangan atau batasan dalam merumuskan model matematika menggunakan asumsi sebagai berikut:

1. Laju rekrutmen kelahiran hanya ditujukan pada populasi (S) dimana setiap individu yang baru lahir akan dimasukkan kedalam kelas manusia rentan
2. Tingkat kematian terdiri atas tingkat kematian alami yang ditujukan kepada seluruh kelas populasi dan tingkat kematian disebabkan oleh COVID-19 yang hanya ditujukan pada populasi (I)
3. Kelompok individu dalam kelas vaksin akan terpapar apabila tingkat kekebalan dari vaksin menurun
4. Kelompok individu vaksin merupakan individu yang telah melewati dua kali tahapan vaksinasi
5. Penularan COVID-19 terjadi ketika adanya kontak antara individu pada populasi (S) dan populasi (V) dengan individu pada populasi (E) atau individu pada populasi (I)
6. Individu pada populasi (E) sudah mencakup individu yang terinfeksi tanpa gejala akan melewati masa inkubasi dan masuk kedalam populasi (I)
7. Individu pada populasi (I) akan mengalami pemulihan dan berpindah ke populasi (R)
8. Individu yang telah dinyatakan pulih dari COVID-19 tidak akan kembali rentan

Berdasarkan asumsi-asumsi diatas, diagram kompartmen model matematika penyebaran COVID-19 dengan vaksinasi diberikan oleh Gambar 1 sehingga diperoleh model dengan sistem persamaan diferensial sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \Pi N - \frac{(1-\varphi)\eta S(\xi_1 E + \xi_2 I)}{N} - (\mu + \varphi\alpha)S \\
\frac{dV}{dt} &= \varphi\alpha S - \left(\mu + \frac{\gamma(\xi_3 E + \xi_4 I)}{N}\right) V \\
\frac{dE}{dt} &= \frac{(1-\varphi)\eta S(\xi_1 E + \xi_2 I)}{N} + \frac{\gamma V(\xi_3 E + \xi_4 I)}{N} \\
&\quad - (\omega + \mu)E \\
\frac{dI}{dt} &= \omega E - (\rho + \mu + \delta)I \\
\frac{dR}{dt} &= \rho I - \mu R
\end{aligned} \tag{1}$$

dengan $S+V+E+I+R = N$. Untuk menyederhanakan model (1) dilakukan nondimensionalisasi sebagai berikut.

$$s = \frac{S}{N}, v = \frac{V}{N}, e = \frac{E}{N}, i = \frac{I}{N}, r = \frac{R}{N}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= \Pi - (1-\varphi)(\xi_1 e + \xi_2 i)\eta s - (\mu + \varphi\alpha)s \\
\frac{dv}{dt} &= \varphi\alpha s - (\mu + \gamma(\xi_3 e + \xi_4 i))v \\
\frac{de}{dt} &= (1-\varphi)(\xi_1 e + \xi_2 i)\eta s + \gamma v(\xi_3 e + \xi_4 i) \\
&\quad - (\omega + \mu)e \\
\frac{di}{dt} &= \omega e - (\rho + \mu + \delta)i \\
\frac{dr}{dt} &= \rho i - \mu r
\end{aligned} \tag{2}$$

3.2. *Penentuan Titik Kesetimbangan*

Untuk menentukan titik kesetimbangan pada sistem (2) dapat ditentukan dengan menyelesaikan persamaan tersebut dengan $\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{de}{dt} = \frac{di}{dt} = \frac{dr}{dt} = 0$. Dari penyelesaian persamaan (2) diperoleh dua titik kesetimbangan sebagai berikut.

1. Titik kesetimbangan bebas penyakit COVID-19 (E_0)

$$E_0 = (s_0, v_0, 0, 0, 0) = \left(\frac{\Pi}{\mu + \alpha\varphi}, \frac{\alpha\varphi\Pi}{\mu^2 + \alpha\varphi\mu}, 0, 0, 0\right) \tag{3}$$

2. Titik kesetimbangan endemik

$$E_1 = (s^*, v^*, e^*, i^*, r^*)$$

dengan

$$s^* = \frac{\omega\Pi}{(1-\varphi)((\rho+\mu+\delta)\xi_1 + \omega\xi_2)\eta i^* + (\alpha\varphi+\mu)\omega},$$

$$v^* = \frac{\varphi\alpha\omega^2\Pi}{((\xi_4\omega + \xi_3(\rho+\mu+\delta))\gamma i^* + \mu\omega)}$$
$$(((\rho+\mu+\delta)\xi_1 + \xi_2\omega)(1-\varphi)\eta i^* + \omega(\alpha\varphi+\mu))$$

$$e^* = \frac{(\rho+\mu+\delta)i^*}{\omega},$$

$$i^* = \frac{(+\omega+\mu-\gamma\xi_3 v^* - (1-\varphi)\eta\xi_1 s^*)e^*}{(1-\varphi)\eta\xi_2 s^* + \gamma\xi_4 v^*},$$

$$r^* = \frac{\rho i^*}{\mu}.$$

3.3. *Bilangan Reproduksi Dasar* (R_0)

Bilangan reproduksi dasar yang dinotasikan R_0 adalah nilai harapan banyaknya infeksi tiap satu satuan waktu. Infeksi ini terjadi pada suatu populasi rentan yang dihasilkan oleh satu individu terinfeksi [10]. Dalam menentukan bilangan reproduksi dasar digunakan metode Next Generation Matrix (NGM) [11]. Next Generation Matrix (K) didefinisikan sebagai berikut.

$$K = FV^{-1}$$

dengan

$$F = \begin{bmatrix} (1-\varphi)\eta\xi_1 s_0 + \gamma\xi_3 v_0 & (1-\varphi)\eta\xi_2 s_0 + \gamma\xi_4 v_0 \\ \omega & 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$V = \begin{bmatrix} \omega+\mu & 0 \\ 0 & \rho+\mu+\delta \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh matriks K sebagai berikut

$$K = \begin{bmatrix} \frac{(1-\varphi)\eta\xi_1 s_0 + \gamma\xi_3 v_0}{\omega+\mu} & \frac{(1-\varphi)\eta\xi_2 s_0 + \gamma\xi_4 v_0}{\rho+\mu+\delta} \\ \frac{\omega}{\omega+\mu} & 0 \end{bmatrix}.$$

R_0 diperoleh dari nilai eigen positif terbesar dari matriks K [8] yaitu

$$R_0 = R_A + R_S \tag{4}$$

dengan

$$R_A = \frac{(1-\varphi)\eta\xi_1 s_0 + \gamma\xi_3 v_0}{2(\omega+\mu)},$$

$$R_S = \sqrt{{R_A}^2 + \frac{(1-\varphi)\eta\omega\xi_2 s_0 + \gamma\omega\xi_4 v_0}{(\omega+\mu)(\rho+\mu+\delta)}}.$$

4. Kestabilan Titik Kesetimbangan

Kestabilan lokal dan global titik kesetimbangan E_0 diberikan oleh Teorema 1 dan 2.

