

Bifurkasi Hopf pada model *prey-predator-super predator* dengan fungsi respon yang berbeda

Dian Savitri and Hasan S. Panigoro

To cite this article:

D. Savitri and H. S. Panigoro, "Bifurkasi Hopf pada model *prey-predator-super predator* dengan fungsi respon yang berbeda", *Jambura J. Biomath*, vol. 1, no. 2, pp. 65-70, 2020

DOI: <https://doi.org/10.34312/jjbm.v1i2.8399>

© 2020 Author(s).

Articles You may be interested in

A stage-structure Rosenzweig-MacArthur model with effect of prey refuge

L. K. Beay and M. Saija

<http://dx.doi.org/10.34312/jjbm.v1i1.6891>

Analisis kestabilan model predator-prey dengan infeksi penyakit pada prey dan pemanenan proporsional pada predator

S. Maisaroh, Resmawan, and E. Rahmi

<http://dx.doi.org/10.34312/jjbm.v1i1.5948>

Bifurkasi Hopf pada model Lotka-Volterra orde-fraksional dengan Efek Allee aditif pada predator

H. S. Panigoro and D. Savitri

<http://dx.doi.org/10.34312/jjbm.v1i1.6908>

Discrete-time prey-predator model with θ -logistic growth for prey incorporating square root functional response

P. K. Santra

<http://dx.doi.org/10.34312/jjbm.v1i2.7660>

Global stability of a fractional-order logistic growth model with infectious disease

H. S. Panigoro and E. Rahmi

<https://doi.org/10.34312/jjbm.v1i2.8135>

Bifurkasi Hopf pada model *prey-predator-super predator* dengan fungsi respon yang berbeda

Dian Savitri^{1,3,*}, Hasan Panigoro^{2,3}

¹Jurusan Matematika, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya 60292, Indonesia

²Jurusan Matematika, Universitas Negeri Gorontalo, Bone Bolango 96119, Indonesia

³Jurusan Matematika, Universitas Brawijaya, Malang 65145, Indonesia

*Penulis Korespondensi. Email: diansavitri@unesa.ac.id

Abstrak

Artikel ini membahas model satu-*prey*, satu-*predator*, dan super *predator* dengan laju pemangsaan *predator* terhadap *prey* menggunakan fungsi respon Holling tipe I dan laju pemangsaan super *predator* terhadap *predator* menggunakan fungsi respon Holling tipe II. Dari hasil analisis diperoleh satu titik kritis kepunahan semua populasi yang selalu tidak stabil dan dua titik kritis lainnya, yaitu titik kepunahan super-*predator* dan titik eksistensi semua populasi yang masing-masing stabil bersyarat. Selanjutnya diberikan simulasi numerik berupa diagram bifurkasi dan potret fase dari solusi model. Diagram bifurkasi diperoleh dengan memvariasikan parameter konversi pertumbuhan *predator* menjadi super *predator* yang menghasilkan bifurkasi maju dan Hopf. Bifurkasi maju terjadi di sekitar titik kepunahan super-*predator*, sedangkan bifurkasi Hopf terjadi di sekitar titik interior model. Berdasarkan syarat eksistensi dan simulasi numerik ditunjukkan bahwa parameter tingkat konversi pertumbuhan spesies *predator* menjadi super *predator* mengendalikan dinamika sistem dan eksistensi dari *predator*.

Kata Kunci: Bifurkasi Hopf; Bifurkasi maju; Holling tipe I dan II; Kontinuasi Numerik

Abstract

This article discusses the one-*prey*, one-*predator*, and the super *predator* model with different types of functional response. The rate of *prey* consumption by the *predator* follows Holling type I functional response and the rate of *predator* consumption by the super *predator* follows Holling type II functional response. We identify the existence and stability of critical points and obtain that the extinction of all population points is always unstable, and the other two are conditionally stable i.e., the super *predator* extinction point and the co-existence point. Furthermore, we give the numerical simulations to describe the bifurcation diagram and phase portraits of the model. The bifurcation diagram is obtained by varying the parameter of the conversion rate of *predator* biomass into a new super-*predator* which gives forward and Hopf bifurcation. The forward bifurcation occurs around the super *predator* extinction point while Hopf bifurcation occurs around the interior of the model. Based on the terms of existence and numerical simulation, we confirm that the conversion rate of *predator* biomass into a new super-*predator* controls the dynamics of the system and maintains the existence of *predator*.

