JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS
Jambura J. Math. Vol. 3, No. 2, pp. 155-166, July 2021
Journal Homepage: http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom
DOI: https://doi.org/10.34312/jjom.v3i2.10379

f_q-Derivasi di *BM*-aljabar

Egytia Yattaqi[1], Sri Gemawati[2*], Ihda Hasbiyati[3]

[1,2,3] Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Riau,
Jl. HR Soebrantas Km 12,5 Kel. Simpang Baru Kec. Tampan, Pekanbaru 28293, Indonesia

*Penulis Korespondensi. Email: gemawati.sri@gmail.com

ABSTRAK

B-aljabar adalah suatu himpunan tak kosong X dengan operasi biner " $*$ " dan konstanta 0 yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Suatu bentuk khusus dari B-aljabar adalah BM-aljabar. Adapun hubungan kedua aljabar tersebut, setiap BM-aljabar adalah B-aljabar dan setiap B-aljabar 0-komutatif adalah BM-aljabar. Konsep f_q-derivasi telah dibahas di B-aljabar. Pada artikel ini, dibahas konsep f_q-derivasi di BM-aljabar. Hasil penelitian yang diperoleh adalah mendefinisikan *inside* dan *outside* f_q-derivasi di BM-aljabar dan menentukan sifat-sifatnya. Adapun definisi f_q-derivasi di BM-aljabar ekuivalen dengan f_q-derivasi di B-aljabar, namun pada sifat-sifatnya terdapat perbedaan, yaitu terdapat sifat f_q-derivasi yang berlaku di BM-aljabar tetapi secara umum tidak berlaku di B-aljabar.

Kata Kunci:
BM-aljabar; *Inside* f_q-derivasi; *Outside* f_q-derivasi; f_q-derivasi

ABSTRACT

B-algebra is a non-empty set X with a constant 0 and binary operation " $*$ " satisfying certain axioms. A special form of B-algebra is a BM-algebra. Their relationship are every BM-algebra is a B-algebra and every 0-commutative B-algebra is a BM-algebra. The concept of f_q-derivation in B-algebra is discussed. The results define an inside and an outside f_q-derivations in BM-algebra and obtain related properties. Moreover, the definition of f_q-derivation in BM-algebra is equivalent to f_q-derivation in B-algebra, but there are differences in their properties, which is there are some properties of f_q-derivation in BM-algebra, but generally don't hold in B-algebra.

Keywords:
BM-algebra; Inside f_q-derivation; Outside f_q-derivation; f_q-derivation

Format Sitasi:

E. Yattaqi, S. Gemawati, and I. Hasbiyati, "f_q-Derivasi di BM-aljabar," *Jambura J. Math.*, vol. 3, no. 2, pp.155-166, 2021

1. Pendahuluan

Neggers dan Kim [1] memperkenalkan struktur aljabar baru yang dinamakan B-aljabar. Suatu B-aljabar adalah himpunan tak kosong X dengan operasi biner $*$ dan konstanta 0 yang dinotasikan dengan $(X; *, 0)$, serta memenuhi aksioma $(B1)$ $x * x = 0$, $(B2)$ $x * 0 = x$, dan $(B3)$ $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$ untuk setiap $x, y, z \in X$. Kemudian, Kim dan Park [2] memperkenalkan bentuk khusus dari B-aljabar, yaitu B-aljabar 0-komutatif $(X; *, 0)$ yang merupakan suatu B-aljabar yang memenuhi sifat $x * (0 * y) = y * (0 * x)$ untuk setiap $x, y \in X$. Beberapa aljabar lainnya ada yang berkaitan dengan

Received: 16 April 2021 | Accepted: 31 May 2021 | Online: 2 June 2021

B-aljabar 0-komutatif, diantaranya adalah BM-aljabar. Kim dan Kim [3] membahas tentang BM-aljabar, yaitu suatu himpunan tak kosong X dengan operasi biner $*$ dan konstanta 0 yang memenuhi aksioma ($B2$) dan ($A2$) $(z * x) * (z * y) = y * x$ untuk setiap $x, y, z \in X$. Adapun hubungan antara BM-aljabar dengan B-aljabar telah dibahas dalam [3], yaitu setiap BM-aljabar adalah B-aljabar, tetapi tidak berlaku sebaliknya, karena ada B-aljabar yang bukan merupakan BM-aljabar. Namun, setiap B-aljabar 0-komutatif adalah BM-aljabar.