Teorema 1. *Titik kesetimbangan bebas Penyakit COVID-19 E_0 stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$.*

Bukti. Matriks Jacobi yang di evaluasi pada titik kesetimbangan E_0 diberikan oleh

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & A_{14} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} \tag{5}$$

dengan

$$\begin{aligned}
A_{11} &= -(\mu+\alpha\varphi),\ A_{13} = -(1-\varphi)\eta\xi_1 s_0, \\
A_{14} &= -(1-\varphi)\eta\xi_2 s_0,\ A_{21} = \alpha\varphi,\ A_{22} = -\mu, \\
A_{23} &= -\gamma\xi_3 v_0,\ A_{24} = -\gamma\xi_4 v_0, \\
A_{33} &= (1-\varphi)\eta\xi_1 s_0 + \gamma\xi_3 v_0 - (\omega+\mu) \\
&= (2R_A - 1)(\omega+\mu) \\
A_{34} &= (1-\varphi)\eta\xi_2 s_0 + \gamma\xi_4 v_0,\ A_{43} = \omega, \\
A_{44} &= -(\rho+\mu+\delta),\ A_{54} = \rho,\ A_{55} = \mu.
\end{aligned}$$

Dari matriks Jacobi $J(E_0)$ diperoleh persamaan karakteristik

$$(\lambda - A_{11})(\lambda - A_{22})(\lambda - A_{55})$$
$$(\lambda^2 - (A_{33}+A_{44})\lambda + A_{33}A_{44} - A_{34}A_{43}) = 0,$$

sehingga diperoleh nilai eigen

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= A_{11} = -\mu - \alpha\varphi, \\
\lambda_2 &= A_{22} = -\mu, \\
\lambda_3 &= A_{55} = -\mu,
\end{aligned}$$

dan $\lambda_{4,5}$ adalah akar-akar dari

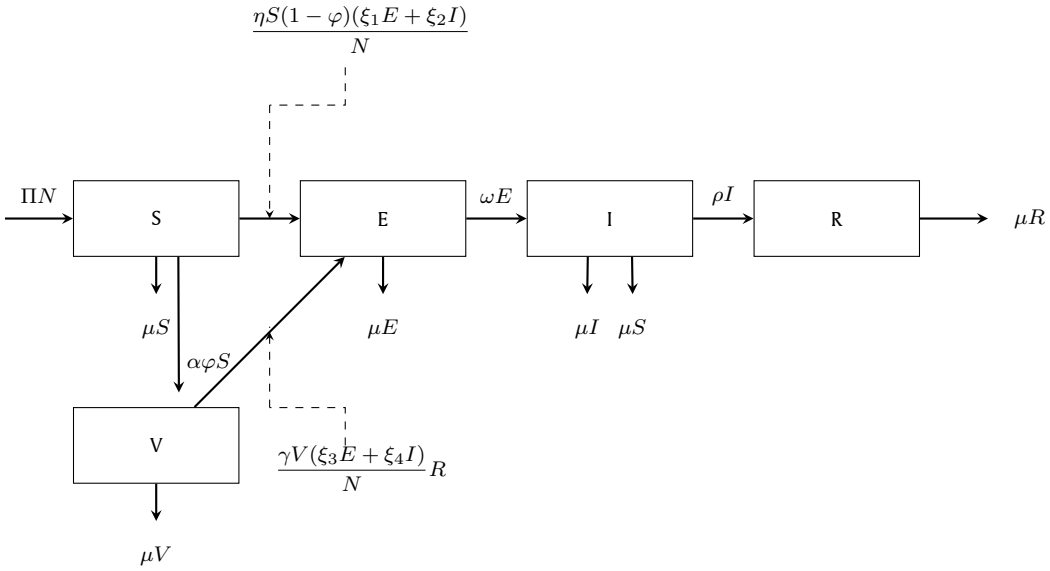
$$\lambda^2 - (A_{33}+A_{44})\lambda + A_{33}A_{44} - A_{34}A_{43} = 0, \tag{6}$$

Jelas bahwa $\lambda_i < 0,\ \forall i = 1,2,3$ dan $Re(\lambda_{45}) < 0$ jika $A_{33} + A_{44} < 0$ dan $A_{33}A_{44} - A_{34}A_{43} > 0$ (Kriteria Routh-Hurwitz [4]). Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
R_S &= \sqrt{{R_A}^2 + \frac{(1-\varphi)\eta\omega\xi_2 s_0 + \gamma\omega\xi_4 v_0}{(\omega+\mu)(\rho+\mu+\delta)}} \\
&> \sqrt{{R_A}^2} = R_A
\end{aligned}$$

sehingga jika $R_0 < 1$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
1 &> R_A + R_S > 2R_A \\
0 &> 2R_A - 1 \\
0 &> (2R_A - 1)(\omega+\mu) \\
&> (2R_A - 1)(\omega+\mu) - (\delta+\mu+\rho) \\
&= A_{33} + A_{44}
\end{aligned}$$



Gambar 1. Diagram kompartmen model matematika penyebaran COVID-19 dengan vaksinasi

Tabel 1. Deskripsi biologis variabel dan parameter pada model (1)

Parameter	Deskripsi
Π	Tingkat perekrutan kelahiran
μ	Kematian alami manusia
η	Peluang infeksi setelah kontak antara individu terinfeksi dengan individu rentan tanpa vaksinasi
ξ_1	Tingkat kontak antara individu rentan (S) dan individu terpapar (E)
ξ_2	Tingkat kontak antara individu rentan (S) dan individu terinfeksi dengan gejala klinis (I)
ξ_3	Tingkat kontak antara individu yang telah divaksinasi (V) dan individu terpapar (E)
ξ_4	Tingkat kontak antara individu yang telah divaksinasi (V) dan individu terinfeksi dengan gejala klinis (I)
ω	Tingkat tranmisi setelah menyelesaikan masa inkubasi dan berpindah ke (I)
ρ	Tingkat pemulihan individu terinfeksi dengan gejala klinis berpindah ke kelas individu yang pulih
φ	Proporsi individu rentan yang diberikan vaksin
δ	Kematian karena terinfeksi COVID-19
γ	Peluang setelah kontak antara individu terinfeksi dengan individu yang telah divaksinasi
α	Laju vaksinasi

dan

$$\begin{aligned}
&A_{33}A_{44} - A_{34}A_{43}\\
&\quad = -(2R_A-1)(\omega+\mu)(\delta+\mu+\rho)\\
&\qquad -((1-\varphi)\eta\omega\xi_2 s_0+\gamma\omega\xi_4 v_0)\\
&\quad = -(2R_A-1)(\omega+\mu)(\delta+\mu+\rho)\\
&\qquad -\left({R_S}^2-{R_A}^2\right)(\omega+\mu)(\rho+\mu+\delta)\\
&\quad = (2R_A-1-R_0))\,(R_0-1)(\omega+\mu)(\rho+\mu+\delta)\\
&\quad = \left((R_0-1)^2-2R_S(R_0-1)\right)(\omega+\mu)(\rho+\mu+\delta)\\
&\quad > 2R_S(1-R_0)(\omega+\mu)(\rho+\mu+\delta)\\
&\quad > 0
\end{aligned}$$