Keywords: Hopf Bifurcation; Forward Bifurcation; Holling type I and II; Numerical Continuation

1. Pendahuluan

Pemodelan matematika tentang masalah ekologi berkembang pesat setelah Lotka (1925) dan Volterra (1931) mengajukan model *predator-prey* yang dikenal sebagai model Lotka-Volterra. Model ekologi klasik ini menjadi cikal bakal diajukannya model *predator-prey* lain, seperti model Rosenzweig-MacArthur [1–3] dan model Leslie-Gower [4–14] yang berfokus pada sistem dengan dua spesies, yaitu satu *prey* dan satu *predator*. Lebih lanjut, agar dapat memberikan pemahaman yang lebih baik terhadap dinamika sistem ekologi yang kompleks maka kajian tentang model tiga spesies dipandang menarik untuk dilakukan. Sarwardi dkk. [15] mengkaji model satu-*prey* dua-*predator* mengikuti model Lotka-Volterra dengan mengasumsikan spesies *prey* dimangsa kedua spesies *predator* dengan menggunakan fungsi respon Holling tipe II serta adanya kompetisi antara kedua spesies *predator*. Kajian yang serupa dilakukan oleh Savitri dkk. [16] yang membahas model satu-*prey* dua-*predator* dengan mempertimbangkan model Leslie-Gower pada pertumbuhan kedua spesies *predator*. Kedua *predator* yaitu *predator*-1 dan *predator*-2 diasumsikan tidak saling memangsa dan ada kompetisi antar kedua *predator* tersebut dalam memperebutkan mangsa dengan fungsi respon terhadap *prey* yang digunakan adalah fungsi respon Holling tipe I.

Berdasarkan model satu-*prey* dua-*predator*, dapat dikembangkan model *prey-predator-super predator* seperti yang dilakukan oleh Reddy dkk. [17] yang mengasumsikan bahwa laju pemangsaan super *predator* terhadap *predator* dan *predator* terhadap *prey* masing-masing mengikuti fungsi respon Holling tipe I. Pada model tersebut

diasumsikan terjadi kompetisi pada spesies *prey*, *predator*, dan super *predator*. Kajian yang serupa dilakukan oleh Savitri dan Abadi [18] dengan mengasumsikan bahwa laju pemangsaan *predator* pertama terhadap *prey* dan *predator* kedua terhadap *predator* pertama masing-masing mengikuti fungsi respon Holling tipe II dan kompetisi hanya terjadi pada spesies *prey*.

2. Formulasi Model

Terinspirasi dari peneliti terdahulu, maka pada artikel ini dikonstruksi model satu-*prey*, satu-*predator*, dan super *predator* dengan diasumsikan bahwa laju pertumbuhan spesies *predator* dibatasi oleh kepadatan populasi *prey* $x(t)$. Laju pemangsaan *predator* untuk *prey* menggunakan fungsi respon Holling tipe I dan laju pemangsaan super *predator* untuk *predator* menggunakan fungsi respon Holling tipe II. Asumsi tersebut disesuaikan dengan fenomena nyata dan karakteristik masing-masing spesies, untuk super *predator* membutuhkan waktu dalam menangani mangsa, meliputi: mencari, mencerna dan menghabiskan mangsa. Misalnya ikan-ikan kecil yang memakan krill dan udang yang bersesuaian dengan fungsi respon Holling tipe-I, dan ikan-ikan besar yang memangkan ikan-ikan kecil mengikuti Holling tipe-II. Model satu-*prey*, satu-*predator*, dan super *predator*, dengan kepadatan spesies *prey* yaitu $x(t)$, kepadatan spesies *predator* dinyatakan $y(t)$, dan kepadatan spesies super *predator* yaitu $z(t)$, sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha xy, \\ \frac{dy}{dt} &= sy \left(1 - \frac{y}{x}\right) - \frac{\beta yz}{1 + my}, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\rho yz}{1 + my} - \mu z.\end{aligned}\tag{1}$$

Parameter pada model (1), yaitu $r, s, K, \alpha, \beta, m, \rho$, dan μ masing-masing merepresentasikan laju pertumbuhan *prey*, laju pertumbuhan *predator*, kapasitas daya tampung spesies *prey*, laju pemangsaan *predator* terhadap *prey*, laju pemangsaan super *predator* terhadap *predator*, waktu yang dibutuhkan super *predator* untuk menangani *predator*, tingkat konversi pertumbuhan *predator* menjadi super *predator*, dan laju kematian alami spesies super *predator*. Model (1) diberikan syarat kondisi awal $x(0) > 0$, $y(0) > 0$, dan $z(0) > 0$, dimana semua parameter bernilai positif.