Berbagai konsep penting dalam aljabar abstrak telah dibahas, diantaranya konsep derivasi yang pertama kali diperkenalkan dalam kajian ring [4]. Suatu pemetaan d dari ring $(R;\, +,\, \cdot)$ ke dirinya sendiri dikatakan derivasi di R jika memenuhi $d(a \cdot b) = d(a) \cdot b + a \cdot d(b)$ untuk setiap $a, b \in R$. Kemudian, Al-Shehrie [5] memperumum konsep derivasi di ring untuk mendefinisikan konsep derivasi di B-aljabar. Suatu pemetaan d dari B-aljabar $(X; *, 0)$ ke dirinya sendiri dikatakan *left-right* derivasi ((*l, r*)-derivasi) di X jika untuk setiap $x, y \in X$ memenuhi $d(x * y) = (d(x) * y) \wedge (x * d(y))$ dan d dikatakan *right-left* derivasi ((*r, l*)-derivasi) di X jika memenuhi $d(x * y) = (x * d(y)) \wedge (d(x) * y)$. Jika d merupakan (*l, r*)-derivasi sekaligus (*r, l*)-derivasi maka d dikatakan derivasi di X.

Konsep derivasi juga dibahas di struktur aljabar lainnya, seperti generalisasi derivasi di BM-aljabar yang dibahas oleh Sugianti dan Gemawati [6]. Pada pembahasan tersebut diberikan sifat-sifat derivasi di BM-aljabar yang memiliki perbedaan dengan sifat-sifat derivasi di B-aljabar. Kemudian, pendefinisian konsep generalisasi derivasi di BM-aljabar menghasilkan jenis derivasi baru yang berbeda dengan konsep derivasi biasa. Adapun konsep f_q-derivasi juga merupakan jenis lain dari suatu derivasi, seperti yang dibahas oleh Al-Kadi [7] tentang f_q-derivasi di G-aljabar. Selanjutnya, Muangkarn et al. [8] membahas konsep f_q-derivasi di B-aljabar dengan mendefinisikan suatu pemetaan yang melibatkan endomorfisma. Namun, pada artikel tersebut belum dibahas tentang sifat-sifat f_q-derivasi di B-aljabar khusus, seperti di BM-aljabar. Padahal konsep f_q-derivasi di BM-aljabar sangat urgen untuk menemukan sifat-sifat khusus dari suatu f_q-derivasi yang secara umum tidak berlaku di B-aljabar, namun berlaku di BM-aljabar. Adapun jenis derivasi lainnya juga telah banyak dibahas oleh peneliti lain seperti yang dapat ditemukan pada [9]-[14].

Berdasarkan uraian di atas, pada artikel ini didefinisikan *inside* f_q-derivasi di BM-aljabar beserta sifat-sifatnya dan *outside* f_q-derivasi di BM-aljabar beserta sifat-sifat yang dimilikinya. Kemudian, juga dibahas sifat-sifat f_q-derivasi dan f_q-derivasi yang *regular* di BM-aljabar.

2. Teori Dasar

Pada bagian ini, diberikan beberapa definisi yang diperlukan untuk mengkonstruksi hasil utama dari penelitian. Dimulai dengan beberapa definisi dan teori tentang B-aljabar dan BM-aljabar, kemudian, juga diberikan konsep f_q-derivasi di B-aljabar. Konsep-konsep yang diberikan tersebut telah dibahas dalam [1], [2], [3], [5], [6] dan [8].

Berikut ini diberikan konsep B-aljabar dan sifat-sifatnya yang diperkenalkan oleh Neggers dan Kim [1] dan konsep B-aljabar 0-komutatif beserta sifat-sifatnya.

Definisi 2.1. [1] B-aljabar adalah suatu himpunan tak kosong X dengan konstanta 0 dan operasi biner $*$ yang memenuhi aksioma berikut:

$(B1)$ $x * x = 0$,

$(B2)$ $x * 0 = x$,

$(B3)$ $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$,

untuk setiap $x, y, z \in X$.

Contoh 2.1. Misalkan $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ suatu himpunan yang didefinisikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Tabel Cayley untuk $(X; *, 0)$

$*$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	2	1	3	4	5
1	1	0	2	4	5	3
2	2	1	0	5	3	4
3	3	4	5	0	2	1
4	4	5	3	1	0	2
5	5	3	4	2	1	0

Dapat dilihat pada Tabel 1 bahwa diagonal utamanya bernilai 0, sehingga untuk setiap $x \in X$ berlaku $x * x = 0$ (aksioma $B1$ terpenuhi) dan nilai pada kolom kedua menyatakan bahwa hasil operasi suatu elemen dengan 0 adalah elemen itu sendiri, sehingga berlaku $x * 0 = x$ (aksioma $B2$ terpenuhi). Kemudian, misalkan $x, y, z \in X$, dari Tabel 1 dapat dibuktikan bahwa $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$ sehingga aksioma $B3$ terpenuhi. Oleh karena itu, terbukti bahwa $(X; *, 0)$ adalah B-aljabar.