Dengan demikian terbukti bahwa E_0 stabil asimtotik lokal jika $R_0<1$. Dengan cara yang serupa dapat ditunjukkan sebaliknya untuk $R_0>1$ juga memiliki kestabilan yang berkebalikan. □

Teorema 2. *Jika* $2\omega+\mu<2(\omega+\mu)R_S<\dfrac{(\mu+\delta)\omega}{(\rho+\mu+\delta)R_0}$ *dan* $R_0<1$ *maka titik kesetimbangan bebas Penyakit COVID-19* E_0 *stabil asimtotik global di* $\Omega:=\left\{(s,v,e,i,r)\mid \dfrac{s_0}{s}+\dfrac{v}{v_0}<1\right\}$

Bukti. Diberikan fungsi Lyapunov definit positif yang merupakan kombinasi antara fungsi Volterra dan linear sebagai berikut.

$$V(s,v,e,i,r)=\left(s-s_0-s_0\ln\frac{s}{s_0}\right)+\left(v-v_0-v_0\ln\frac{v}{v_0}\right)+e+i+r.$$

Dengan demikian diperoleh turunan fungsi Lyapunov sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \left(\frac{s-s_0}{s}\right)\frac{ds}{dt}+\left(\frac{v-v_0}{v}\right)\frac{dv}{dt}+\frac{de}{dt}+\frac{di}{dt}+\frac{dr}{dt}\\
&= \left(\frac{s-s_0}{s}\right)(\Pi-(1-\varphi)\eta s(\xi_1 e+\xi_2 i)-(\mu+\varphi\alpha)s)\\
&\quad +\left(\frac{v-v_0}{v}\right)(\varphi\alpha s-(\mu+\gamma(\xi_3 e+\xi_4 i))v)\\
&\quad +(1-\varphi)\eta s(\xi_1 e+\xi_2 i)+\gamma v(\xi_3 e+\xi_4 i)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-(\omega+\mu)e+\omega e-(\rho+\mu+\delta)i+\rho i-\mu r\\
&=\Pi\left(2-\frac{s_0}{s}-\frac{s}{s_0}\right)+\alpha\varphi s\left(2-\frac{v_0}{v}-\frac{v}{v_0}\right)\\
&\quad-\mu(v+e+i+r)-\delta i+\gamma\xi_3 v_0 e\\
&\quad+\gamma\xi_4 v_0 i+\alpha\varphi s_0+(1-\varphi)\eta\xi_1 s_0 e\\
&\quad+(1-\varphi)\eta\xi_2 s_0 i+\frac{\alpha\varphi s v}{v_0}-\alpha\varphi s\\
&=\Pi\left(2-\frac{s_0}{s}-\frac{s}{s_0}\right)+\alpha\varphi s\left(2-\frac{v_0}{v}-\frac{v}{v_0}\right)\\
&\quad+\frac{(\omega+\mu)(\rho+\mu+\delta)(R_S-R_A)R_0 i}{\omega}\\
&\quad+2(\omega+\mu)R_A e-\mu(v+e+i+r)-\delta i\\
&\quad+\alpha\varphi s\left(\frac{s_0}{s}+\frac{v}{v_0}-1\right).
\end{aligned}
$$

Karena $R_0<1$ dan $R_A=R_0-R_S$ maka

$$
\begin{aligned}
\frac{dV}{dt}&\le\Pi\left(2-\frac{s_0}{s}-\frac{s}{s_0}\right)+\alpha\varphi s\left(2-\frac{v_0}{v}-\frac{v}{v_0}\right)\\
&\quad+(2(\omega+\mu)(1-R_S)-\mu)e-\mu(v+r)\\
&\quad+\frac{2(\omega+\mu)(\rho+\mu+\delta)R_S R_0-(\mu+\delta)\omega}{\omega}i\\
&\quad+\alpha\varphi s\left(\frac{s_0}{s}+\frac{v}{v_0}-1\right).
\end{aligned}
$$

Karena $2\omega+\mu<2(\omega+\mu)R_S<\dfrac{(\mu+\delta)\omega}{(\rho+\mu+\delta)R_0}$ maka di Ω diperoleh

$$
\frac{dV}{dt}\le\Pi\left(2-\frac{s_0}{s}-\frac{s}{s_0}\right)+\alpha\varphi s\left(2-\frac{v_0}{v}-\frac{v}{v_0}\right)
$$

Berdasarkan rata-rata aritmatik dan geometrik diperoleh $2-\dfrac{s_0}{s}-\dfrac{s}{s_0}\le 0$ dan $2-\dfrac{v_0}{v}-\dfrac{v}{v_0}\le 0$ sehingga $\dfrac{dV}{dt}<0$. Akibatnya, titik kesetimbangan E_0 stabil asimtotik global di Ω. □

5. Analisis Sensitivitas dan Simulasi Model

5.1. Nilai Parameter

Untuk melakukan simulasi maka diperlukan nilai nilai parameter yang mendukung. Nilai parameter diambil berdasarkan data sekunder yang diperoleh dari berbagai referensi serta pemilihan parameter lainnya didasarkan pada asumsi. Nilai parameter yang digunakan dapat dilihat pada Tabel 2 dan nilai awal dari setiap populasi dapat dilihat padaTabel 3.

5.2. Analisis Sensitivitas

Analisis sensitivitas yang dilakukan pada penelitian ini adalah analisis sensitivitas lokal untuk mengetahui parameter-parameter yang berpengaruh terhadap angka reproduksi dasar. Angka reproduksi dasar yang dianalisis yaitu pada saat kondisi $R_0>1$ yang menunjukkan bahwa terjadinya penyebaran COVID-19. Berdasarkan hal tersebut, maka perlu dilakukan analisis sensitivitas terhadap parameter-parameter untuk mengetahui upaya yang harus dilakukan agar menekan penyebaran COVID-19.