3. Titik Kritis dan Kestabilannya

Titik kritis model (1) diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan berikut.

$$\begin{aligned}\left[r \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha y\right] x &= 0, \\ \left[s \left(1 - \frac{y}{x}\right) - \frac{\beta z}{1 + my}\right] y &= 0, \\ \left[\frac{\rho y}{1 + my} - \mu\right] z &= 0,\end{aligned}$$

sehingga memberikan

1. Titik $E_1 = (K, 0, 0)$ yang menyatakan kepunahan *predator* dan super *predator*.
2. Titik $E_2 = \left(\frac{rK}{K\alpha + r}, \frac{rK}{K\alpha + r}, 0\right)$ yang menyatakan kepunahan super *predator*.
3. Titik eksistensi dari semua populasi $E_3 = (x^*, y^*, z^*)$ dengan

$$\begin{aligned}x^* &= \frac{(r - \alpha y^*)K}{r}, \\ y^* &= \frac{\mu}{\rho - \mu m}, \\ z^* &= \left(1 - \frac{ry^*}{(r - \alpha y^*)K}\right) \frac{(1 + my^*)s}{\beta}.\end{aligned}$$

Titik kritis E_1 dan E_2 merupakan titik titik yang selalu terdefinisi secara biologis ($E_{1,2} \in \mathbb{R}_+^2$), sedangkan titik kritis $E_3 \in \mathbb{R}_+^2$ jika $\rho > \mu m + \frac{(K\alpha + r)\mu}{rK}$. Selanjutnya, perilaku solusi disekitar titik-titik kritis tersebut diberikan oleh beberapa teorema berikut.

Teorema 1. Titik kritis kepunahan populasi kedua predator $E_1 = (1, 0, 0)$ adalah titik pelana.

bukti. Matriks Jacobi dari titik kritis E_1 adalah

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -r & -K\alpha & -0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -r < 0$, $\lambda_2 = s > 0$ dan $\lambda_3 = -\mu < 0$. Dengan demikian $E_1 = (K, 0, 0)$ adalah titik pelana. ■

Teorema 2. Titik kepunahan populasi super predator $E_2 = \left(\frac{rK}{K\alpha + r}, \frac{rK}{K\alpha + r}, 0 \right)$ stabil asimtotik lokal jika $\rho < \mu m + \frac{(K\alpha + r)\mu}{rK}$.

bukti. Matriks Jacobi dari titik kritis E_2 adalah

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} -\frac{r^2}{K\alpha + r} & -\frac{\alpha r K}{K\alpha + r} & 0 \\ s & -s & -\frac{\beta r K}{mrK + K\alpha + r} \\ 0 & 0 & \frac{\rho r K}{mrK + K\alpha + r} - \mu \end{bmatrix}.$$

sehingga diperoleh persamaan karakteristik

$$\left(\frac{\rho r K}{mrK + K\alpha + r} - \mu - \lambda \right) \left(\lambda^2 + \left(\frac{r^2}{K\alpha + r} + s \right) \lambda + rs \right) = 0.$$

Dengan demikian diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = \frac{\rho r K}{mrK + K\alpha + r} - \mu,$$

$$\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{K\alpha + r} + s \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{r^2}{K\alpha + r} + s \right)^2 - 4rs}.$$

Jelas bahwa $\lambda_1 < 0$ jika $\rho < \mu m + \frac{(K\alpha + r)\mu}{rK}$. Selanjutnya karena $\frac{r^2}{K\alpha + r} + s > 0$, $rs > 0$, dan $\left(\frac{r^2}{K\alpha + r} + s \right) rs > 0$, maka $Re(\lambda_{2,3}) < 0$ baik untuk $\left(\frac{r^2}{K\alpha + r} + s \right)^2 < 4rs$ ataupun $\left(\frac{r^2}{K\alpha + r} + s \right)^2 \geq 4rs$. Dengan demikian, E_2 stabil asimtotik lokal. ■