Lema 2.2. [1] Jika $(X; *, 0)$ suatu B-aljabar, maka

(i) $0 * (0 * x) = x$,
(ii) $(x * y) * (0 * y) = x$,
(iii) $y * z = y * \big(0 * (0 * z)\big)$,
(iv) $x * (y * z) = (x * (0 * z)) * y$,
(v) Jika $x * z = y * z$, maka $x = y$,
(vi) Jika $x * y = 0$, maka $x = y$,
untuk setiap $x, y, z \in X$.

Bukti. Pembuktian Lema 2.2 telah diberikan pada [1]. ■

Definisi 2.3. [3] BM-aljabar adalah suatu himpunan tak kosong X dengan konstanta 0 dan operasi biner $*$ yang memenuhi aksioma berikut:

$(A1)$ $x * 0 = x$,

$(A2)$ $(z * x) * (z * y) = y * x$,

untuk setiap $x, y, z \in X$.

Contoh 2.2. Misalkan $X = \{0, 1, 2\}$ suatu himpunan yang didefinisikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Tabel Cayley untuk $(X; *, 0)$

*	**0**	**1**	**2**
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

Berdasarkan Tabel 2 diketahui bahwa nilai pada kolom kedua menyatakan hasil operasi suatu elemen dengan 0 adalah elemen itu sendiri, sehingga untuk setiap $x \in X$ berlaku $x * 0 = x$ (aksioma *A1* terpenuhi). Kemudian, misalkan $x, y, z \in X$, dari Tabel 2 juga dapat dibuktikan bahwa $(z * x) * (z * y) = y * x$ sehingga aksioma $A2$ terpenuhi. Oleh karena itu, terbukti bahwa $(X; *, 0)$ adalah BM- aljabar.

Lema 2.4. [3] Misalkan $(X; *, 0)$ adalah BM-aljabar, maka

(i) $x * x = 0$,
(ii) $0 * (0 * x) = x$,
(iii) $0 * (x * y) = y * x$,
(iv) $(x * z) * (y * z) = x * y$,
(v) $x * y = 0$ jika dan hanya jika $y * x = 0$,

untuk setiap $x, y, z \in X$.

Bukti. Pembuktian Lema 2.4 telah diberikan pada [3]. ■

Teorema 2.5. [3] Setiap BM-aljabar adalah B-aljabar.

Bukti. Pembuktian Teorema 2.5 telah diberikan pada [3]. ■

Kebalikan dari Teorema 2.5 tidak berlaku, karena ada B-aljabar yang bukan BM-aljabar. Seperti pada Contoh 2.1, $(X; *, 0)$ adalah B-aljabar tetapi bukan BM-aljabar, karena $(5 * 1) * (5 * 4) = 4 \neq 5 = 4 * 1$.

Teorema 2.6. [3] Misalkan $(X; *, 0)$ adalah BM-aljabar, maka $(x * y) * z = (x * z) * y$ untuk setiap $x, y \in X$.

Bukti. Pembuktian Teorema 2.6 telah diberikan pada [3]. ■

Definisi 2.7. [15] *Coxeter* aljabar adalah suatu himpunan tak kosong X dengan konstanta 0 dan operasi biner $*$ yang memenuhi aksioma berikut:

($C1$) $x * x = 0$,

($C2$) $x * 0 = x$,

($C3$) $(x * y) * z = x * (y * z)$,

untuk setiap $x, y, z \in X$.

Teorema 2.8. [3] Jika $(X; *, 0)$ adalah BM-aljabar dengan $0*x = x$ untuk setiap $x \in X$, maka $(X; *, 0)$ adalah *Coxeter* aljabar.

Bukti. Pembuktian Teorema 2.8 telah diberikan pada [3]. ■

Akibat 2.9. [3] $(X; *, 0)$ adalah *Coxeter* aljabar jika dan hanya jika $(X; *, 0)$ adalah BM-aljabar dengan $0 * x = x$ untuk setiap $x \in X$.

Bukti. Pembuktian Akibat 2.9 telah diberikan pada [3]. ■

Dari Akibat 2.9 dapat disimpulkan bahwa *coxeter* aljabar ekuivalen dengan BM-aljabar X dengan $0 * x = x$ untuk setiap $x \in X$.