Analisis sensitivitas dilakukan dengan menentukan indeks sensitivitas dari parameter-parameter. Berdasarkan [14] indeks

Tabel 2. Estimasi nilai parameter model

Parameter	$R_0<1$	Sumber	$R_0>1$	Sumber
Π	4.1×10^{-5}	[12]	4.1×10^{-5}	[12]
μ	3.57×10^{-5}	[6]	3.57×10^{-5}	[6]
η	0.2	[6]	0.2	[6]
ξ_1	0.09	[6]	0.09	[6]
ξ_2	0.07	[6]	0.07	[6]
ξ_3	0.03	Asumsi	0.03	Asumsi
ξ_4	0.02	Asumsi	0.02	Asumsi
ω	0.005	[6]	0.005	[6]
ρ	0.27	[13]	0.0027	Asumsi
δ	0.001	[12]	0.001	[12]
α	0.001	Asumsi	0.0003	Asumsi
φ	0.2	Asumsi	0.2	Asumsi
γ	0.01	[13]	0.01	[13]

Tabel 3. Nilai awal model

Populasi	Nilai
$s(0)$	$\frac{267564000}{270000000}$
$v(0)$	$\frac{20534823}{270000000}$
$e(0)$	$\frac{2500000}{270000000}$
$i(0)$	$\frac{3372374}{270000000}$
$r(0)$	$\frac{2730720}{270000000}$

sensitivitas normalisasi dari bilangan reproduksi dasar didefinisikan sebagai berikut.

$$
C_p^{R_0}=\frac{\partial R_0}{\partial p}\times\frac{p}{R_0}
$$

Dimana p adalah parameter yang terdapat pada angka reproduksi dasar yaitu $\Pi,\eta,\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\mu,\alpha,\gamma,\omega,\rho,\delta,\varphi$

Analisis sensitivitas untuk persamaan $C_p^{R_0}$ dilakukan dengan menginput nilai parameter pada Tabel 2 Selanjutnya diperoleh $R_0=2,5574$ dan nilai indeks sensitivitas masing-masing parameter yang ditunjukkan pada Tabel 4 berikut.

Indeks sensitivitas dalam Tabel 4 diurutkan berdasarkan parameter dengan nilai indeks sensitivitas terbesar dan dapat disimpulkan bahwa tiap parameter memberikan pengaruh yang bervariasi terhadap R_0. Indeks sensitivitas yang bernilai positif menunjukkan adanya pengaruh perubahan nilai parameter yang berbanding lurus dengan perubahan angka reproduksi dasarnya, artinya jika nilai parameter diperbesar (diperkecil) sementara parameter lainnya dibuat konstan maka akan berkontribusi pada peningkatan (penurunan) angka reproduksi dasar. Sebagai contoh, parameter η mempunyai nilai indeks sensitivitas positif. Hal ini menunjukkan bahwa jikaη ditingkatkan maka nilai R_0juga akan meningkat.

Akan tetapi, indeks sensitivitas yang bernilai negatif menunjukkan adanya pengaruh perubahan nilai parameter yang berbanding terbalik dengan perubahan angka reproduksi

Tabel 4. Nilai Indeks Sensitivitas Parameter

Parameter	Indeks Sensitivitas
Π	1
η	$0,965498$
α	$-0,614466$
φ	$-0,614466$
ω	$-0,488833$
ξ_2	$0,487968$
ξ_1	$0,47753$
μ	$-0,397352$
ρ	$-0,357624$
δ	$-0,141725$
γ	$0,0345017$
ξ_3	$0,0183923$
ξ_4	$0,0161094$

dasarnya, artinya jika nilai parameter diperbesar (diperkecil) sementara parameter lainnya dibuat konstan, maka akan berkontribusi pada penurunan (peningkatan) angka reproduksi dasar. Sebagai contoh, parameter α mempunyai nilai indeks sensitivitas negatif yang artinya bahwa jika nilai α ditingkatkan maka R_0 akan mengalami penurunan.

Analisis sensitivitas menunjukkan bahwa parameter peluang infeksi setelah kontak antara individu terinfeksi dengan individu rentan tanpa vaksinasi dan parameter laju vaksinasi adalah parameter yang paling sensitif terhadap perubahan angka reprodksi dasar. indeks sensitivitas $C_{\eta}^{R_0} = 0,965498$ menunjukkan bahwa dengan meningkatkan peluang infeksi setelah kontak antara individu terinfeksi dengan indvidu rentan tanpa vaksinasi sebesar 10% akan meningkatkan nilai R_0 sebesar $9,65498\%$ dan $C_{\alpha}^{R_0} = -0,614466$ menunjukkan bahwa dengan meningkatkan laju pemberian vaksinasi sebesar $10\,\%$ akan menurunkan nilai R_0 sebesar $6,14466\%$

5.3. Simulasi Numerik

(i) Dinamika Populasi Untuk $R - 0 < 1$. Berdasarkan persamaan (2) diperoleh satu titik bebas penyakit COVID-19. Titik tetap bebas penyakit COVID-19 diperoleh dengan mensubtitusikan parameter parameter pada Tabel 2 dengan bilangan reproduksi dasar $R_0 = 0,563329$. Titik kesetimbangan bebas penyakit diberikan oleh.

$$E_0 = (0.17394,\ 0.97450,\ 0,\ 0,\ 0)$$

Selanjutnya untuk menganalisis titik kesetimbangan bebas penyakit COVID-19, dapat dilakukan dengan cara mensubstitusikan nilai parameter-parameter pada Tabel 2 ke persamaan (3) sehingga diperoleh nilai eigen untuk titik kesetimbangan bebas penyakit COVID-19 sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\lambda_{E_0} = &-0.271146, -0.002198,\\ &-0.000235, -0.000035, -0.00035\end{aligned}$$

Karena semua nilai eigennya bernilai negatif maka dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit COVID-19 stabil. Dinamika populasi penyebaran penyakit COVID-19 dengan vaksinasi untuk $R_0 < 1$ dapat dilihat pada Gambar 2. Gambar 2 menunjukkan bahwa setiap populasi stabil menuju titik kesetimbangan bebas penyakit COVID-19. Dimana populasi manusia yang rentan terhadap COVID-19 mengalami penurunan jumlah populasi dari nilai awal hingga mencapai kondisi stabil dititik $S = 0.174$ atau sekitar $46.980.000$ orang. Sedangkan populasi manusia yang telah diberi vaksin mengalami peningkatan jumlah populasi dari nilai awal hingga mencapai kondisi stabil dititik $V = 0.975$ atau sekitar $263.250.000$ orang. Adapun populasi manusia yang terinfeksi COVID-19 mengalami penurunan jumlah populasi dari nilai awal kemudian mengalami fluktuasi dan mencapai kondisi stabil dititik $I = 0$. Sedangkan populasi manusia yang terpapar COVID-19, dan populasi manusia yang telah sembuh dari COVID-19 masing-masing mengalami peningkatan jumlah populasi dari nilai awal dan kemudian mengalami penurunan jumlah populasi hingga mencapai kondisi stabil $E = R = 0$.