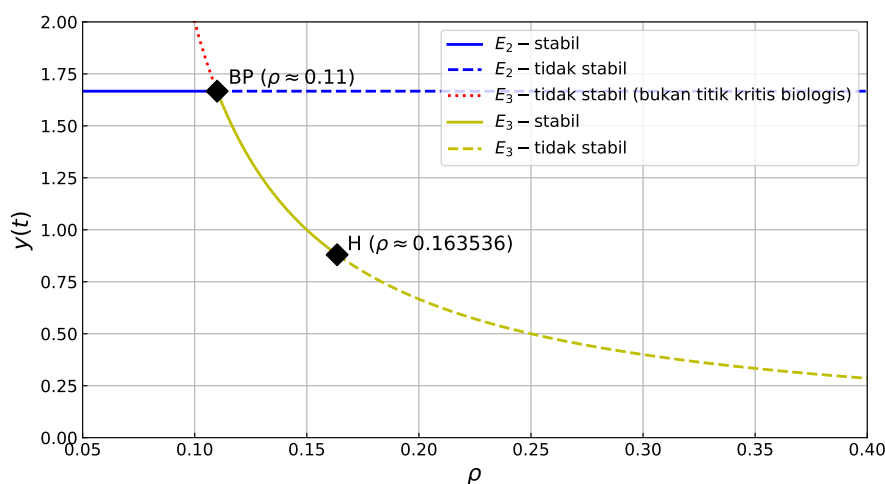
Teorema 3. Titik kritis interior ketiga populasi tumbuh bersama yaitu $E_3 = (x^*, y^*, z^*)$ stabil asimtotik lokal jika $\rho > \frac{\mu}{y^*} \sqrt{\frac{\beta m x^* z^*}{r}}$.

bukti. Matriks Jacobi hasil linearisasi di sekitar titik kritis $E_3 = (x^*, y^*, z^*)$ adalah

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} -\frac{rx^*}{K} & -\alpha x^* & 0 \\ s \left(\frac{y^*}{x^*} \right)^2 & \frac{\beta \mu^2 m z^*}{\rho^2 y^*} - \frac{ry^*}{x^*} & -\frac{\beta \mu z^*}{\rho} \\ 0 & \frac{(\rho - \mu m) \mu z^*}{\rho y^*} & 0 \end{bmatrix},$$

yang memberikan persamaan karakteristik

$$\left(\frac{rx^*}{K} + \lambda \right) \left[\lambda^2 + \left(\frac{ry^*}{x^*} - \frac{\beta \mu^2 m z^*}{\rho^2 y^*} \right) \lambda + \frac{(\rho - \mu m) \beta \mu^2 (z^*)^2}{\rho^2 y^*} \right] = 0.$$



Gambar 1. Diagram Bifurkasi model (1). Terjadi bifurkasi maju dengan titik bifurkasi $\rho \approx 0.11$ dan bifurkasi Hopf dengan titik bifurkasi $\rho = 0.163536$.

Dengan demikian, diperoleh nilai eigen:

$$\lambda_1 = -\frac{rx^*}{K}$$

$$\lambda_{2,3} = \left(\frac{\beta\mu^2 mz^*}{2\rho^2 y^*} - \frac{ry^*}{2x^*} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\beta\mu^2 mz^*}{2\rho^2 y^*} - \frac{ry^*}{2x^*} \right)^2 - \frac{(\rho - \mu m)\beta\mu^2 (z^*)^2}{\rho^2 y^*}}$$

Jelas bahwa $\lambda_1 < 0$. Perhatikan pula bahwa dari syarat eksistensi E_3 diperoleh $\rho > \mu m$ sehingga $\frac{(\rho - \mu m)\beta\mu^2 (z^*)^2}{\rho^2 y^*} > 0$. Karena $\rho > \frac{\mu}{y^*} \sqrt{\frac{\beta mx^* z^*}{r}}$ maka $\frac{ry^*}{x^*} - \frac{\beta\mu^2 mz^*}{\rho^2 y^*} > 0$, sehingga $Re(\lambda_{2,3}) < 0$. Dengan demikian $Re(\lambda_{1,2,3}) < 0$ sehingga E_3 stabil asimtotik lokal. ■

Tabel 1. Syarat eksistensi dan kestabilan lokal titik kritis model (1)