Konsep derivasi di B-aljabar telah dibahas dalam [5]. Misalkan $(X; *, 0)$ suatu B-aljabar, maka didefinisikan $x \wedge y = y * (y * x)$ untuk setiap $x, y \in X$.

Definisi 2.10. [5] Misalkan $(X; *, 0)$ adalah B-aljabar. Suatu pemetaan d dari X ke dirinya sendiri disebut $(l,)$-derivasi di X jika memenuhi $d(x * y) = (d(x) * y) \wedge (x * d(y))$ untuk setiap $x, y \in X$ dan disebut (r, l)-derivasi di X jika memenuhi $d(x * y) = (x * d(y)) \wedge (d(x) * y)$. Pemetaan d disebut derivasi di X jika d merupakan (l, r)-derivasi sekaligus (r, l)-derivasi di X.

Definisi 2.11. [5] Misalkan $(X; *, 0)$ suatu B-aljabar. Pemetaan dari X ke dirinya sendiri dikatakan *regular* jika memenuhi $d(0) = 0$.

Misalkan f adalah suatu pemetaan dari B-aljabar $(X; *, 0)$ ke dirinya sendiri. f adalah endomorfisma dari X jika memenuhi $f(x * y) = f(x) * f(y)$ untuk setiap $x, y \in X$. Kemudian, didefinisikan suatu pemetaan d_q^f dari X ke dirinya sendiri dengan $d_q^f(x) = f(x) * q$ untuk setiap $x, q \in X$.

Definisi 2.12. [8] Misalkan $(X; *, 0)$ adalah B-aljabar dan f adalah endomorfisma dari X. Suatu pemetaan d_q^f dari X ke dirinya sendiri dikatakan *inside* f_q-derivasi di X jika memenuhi $d_q^f(x * y) = d_q^f(x) * f(y)$ untuk setiap $x, y \in X$ dan dikatakan *outside* f_q-derivasi di X jika memenuhi $d_q^f(x * y) = f(x) * d_q^f(y)$. Pemetaan d_q^f disebut f_q-derivasi di X jika d_q^f merupakan *inside* sekaligus *outside* f_q-derivasi di X.

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini diberikan hasil utama penelitian, yaitu mendefinisikan *inside* f_q-derivasi dan *outside* f_q-derivasi di BM-aljabar dengan menggunakan cara yang sama pada pendefinisian *inside* f_q-derivasi dan *outside* f_q-derivasi di B-aljabar oleh Muangkarn et al. [15]. Kemudian, juga diberikan sifat-sifat *inside* f_q-derivasi dan *outside* f_q-derivasi di BM-aljabar.

Misalkan $(X; *, 0)$ adalah BM-aljabar dan f adalah suatu pemetaan dari X ke dirinya sendiri. f adalah endomorfisma dari X jika memenuhi $f(x * y) = f(x) * f(y)$ untuk setiap $x, y \in X$. Kemudian, didefinisikan suatu pemetaan d_q^f dari X ke dirinya sendiri dengan $d_q^f(x) = f(x) * q$ untuk setiap $x, q \in X$.

Definisi 3.1. Misalkan $(X; *, 0)$ adalah BM-aljabar dan f adalah endomorfisma dari X. Suatu pemetaan d_q^f dari X ke dirinya sendiri dikatakan *inside* f_q-derivasi di X jika memenuhi $d_q^f(x * y) = d_q^f(x) * f(y)$ untuk setiap $x, y \in X$ dan dikatakan *outside* f_q-derivasi di X jika memenuhi $d_q^f(x * y) = f(x) * d_q^f(y)$. Pemetaan d_q^f disebut f_q-derivasi di X jika d_q^f merupakan *inside* sekaligus *outside* f_q-derivasi di X.

Contoh 3.1. Diketahui $(\mathbb{Z}; -, 0)$ adalah BM-aljabar. Didefinisikan pemetaan f dan d_q^f dari $\mathbb{Z}$ ke dirinya sendiri dengan $f(x) = x$ dan $d_q^f(x) = f(x) - q$ untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$. Dengan mudah dapat dibuktikan bahwa f adalah suatu endomorfisma dari $\mathbb{Z}$. Akan diperiksa apakah d_q^f merupakan *inside* f_q-derivasi di $\mathbb{Z}$. Untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ diperoleh $d_q^f(x - y) = f(x - y) - q = x - y - q$ dan $d_q^f(x) - f(y) = f(x) - q - y = x - y - q$ sehingga memenuhi $d_q^f(x - y) = d_q^f(x) - f(y)$. Jadi, terbukti bahwa d_q^f merupakan *inside* f_q-derivasi di $\mathbb{Z}$. Selanjutnya, diperiksa apakah d_q^f merupakan *outside* f_q-derivasi di $\mathbb{Z}$. Untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ diperoleh $f(x) - d_q^f(y) = x - (f(y) - q) = x - y + q \neq d_q^f(x - y)$ sehingga d_q^f bukan merupakan *outside* f_q-derivasi di $\mathbb{Z}$.