(ii) Dinamika Populasi $R_0 > 1$
Berdasarkan persamaan (2) diperoleh titik penyakit COVID-19. Titik kesetimbangan endemik penyakit COVID-19 diperoleh dengan cara mensubstitusikan parameter-parameter pada Tabel 2 pada persamaan (2) dengan nilai bilangan reproduksi dasar $R_0 = 2.55746$ titik kesetimbangan endemik penyakit COVID-19 diberikan oleh.

$$\begin{aligned}E_1 = &(0.167911, 0.261206, 0.00509969,\\ &0.00670007, 0.506728)\end{aligned}$$

Selanjutnya dilakukan pelinearan dan perhitungan pada sistem persamaan (2) disekitar titik tetap endemik. Sehingga diperoleh nilai eigen sebagai berikut.

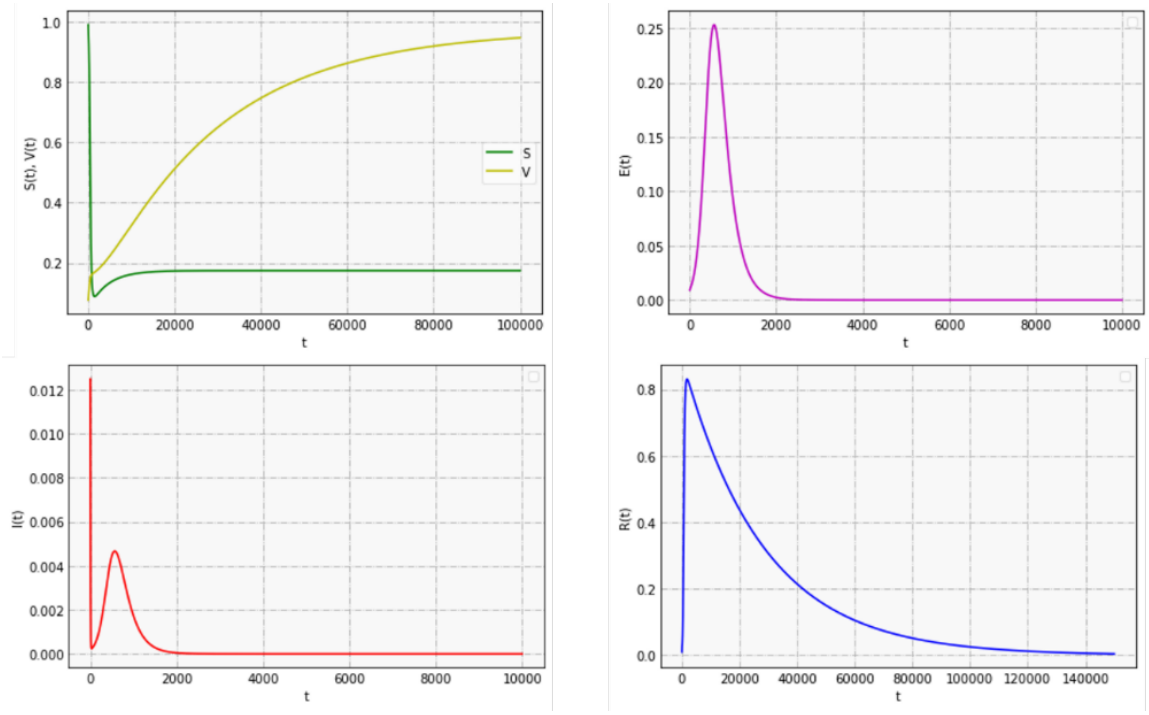
$$\begin{aligned}\lambda_{E_1} = (&-0.00635747 + 000001i,\\ &-0.00011526 + 0.00064901i,\\ &-0.00011526 - 0.00064901i,\\ &-0.0000398727 + 0.000001i,\\ &-0.0000357 + 0.000001i)\end{aligned}$$

Berdasarkan Gambar 3 dapat dilihat bahwa populasi menuju titik kesetimbangan endemik atau stabil disekitar titik tetap penyakit. Populasi manusia yang rentan terhadap COVID-19 mengalami penurunan jumlah populasi dari nilai awal dan mengalami fluktuasi hingga mencapai kondisi stabil pada saat $S = 0.168$ atau sekitar $45.360.000$ orang. Populasi manusia yang telah diberi vaksin mengalami peningkatan jumlah populasi dari nilai awal hingga stabil pada titik $V = 0.261$ atau sekitar $70.470.000$ orang. Populasi manusia yang telah sembuh dari COVID-19 mengalami peningkatan jumlah populasi manusia dan mengalami fluktuasi hingga stabil pada titik $R = 0.506$ atau sekitar $136.620.000$ orang. Populasi manusia yang terpapar COVID-19 dan populasi manusia yang terinfeksi COVID-19 masing-masing mengalami peningkatan jumlah populasi dari nilai awal dan kemudian mengalami penurunan jumlah populasi hingga mencapai stabil dititik $E = 0.005, I = 0.006$.