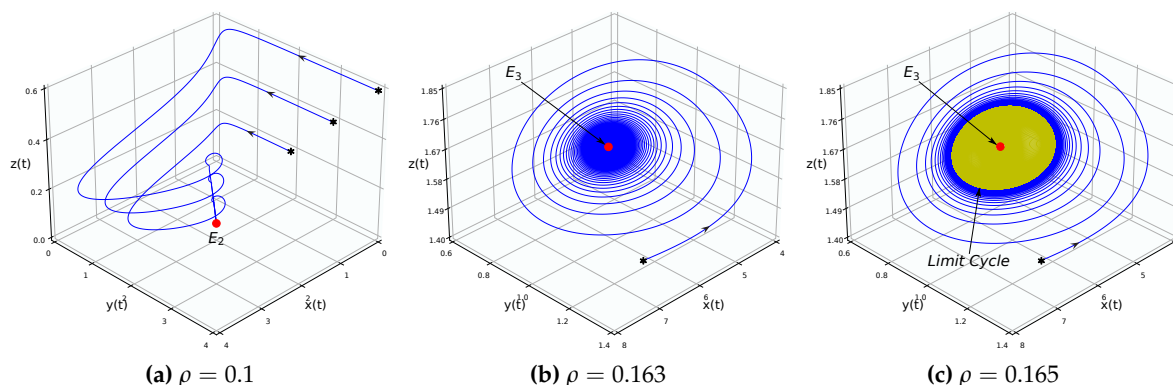
Titik kritis	Syarat eksistensi	Syarat kestabilan lokal
$E_1 = (K, 0, 0)$	-	titik pelana
$E_2 = \left(\frac{rK}{K\alpha + r}, \frac{rK}{K\alpha + r}, 0 \right)$	-	$\rho < \mu m + \frac{(K\alpha + r)\mu}{rK}$
$E_3 = (x^*, y^*, z^*)$	$\rho > \mu m + \frac{(K\alpha + r)\mu}{rK}$	$\rho > \frac{\mu}{y^*} \sqrt{\frac{\beta mx^* z^*}{r}}$

Keseluruhan analisis eksistensi dan kestabilan titik kritis diberikan pada Tabel 1. Berdasarkan hasil analisis yang diperoleh, eksistensi dan kestabilan titik kritis sangat dipengaruhi oleh tingkat konversi pertumbuhan predator menjadi super predator (ρ). Dengan mengubah nilai ρ , maka akan terjadi perubahan eksistensi dan kestabilan dari E_2 dan E_3 . Lebih khusus lagi, perubahan nilai ρ dapat mengakibatkan perubahan kestabilan dari E_2 disertai munculnya titik kritis E_3 yang disebut dengan bifurkasi maju. Selain itu, dengan mengubah ρ , E_3 kehilangan kestabilannya dengan kondisi matriks Jacobi dititik tersebut bernilai kompleks, lihat bukti dari Teorema 3. Kondisi ini juga mengindikasikan terjadinya bifurkasi yang disebut dengan bifurkasi Hopf. Pada artikel ini, kedua bifurkasi tidak ditunjukkan secara analitik, namun akan diperlihatkan secara numerik pada pokok bahasan selanjutnya.

4. Simulasi Numerik

Simulasi numerik ini bertujuan untuk menggambarkan perilaku solusi model (1) disekitar titik-titik kritis berdasarkan nilai-nilai parameter yang disesuaikan dengan hasil teoritis yang diberikan pada Tabel 1. Keseluruhan simulasi menggunakan nilai-nilai parameter sebagai berikut.

$$r = 0.6, s = 0.4, K = 10, \alpha = 0.3, \beta = 0.3, m = 0.5 \text{ dan } \mu = 0.1.$$



Gambar 2. Potret Fase solusi model (1) disekitar titik kritis E_2 dan E_3

Simulasi numerik dilakukan menggunakan integral Runge-kutta orde-4 yang ditampilkan melalui potret fase dengan *software* Python 3.8.

Untuk melihat perilaku solusi secara menyeluruh, diidentifikasi kestabilan lokal dari titik kritis E_2 dan E_3 dengan menggerakkan nilai parameter ρ pada interval $0.05 \leq \rho \leq 0.4$. Diperoleh diagram bifurkasi seperti pada gambar Gambar 1. Titik kritis E_2 stabil asimtotik lokal pada saat $\rho \lesssim 0.11$ dan kehilangan kestabilannya ketika $\rho \gtrsim 0.11$. Kondisi ini juga disertai perubahan kestabilan E_3 ketika ρ melewati 0.11. Secara numerik, kondisi ini merupakan indikasi terjadinya bifurkasi Transkritikal yang disimbolkan (BP) pada Gambar 1. Meski demikian, titik setimbangan E_3 sebelum $\rho \approx 0.11$ tidak terdefinisi secara biologis karena bernilai negatif. Oleh karena itu, secara biologis yang terjadi adalah fenomena bifurkasi maju dimana salah satu titik kritis di axial yang stabil berubah menjadi tidak stabil disertai dengan munculnya titik kritis stabil di interior dari model. Kestabilan dari E_2 diperlihatkan oleh potret fase pada Gambar 2(a) yaitu pada saat $\rho = 0.1$. Solusi disekitar E_2 akan konvergen ke E_2 yang berarti bahwa terjadi kepunahan super predator.