Pada Teorema 3.2 berikut ini, dinyatakan eksistensi dari f_q-derivasi di BM-aljabar, yaitu selalu terdapat d_0^f yang merupakan f_q-derivasi di BM-aljabar. Motivasi dari pengkonstruksian sifat ini adalah karena setiap BM-aljabar selalu memuat elemen 0.

Teorema 3.2. Jika $(X; *, 0)$ adalah BM-aljabar dan f adalah endomorfisma dari X, maka d_0^f adalah f_q-derivasi di X.

Bukti. Akan dibuktikan bahwa d_0^f merupakan *inside* f_q-derivasi sekaligus *outside* f_q-derivasi di X. Berdasarkan aksioma $A1$ di BM-aljabar diperoleh

$$d_0^f(x) = f(x) * 0 = f(x),$$

sehingga

$$\begin{aligned} d_0^f(x * y) &= f(x * y) * 0 \\ &= f(x * y) \\ &= f(x) * f(y) \\ d_0^f(x * y) &= d_0^f(x) * f(y), \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y \in X$. Jadi, terbukti bahwa d_0^f adalah *inside* f_q-derivasi di X. Kemudian, juga dari aksioma $A1$ di BM-aljabar diperoleh

$$d_0^f(y) = f(y) * 0 = f(y),$$

sehingga

$$\begin{aligned} d_0^f(x * y) &= f(x * y) * 0 \\ &= f(x * y) \\ &= f(x) * f(y) \\ d_0^f(x * y) &= f(x) * d_0^f(y), \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y \in$ X. Jadi, terbukti bahwa d_0^f adalah *outside* f_q-derivasi di *X*. Oleh karena itu, terbukti bahwa d_0^f adalah f_q-derivasi di *X*. ∎

Pada *BM*-aljabar diperoleh sifat bahwa d_q^f selalu merupakan *inside* f_q-derivasi, namun belum tentu merupakan *outside* f_q-derivasi. Oleh karena itu diberikan syarat cukup untuk menjadikan d_q^f merupakan *outside* f_q-derivasi di *BM*-aljabar yang diberikan pada Teorema 3.3.

Teorema 3.3. Misalkan $(X; *, 0)$ adalah *BM*-aljabar dan f adalah endomorfisma dari *X*, maka

(i) d_q^f adalah *inside* f_q-derivasi di *X*,
(ii) Jika $0 * x = x$ untuk setiap $x \in X$, maka d_q^f adalah *outside* f_q-derivasi di *X*.

Bukti. Misalkan $(X; *, 0)$ adalah *BM*-aljabar dan f adalah endomorfisma dari *X*.

(i) Berdasarkan Teorema 2.6 diperoleh

$$\begin{aligned} d_q^f(x * y) &= f(x * y) * q \\ &= \big(f(x) * f(y)\big) * q \\ &= (f(x) * q) * f(y) \\ d_q^f(x * y) &= d_q^f(x) * f(y), \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y, q \in$ X. Jadi, terbukti bahwa d_q^f adalah *inside* f_q-derivasi di *X*.

(ii) Berdasarkan Akibat 2.9 diperoleh bahwa *X* juga merupakan *Coxeter* aljabar sehingga memenuhi aksioma C3 pada *Coxeter* aljabar. Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} d_q^f(x * y) &= f(x * y) * q \\ &= \big(f(x) * f(y)\big) * q \\ &= f(x) * (f(y) * q) \\ d_q^f(x * y) &= f(x) * d_q^f(y), \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y, q \in$ X. Jadi, terbukti bahwa d_q^f adalah *outside* f_q-derivasi di *X*. ∎

Berdasarkan Teorema 3.3 diperoleh Akibat 3.4.

Akibat 3.4. Jika $(X; *, 0)$ adalah *BM*-aljabar yang memenuhi $0 * x = x$ untuk setiap $x \in X$, maka d_q^f adalah f_q-derivasi di X.