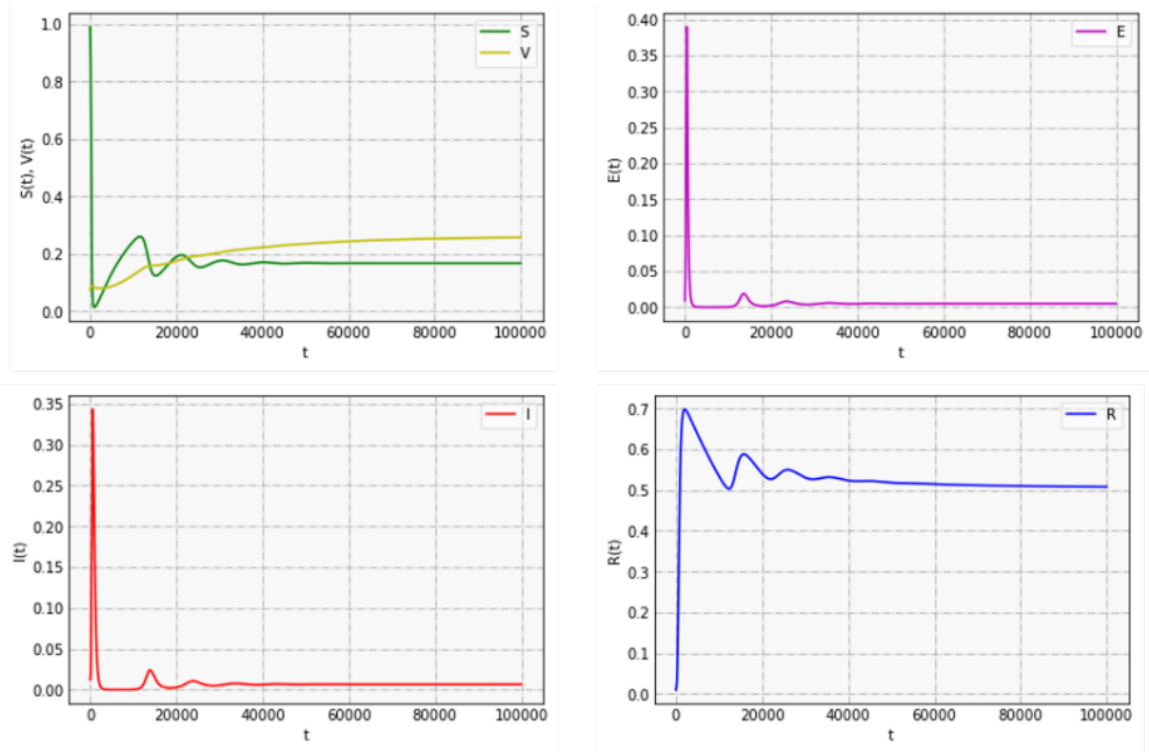
5.4. Simulasi dengan Variasi Nilai Parameter

a. *Simulasi laju individu yang divaksinasi terhadap penyebaran penyakit COVID-19 pada dinamika populasi.*

Simulasi ini dilakukan untuk mengetahui pengaruh α yaitu laju vaksinasi terhadap penyebaran penyakit COVID-19. Dalam hal ini



Gambar 2. Dinamika Populasi $R_0 < 1$

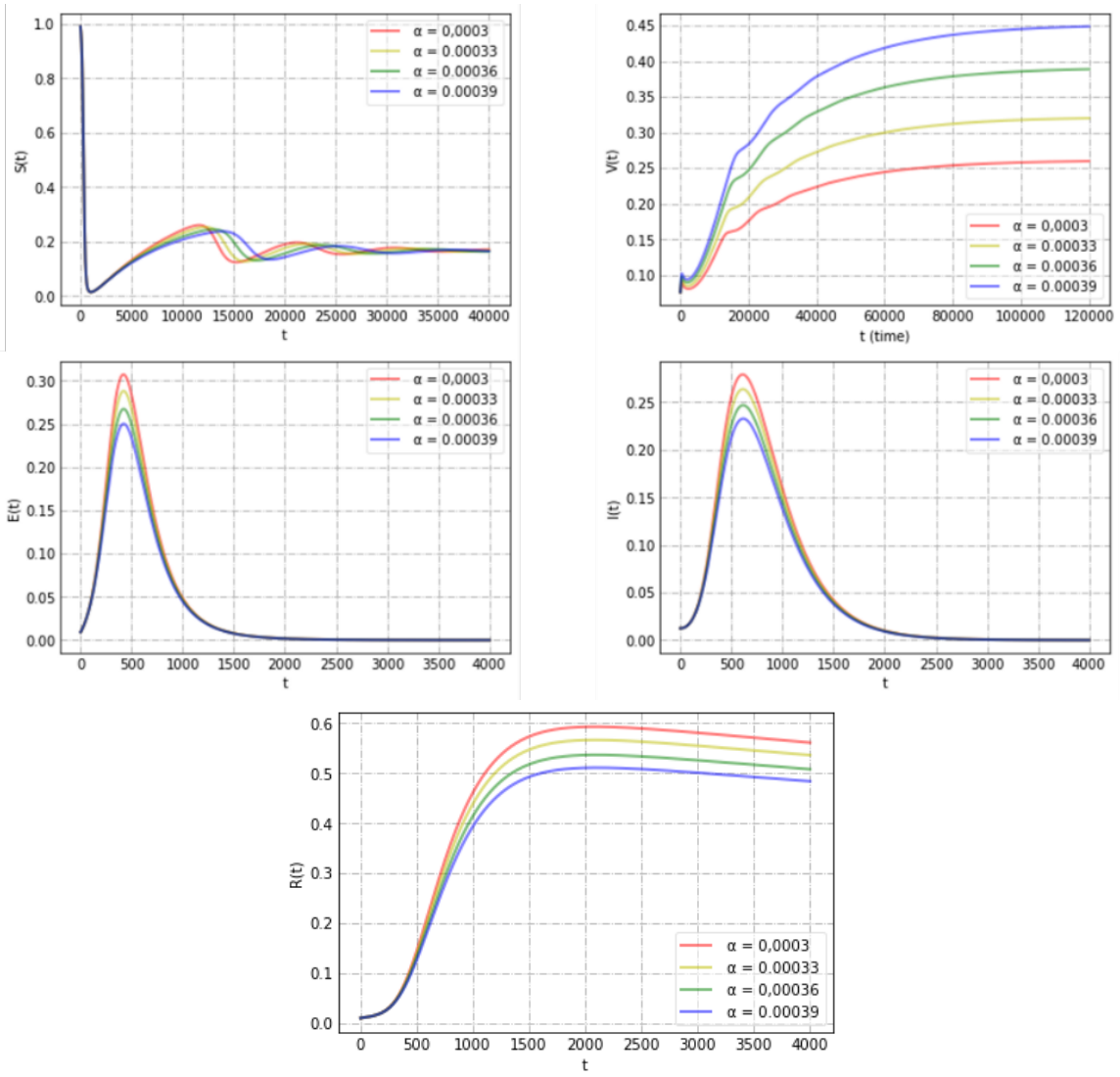


Gambar 3. Dinamika Populasi $R_0 > 1$

akan ditunjukkan bahwa peningkatan atau penurunan nilai parameter α dapat mengubah nilai bilangan reproduksi dasar (R_0) yang didefinisikan pada persamaan (4). Adapun nilai-nilai parameter α yang dapat mempengaruhi nilai R_0 dapat dilihat pada Tabel 4.

Berdasarkan Tabel 4 dapat diperhatikan bahwa dengan meningkatnya nilai α dapat menyebabkan turunnya nilai R_0. Sehingga upaya yang harus dilakukan untuk menekan laju penyebaran penyakit COVID-19 yaitu dengan meningkatkan laju vaksinasi terhadap populasi rentan. Selanjutnya hasil simulasi numerik disajikan pada Gambar 4.