Hal yang menarik lainnya terjadi disekitar titik interior dari model (1). Pada saat ρ melewati 0.163536, titik kritis E_3 kehilangan kestabilannya via bifurkasi Hopf. Untuk menggambarkan dinamika E_3 sebelum melewati titik bifurkasi Hopf $\rho \approx 0.163536$, dipilih $\rho = 0.163$ sehingga diperoleh Gambar 2(b). Titik kritis E_3 stabil asimtotik lokal tipe spiral yang menyatakan semua solusi konvergen ke titik titik interior sehingga seluruh populasi akan terjaga eksistensinya. Pada saat $\rho \gtrsim 0.163536$, titik kesetimbangan E_3 kehilangan kestabilan via bifurkasi Hopf. Dengan menetapkan $\rho = 0.165$, diberikan potret fase pada Gambar 2(c). Seluruh solusi akan konvergen ke suatu *limit-cycle*. Secara biologis, meskipun E_3 tidak stabil, eksistensi dari ketiga populasi akan tetap terjaga dengan kepadatan populasi ketiganya berubah secara periodik untuk $t \rightarrow \infty$.

5. Kesimpulan

Berdasarkan syarat eksistensi dan simulasi numerik menunjukkan bahwa parameter tingkat konversi pertumbuhan spesies predator menjadi super predator mengendalikan dinamika solusi model dan menjaga spesies predator tidak punah. Titik kritis E_2 dan E_3 stabil asimtotik dengan syarat. Hasil kontinuitas numerik pada model prey-predator-super predator diperoleh pengaruh adanya tingkat konversi pertumbuhan spesies predator menjadi tingkat pertumbuhan super predator mendorong munculnya perubahan kestabilan yang mengindikasikan fenomena terjadinya bifurkasi Hopf dan bifurkasi maju.

Referensi

- [1] M. L. Rosenzweig dan R. H. MacArthur, "Graphical representation and stability conditions of predator-prey interactions," *The American Naturalist*, vol. 97, no. 895, hal. 209–223, 1963.
- [2] M. Moustafa, M. H. Mohd, A. I. Ismail, dan F. A. Abdullah, "Stage structure and refuge effects in the dynamical analysis of a fractional order Rosenzweig-MacArthur prey-predator model," *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, vol. 5, no. 1, hal. 49–64, 2019.
- [3] L. K. Beay dan M. Saija, "A stage-structure Rosenzweig-MacArthur model with effect of prey refuge," *Jambura Journal of Biomathematics (JJBM)*, vol. 1, no. 1, hal. 1–7, 2020.
- [4] R. Mokodompit, N. Nurwan, dan E. Rahmi, "Bifurkasi periode ganda dan Neimark-Sacker pada model diskret Leslie-Gower dengan fungsi respon ratio-dependent," *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, vol. 17, no. 1, hal. 19, 2020.