Bukti. Misalkan $(X; *, 0)$ adalah *BM*-aljabar dan f adalah endomorfisma dari *X*. Dari Teorema 3.3 (i) diperoleh bahwa d_q^f adalah *inside* f_q-derivasi di *X*. Karena pada *X* berlaku $0 * x = x$ untuk setiap $x \in X$, maka dari Teorema 3.3 (ii) diperoleh bahwa d_q^f adalah *outside* f_q-derivasi di X. Jadi, terbukti bahwa d_q^f adalah f_q-derivasi di X. ∎

Pada Akibat 2.9 diketahui bahwa suatu *BM*-aljabar *X* yang memenuhi $0 * x = x$ untuk setiap $x \in X$ merupakan *coxeter* aljabar. Jadi, Akibat 3.4 di atas juga menyatakan bahwa pada *coxeter* aljabar, d_q^f selalu merupakan f_q-derivasi.

Selanjutnya, diperoleh Lema 3.5 tentang sifat *inside* f_q-derivasi di BM-aljabar dan Lema 3.6 tentang sifat *outside* f_q-derivasi di BM-aljabar yang diperlukan untuk pembuktian teorema berikutnya.

Lema 3.5. Misalkan $(X;*,0)$ adalah BM-aljabar dan f adalah endomorfisma dari X. Jika d_q^f adalah *inside* f_q-derivasi di X, maka

(i) $d_q^f(0) = d_q^f(x) * f(x)$ untuk setiap $x \in X$,

(ii) $d_q^f(x) * f(x) = d_q^f(y) * f(y)$ untuk setiap $x, y \in X$.

Bukti. Misalkan $(X;*,0)$ adalah BM-aljabar dan f adalah endomorfisma dari X.

(i) Karena d_q^f adalah *inside* f_q-derivasi di X, maka $d_q^f(x * y) = d_q^f(x) * f(y)$ untuk setiap $x, y \in X$. Dengan mengganti y menjadi x dan berdasarkan Lema 2.4 (i) diperoleh

$$d_q^f(x * x) = d_q^f(x) * f(x)$$
$$d_q^f(0) = d_q^f(x) * f(x).$$

Jadi, terbukti bahwa $d_q^f(0) = d_q^f(x) * f(x)$ untuk setiap $x \in X$.

(ii) Dari (i) diperoleh $d_q^f(0) = d_q^f(x) * f(x)$ dan juga dapat ditulis $d_q^f(0) = d_q^f(y) * f(y)$ untuk setiap $x, y \in X$, sehingga diperoleh

$$d_q^f(0) = d_q^f(0)$$
$$d_q^f(x) * f(x) = d_q^f(y) * f(y)$$

Jadi, terbukti bahwa $d_q^f(x) * f(x) = d_q^f(y) * f(y)$ untuk setiap $x, y \in X$. ■

Lema 3.6. Misalkan $(X;*,0)$ adalah BM-aljabar dan f adalah endomorfisma dari X. Jika d_q^f adalah *outside* f_q-derivasi di X, maka

(i) $d_q^f(0) = f(x) * d_q^f(x)$ untuk setiap $x \in X$,

(ii) $f(x) * d_q^f(x) = f(y) * d_q^f(y)$ untuk setiap $x, y \in X$.

Bukti. Misalkan $(X;*,0)$ adalah BM-aljabar dan f adalah endomorfisma dari X.

(i) Karena d_q^f adalah *outside* f_q-derivasi di X, maka $d_q^f(x * y) = f(x) * d_q^f(y)$ untuk setiap $x, y \in X$. Dengan mengganti y menjadi x dan berdasarkan Lema 2.4 (i) diperoleh

$$d_q^f(x * x) = f(x) * d_q^f(x)$$
$$d_q^f(0) = f(x) * d_q^f(x).$$

Jadi, terbukti bahwa $d_q^f(0) = f(x) * d_q^f(x)$ untuk setiap $x \in X$.

(ii) Dari (i) diperoleh $d_q^f(0) = f(x) * d_q^f(x)$ dan juga dapat ditulis $d_q^f(0) = f(y) * d_q^f(y)$ untuk setiap $x, y \in X$, sehingga diperoleh

$$d_q^f(0) = d_q^f(0)$$
$$f(x) * d_q^f(x) = f(y) * d_q^f(y)$$

Jadi, terbukti bahwa $f(x) * d_q^f(x) = f(y) * d_q^f(y)$ untuk setiap $x, y \in X$. ■

Berdasarkan sifat-sifat yang diperoleh dari Lema 3.5 dan Lema 3.6 dapat dikonstruksi sifat *inside* dan *outside* f_q-derivasi di *BM*-aljabar yang diberikan pada Teorema 3.7.