Perubahan dari nilai laju individu yang divaksinasi mempengaruhi jumlah individu pada populasi manusia rentan, populasi manusia yang telah divaksin, jumlah populasi manusia terpapar dan terinfeksi serta manusia yang telah sembuh dari COVID-19. Jika laju dari individu yang telah divaksin diperbesar dan nilai



Gambar 4. Simulasi Laju Individu yang divaksinasi

Tabel 5. Hasil Simulasi Variasi Nilai Parameter α terhadap R_0

Parameter	α	R_0
Π	0.0003	2.5574
μ	0.00033	2.4141
η	0.00033	2.4141
γ	0.00039	2.1729

parameter lain tidak berubah, maka hal ini akan menyebabkan semakin berkurangnya jumlah manusia pada populasi rentan, manusia yang terpapar dan manusia yang terinfeksi serta manusia yang sembuh dari COVID-19. Sedangkan jumlah manusia pada populasi manusia yang telah divaksinasi meningkat. Hal ini menunjukkan bahwa jumlah manusia rentan, manusia yang terpapar dan manusia yang terinfeksi serta manusia yang sembuh dari COVID-19 dapat berkurang dengan adanya upaya vaksinasi yang diberikan pada individu rentan.

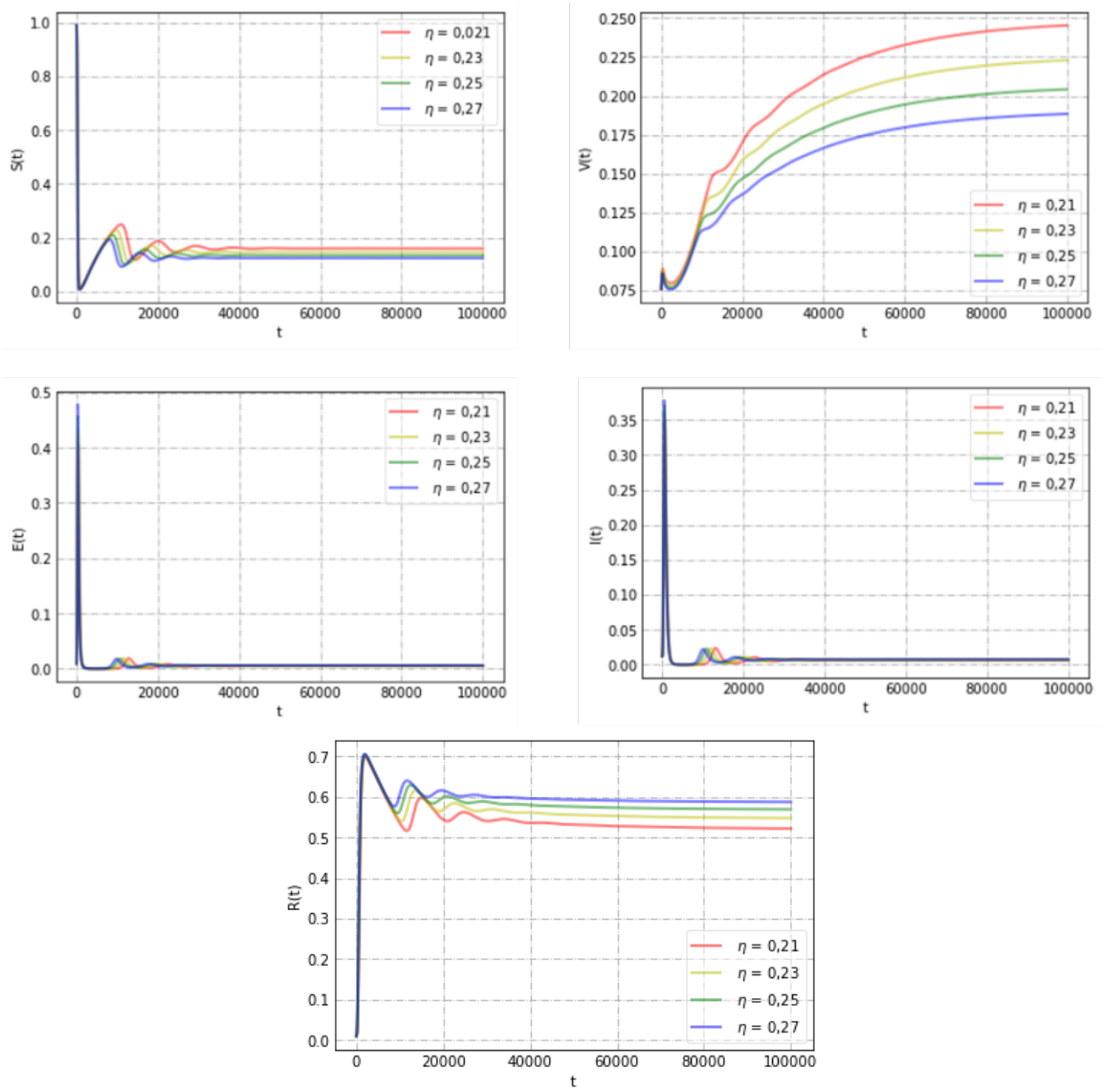
Gambar 4 menunjukkan bahwa pemberian vaksinasi pada individu yang rentan terhadap COVID-19 mempunyai peran cukup penting dalam menekan penyebaran COVID-19 yang ditandai dengan berkurangnya jumlah populasi rentan, manusia terpapar dan manusia yang terinfeksi COVID-19 dari jumlah populasi sebelumnya.

a. *Simulasi peluang infeksi setelah kontak antara individu terinfeksi dengan individu rentan tanpa vaksinasi.*

Simulasi ini dilakukan untuk mengetahui pengaruh η yaitu peluang infeksi setelah kontak antara individu terinfeksi dengan individu rentan tanpa vaksinasi. Berdasarkan hasil analisis sensitivitas, η merupakan parameter yang berpengaruh terhadap angka reproduksi dasar R_0. Oleh karena itu, akan ditunjukkan bahwa perubahan nilai parameter η dapat mengubah nilaiR_0. Adapun nilai-nilai parameter η yang dapat mempengaruhi nilai R_0 dapat dilihat pada Tabel 5.

Berdasarkan Tabel 5 dapat diperhatikan bahwa dengan meningkatkan nilai η dapat menyebabkan naiknya R_0. hal ini sesuai dengan hasil analisis sensitivitas bahwa parameter η berbanding lurus dengan R_0. Selain itu, dari Tabel 5 bahwa jika nilai η ditingkatkan akan menyebabkan makin menyebarnya COVID-19 sehingga populasi orang yang rentan akan berkurang. Selanjutnya, hasil simulasi numerik disajikan pada Gambar 5.