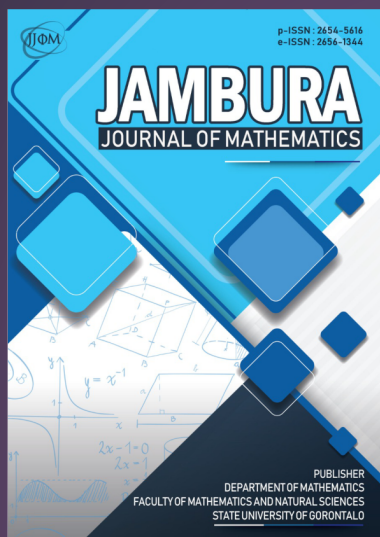
- [5] Y. Lin, X. Xie, F. Chen, dan T. Li, "Convergences of a stage-structured predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes," *Advances in Difference Equations*, vol. 2016, no. 1, 2016.
- [6] Y. Cai, C. Zhao, W. Wang, dan J. Wang, "Dynamics of a Leslie-Gower predator-prey model with additive Allee effect," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 39, no. 7, hal. 2092–2106, 2015.
- [7] H. Ulfa, A. Suryanto, dan I. Darti, "Dynamics of Leslie-Gower predator-prey model with additional food for predators," *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 115, no. 2, hal. 751–765, 2017.
- [8] H. S. Panigoro dan E. Rahmi, "Modifikasi sistem predator-prey: dinamika model Leslie-Gower dengan daya dukung yang tumbuh logistik," *SEMIRATA MIPAnet*, hal. 94–103, 2017.
- [9] A. Suryanto dan I. Darti, "Dynamics of Leslie-Gower pest-predator model with disease in pest including pest-harvesting and optimal implementation of pesticide," *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 2019, article id 5079171, hal. 1–9, 2019.
- [10] U. Salamah, A. Suryanto, dan W. M. Kusumawinahyu, "Leslie-Gower predator-prey model with stage-structure, Beddington-DeAngelis functional response, and anti-predator behavior," *AIP Conference Proceedings*, vol. 2084, no. 1, hal. 20001, 2019.
- [11] H. S. Panigoro, E. Rahmi, N. Achmad, dan S. L. Mahmud, "The Influence of additive Allee effect and periodic harvesting to the dynamics of Leslie-Gower predator-prey model," *Jambura Journal of Mathematics*, vol. 2, no. 2, hal. 87–96, 2020.
- [12] H. S. Panigoro, "Analisis dinamik sistem predator-prey model Leslie-Gower dengan pemanenan secara konstan terhadap predator," *Euler*, vol. 2, no. 1, hal. 1–12, 2014.
- [13] S. Mondal, N. Bairagi, dan G. M. 'Guerekata, "Global stability of a Leslie-Gower-type fractional order tritrophic food chain model," *Fractional Differential Calculus*, vol. 9, no. 1, hal. 149–161, 2019.
- [14] S. Pal, N. Pal, S. Samanta, dan J. Chattopadhyay, "Fear effect in prey and hunting cooperation among predators in a Leslie-Gower model," *Mathematical Biosciences and Engineering*, vol. 16, no. 5, hal. 5146–5179, 2019.
- [15] S. Sarwardi, P. K. Mandal, dan S. Ray, "Dynamical behaviour of a two-predator model with prey refuge," *Journal of Biological Physics*, vol. 39, no. 4, hal. 701–722, 2013.
- [16] D. Savitri, A. Suryanto, W. M. Kusumawinahyu, dan Abadi, "A dynamics behaviour of two Predators and one prey interaction with competition between predators," *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, vol. 546, no. 5, hal. 052069, 2019.
- [17] K. Shiva Reddy, K. Lakshmi Narayan, dan N. Pattabhi Ramacharyulu, "A three species ecosystem consisting of a prey, predator and super predator," *Mathematics Applied in Science and Technology*, vol. 2, no. 1, hal. 95–107, 2010.
- [18] D. Savitri dan Abadi, "Stability analysis and numerical simulation of 1 prey – 2 predator system," *AIP Conference Proceedings*, vol. 1651, no. 1, hal. 114–117, 2015.



© 2020 by the Authors. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License. **Editorial of JJBM:** Department of Mathematics, State University of Gorontalo, Jln. Prof. Dr. Ing. B. J. Habibie, Bone Bolango 96119, Indonesia.



Submit your manuscript at
<http://ejournal.ung.ac.id/>



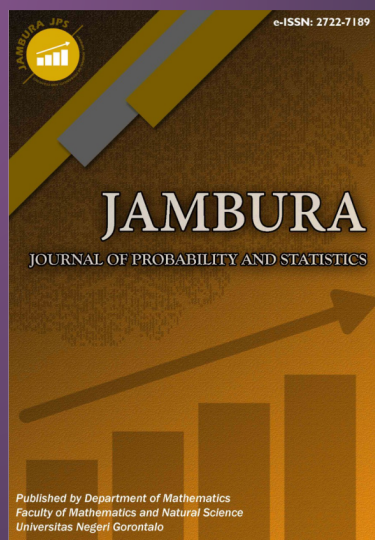
Jambura Journal of
Mathematics



Jambura Journal of
Biomathematics



Jambura Journal of
Mathematics Education



Jambura Journal of
Probability and Statistics

Published by
Department of Mathematics
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
State University of Gorontalo