Teorema 3.7. Misalkan $(X; *, 0)$ adalah *BM*-aljabar dan f adalah endomorfisma dari X.
(i) Jika d_q^f adalah *inside* f_q-derivasi di X, maka $d_q^f(0) = 0 * q$ untuk setiap $q \in X$,
(ii) Jika d_q^f adalah *outside* f_q-derivasi di X, maka $d_q^f(0) = q$ untuk setiap $q \in X$.

Bukti. Misalkan $(X; *, 0)$ adalah *BM*-aljabar dan f adalah endomorfisma dari X.

(i) Misalkan d_q^f adalah *inside* f_q-derivasi di X, maka berdasarkan Lema 3.5 (i), aksioma $A1$ dan aksioma $A2$ diperoleh

$$\begin{aligned} d_q^f(0) &= d_q^f(x) * f(x) \\ &= (f(x) * q) * f(x) \\ &= (f(x) * q) * (f(x) * 0) \\ d_q^f(0) &= 0 * q. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $d_q^f(0) = 0 * q$ untuk setiap $q \in X$.

(ii) Misalkan d_q^f adalah *outside* f_q-derivasi di X, maka berdasarkan Lema 3.6 (i), aksioma $A1$ dan aksioma $A2$ diperoleh

$$\begin{aligned} d_q^f(0) &= f(x) * d_q^f(x) \\ &= f(x) * (f(x) * q) \\ &= (f(x) * 0) * (f(x) * q) \\ &= q * 0 \\ d_q^f(0) &= q \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $d_q^f(0) = q$ untuk setiap $q \in X$. ■

Berdasarkan Teorema 3.7 dapat dikonstruksi sifat f_q-derivasi di *BM*-aljabar yang diberikan pada Teorema 3.8.

Teorema 3.8. Misalkan $(X; *, 0)$ adalah *BM*-aljabar dan f adalah endomorfisma dari X. d_q^f adalah f_q-derivasi di X jika dan hanya jika $0 * x = x$ untuk setiap $x \in X$.

Bukti. Karena d_q^f adalah f_q-derivasi di X, maka d_q^f merupakan *inside* f_q-derivasi sekaligus *outside* f_q-derivasi di X, sehingga dari Teorema 3.7 (i) dan (ii) diperoleh

$$d_q^f(0) = d_q^f(0)$$
$$0 * q = q$$

Jadi, terbukti bahwa $0 * x = x$ untuk setiap $x \in X$. Sebaliknya, jika $0 * x = x$ untuk setiap $x \in X$, maka dari Akibat 3.4 terbukti bahwa d_q^f adalah f_q-derivasi di X. ■

Berikut ini diberikan sifat d_0^f yang diperoleh jika f adalah endomorfisma identitas dari suatu BM-aljabar.

Teorema 3.9. Misalkan $(X; *, 0)$ adalah BM-aljabar dan f adalah endomorfisma dari X. Jika f adalah fungsi identitas, maka d_0^f juga merupakan fungsi identitas.

Bukti. Misalkan $(X; *, 0)$ adalah BM-aljabar dan f adalah endomorfisma dari X. Karena f adalah fungsi identitas, maka $f(x) = x$ untuk setiap $x \in X$ sehingga berdasarkan aksioma $A1$ diperoleh

$$d_0^f(x) = f(x) * 0 = f(x) = x.$$

Jadi, terbukti bahwa d_0^f juga merupakan fungsi identitas. ■

Misalkan $(X; *, 0)$ adalah BM-aljabar dan f adalah endomorfisma dari X. Untuk setiap $x, y \in X$ didefinisikan $x \wedge y = y * (y * x)$. Suatu pemetaan d_q^f dari X ke dirinya sendiri disebut (l,r)-f_q-derivasi di X jika memenuhi $d_q^f(x * y) = (d_q^f(x) * f(y)) \wedge (f(x) * d_q^f(y))$ untuk setiap $x, y \in X$ dan disebut (r,l)-f_q-derivasi di X jika memenuhi $d_q^f(x * y) = (f(x) * d_q^f(y)) \wedge (d_q^f(x) * f(y))$. Pemetaan d_q^f disebut f_q-derivasi di X jika d_q^f merupakan (l, r)-f_q-derivasi sekaligus (r, l)-f_q-derivasi di X.

Berdasarkan pendefinisian tersebut diperoleh Teorema 3.10.

Teorema 3.10. Misalkan $(X; *, 0)$ adalah BM-aljabar dan f adalah endomorfisma dari X.

(i) Jika d_q^f adalah (l,r)-f_q-derivasi di X, maka d_q^f adalah *inside* f_q-derivasi di X,

(ii) Jika d_q^f adalah (r,l)-f_q-derivasi di X, maka d_q^f adalah *outside* f_q-derivasi di X

Bukti. Misalkan $(X; *, 0)$ adalah BM-aljabar dan f adalah endomorfisma dari X.