Perubahan dari nilai peluang infeksi setelah kontak antara



Gambar 5. Simulasi Peluang Infeksi Setelah Kontak Antara Individu Terinfeksi dengan Individu Rentan Tanpa Vaksinasi

Tabel 6. Hasil Simulasi Variasi Nilai Parameter η terhadap R_0

Parameter	α	R_0
Π	0.21	2.6813
μ	0.23	2.9290
η	0.25	3.1767
γ	0.27	3.4244

individu terinfeksi dengan individu rentan tanpa vaksinasi mempengaruhi jumlah individu pada populasi manusia yang rentan, populasi manusia yang diberikan vaksin dan populasi manusia yang sembuh. Jika peluang infeksi setelah kontak antara individu terinfeksi dengan individu rentan tanpa vaksinasi diperbesar dan parameter lain dibuat konstan, maka hal ini akan menyebabkan semakin berkurangnya jumlah populasi manusia yang rentan dan manusia yang diberi vaksinasi. Sedangkan populasi manusia yang telah sembuh dari COVID-19 mengalami peningkatan jumlah populasi manusia.

Gambar 5 menunjukkan bahwa jika peluang infeksi setelah kontak antara individu terinfeksi dengan individu rentan tanpa vaksinasi semakin besar maka akan berdampak pada menyebarluasnya COVID-19 dikalangan masyarakat. Sebaliknya jika peluang infeksi setelah kontak antara individu terinfeksi dengan individu rentan tanpa vaksinasi dikurangi ini akan membantu mencegah terjadinya penyebaran COVID-19.

6. Kesimpulan

Model yang diperoleh memiliki dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan tanpa penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan tanpa penyakit bersifat stabil asimtotik lokal dan global jika $R_0 < 1$. Sedangkan titik kesetimbangan endemik bersifat asimtotik lokal dan global jika $R_0 > 1$. Analisis sensitivitas menunjukkan bahwa parameter yang paling sensitif terhadap perubahan angka reproduksi dasar adalah laju vaksinasi. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa pada kondisi $R_0 < 1$ jumlah manusia yang terinfeksi COVID-19 berkurang dan pada waktu tertentu akan menghilang. Sedangkan pada kondisi $R_0 > 1$ jumlah manusia yang terinfeksi COVID-19 akan bertambah dan dapat terjadi penyebaran COVID-19. Peningka-

tan laju vaksinasi menyebabkan bilangan reproduksi dasar berkurang. Hal tersebut menunjukkan bahwa dengan adanya peningkatan laju vaksinasi terhadap individu rentan dapat mengurangi jumlah penyebaran COVID-19 sehingga tidak terjadi penyebaran COVID-19.

References

[1] Kementerian Kesehatan, "Pertanyaan dan Jawaban Terkait COVID-19," 2020. [Online]. Available: `https://infeksiemerging.kemkes.go.id/uncategorized/qna-pertanyaan-dan-jawaban-terkait-covid-19` (Accessed 20 November 2021).

[2] I. Darti, A. Suryanto, H. S. Panigoro, and H. Susanto, "Forecasting COVID-19 Epidemic in Spain and Italy Using A Generalized Richards Model with Quantified Uncertainty," *Communication in Biomathematical Sciences*, vol. 3, no. 2, pp. 90–100, 2020. DOI: 10.5614/cbms.2020.3.2.1

[3] D. Aldila, M. Z. Ndii, and B. M. Samiadji, "Optimal control on COVID-19 eradication program in Indonesia under the effect of community awareness," *Mathematical Biosciences and Engineering*, vol. 17, no. 6, pp. 6355–6389, 2020. DOI: 10.3934/mbe.202033

[4] M. Z. Ndii, *Pemodelan Matematika Dinamika Populasi Dan Penyebaran Penyakit Teori, Aplikasi, Dan Numerik*. Deepublish, 2018. ISBN 9786232090354.

[5] M. A. Khan and A. Atangana, "Modeling the dynamics of novel coronavirus (2019-nCov) with fractional derivative," *Alexandria Engineering Journal*, vol. 59, no. 4, pp. 2379–2389, 2020. DOI: 10.1016/j.aej.2020.02.033

[6] R. Resmawan, A. R. Nuha, and L. Yahya, "Analisis Dinamik Model Transmisi COVID-19 dengan Melibatkan Intervensi Karantina," *Jambura Journal of Mathematics*, vol. 3, no. 1, pp. 66–79, 2021. DOI: 10.34312/jjom.v3i1.8699

[7] S. Annas, M. Isbar Pratama, M. Rifandi, W. Sanusi, and S. Side, "Stability analysis and numerical simulation of SEIR model for pandemic COVID-19 spread in Indonesia," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 139, p. 110072, 2020. DOI: 10.1016/j.chaos.2020.110072

[8] R. Resmawan and L. Yahya, "Sensitifity Analysis of Mathematical Model of Coronavirus Disease (COVID-19) Transmission," *CAUCHY*, vol. 6, no. 2, p. 91, 2020. DOI: 10.18860/ca.v6i2.9165

[9] A. A. Gebremeskel, H. W. Berhe, and H. A. Atsbaha, "Mathematical modelling and analysis of COVID-19 epidemic and predicting its future situation in Ethiopia," *Results in Physics*, vol. 22, p. 103853, 2021. DOI: 10.1016/j.rinp.2021.103853

[10] R. Resmawan, "Model Epidemik SEIRS-SEI Penyebaran Penyakit Malaria dengan Vaksinasi dan Pengobatan," in *Prosiding Seminar Nasional Matematika IndoMS Wilayah Sulawesi*. IndoMS, 2017, pp. 128–40.

[11] J. Giesecke, *Modern Infectious Disease Epidemiology*, third edit ed. London: CRC Press, 2017. ISBN 9781315222714. DOI: 10.1201/9781315222714

[12] B. Rinaldi, "Pemodelan Matematika Penyebaran Penyakit Corona Viruses Disease 2019 (COVID-19) pada Kasus Penggunaan Masker Kesehatan," Skripsi, Universitas Jambi, 2021.

[13] M. Azizah, "Model Matematika Penyebaran Penyakit Coronavirus Disease 2019 (COVID-19) Dengan Vaksinasi, Isolasi mandiri, dan Karantina di Rumah Sakit," Ph.D. dissertation, UIN Syarif Hidayatullah, 2021.

[14] N. Chitnis, J. M. Hyman, and J. M. Cushing, "Determining Important Parameters in the Spread of Malaria Through the Sensitivity Analysis of a Mathematical Model," *Bulletin of Mathematical Biology*, vol. 70, no. 5, pp. 1272–1296, 2008. DOI: 10.1007/s11538-008-9299-0