(i) Karena d_q^f adalah (l,r)-f_q-derivasi di X, maka dari aksioma $A1$ dan $A2$ diperoleh

$$\begin{aligned} d_q^f(x * y) &= (d_q^f(x) * f(y)) \wedge (f(x) * d_q^f(y)) \\ &= \left(f(x) * d_q^f(y)\right) * [\left(f(x) * d_q^f(y)\right) * (d_q^f(x) * f(y))] \\ &= [\left(f(x) * d_q^f(y)\right) * 0] * [\left(f(x) * d_q^f(y)\right) * (d_q^f(x) * f(y))] \\ &= (d_q^f(x) * f(y)) * 0 \\ d_q^f(x * y) &= d_q^f(x) * f(y). \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa d_q^f adalah *inside* f_q-derivasi di X.

(ii) Karena d_q^f adalah (r, l)-f_q-derivasi di X, maka dari aksioma $A1$ dan $A2$ diperoleh

$$\begin{aligned} d_q^f(x * y) &= (f(x) * d_q^f(y)) \wedge (d_q^f(x) * f(y)) \\ &= (d_q^f(x) * f(y)) * [(d_q^f(x) * f(y)) * (f(x) * d_q^f(y))] \\ &= [(d_q^f(x) * f(y)) * 0] * [(d_q^f(x) * f(y)) * (f(x) * d_q^f(y))] \\ &= (f(x) * d_q^f(y)) * 0 \\ d_q^f(x * y) &= f(x) * d_q^f(y). \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa d_q^f adalah *outside* f_q-derivasi di X. ■

Dengan mudah dapat dibuktikan bahwa Teorema 3.10 juga berlaku sebaliknya, sehingga dapat disimpulkan bahwa pada *BM*-aljabar konsep $(l,)$-f_q-derivasi sama dengan konsep *inside* f_q-derivasi dan konsep (r,l)-f_q-derivasi sama dengan konsep *outside* f_q-derivasi. Selanjutnya, diberikan definisi d_q^f yang *regular* beserta sifatnya.

Definisi 3.11. Misalkan $(X; *, 0)$ suatu *BM*-aljabar dan f adalah endomorfisma dari X. Suatu pemetaan d_q^f dari X ke dirinya sendiri dikatakan *regular* jika $d_q^f(0) = 0$.

Teorema 3.12. Misalkan $(X; * ,0)$ adalah *BM*-aljabar dan f adalah endomorfisma dari X. Jika d_q^f *regular*, maka $d_q^f = f$.

Bukti. Misalkan $(X; * ,0)$ adalah *BM*-aljabar dan f adalah endomorfisma dari X. Karena d_q^f *regular* diperoleh

$$d_q^f(0) = 0$$
$$f(0) * q = 0$$
$$0 * q = 0.$$

Karena $0 * q = 0$, maka berdasarkan Lema 2.4 (v) diperoleh $q * 0 = 0$ dan berdasarkan aksioma $A1$ diperoleh $q = 0$. Kemudian, karena $q = 0$ dan dari aksioma $A1$ diperoleh

$$d_q^f(x) = d_0^f(x) = f(x) * 0 = f(x).$$

Jadi, terbukti bahwa $d_q^f = f$. ■

4. Kesimpulan

Pada artikel ini, dapat disimpulkan bahwa secara umum sifat-sifat *inside* f_q-derivasi berbeda dengan *outside* f_q-derivasi di *BM*-aljabar. Namun, ada satu sifat yang sama, yaitu jika f endomorfisma identitas dari suatu *BM*-aljabar maka d_q^f juga merupakan fungsi identitas dan tidak disyaratkan d_q^f itu merupakan *inside* ataupun *outside* f_q-derivasi di *BM*-aljabar. Demikian halnya untuk suatu pemetaan d_q^f yang *regular* diperoleh satu sifat, yaitu $d_q^f = f$ dan juga tidak disyaratkan d_q^f itu merupakan *inside* ataupun *outside* f_q-derivasi di *BM*-aljabar. Namun, tentunya setiap d_q^f merupakan *inside* f_q-derivasi, tetapi belum tentu merupakan *outside* f_q-derivasi di *BM*-aljabar. Adapun sifat-sifat f_q-derivasi di *BM*-aljabar berbeda dengan di *B*-aljabar dan sifat-sifat tersebut tidak berlaku secara umum di *B*-aljabar. Walaupun demikian, juga ada beberapa sifatnya yang sama.

Referensi

[1] J. Neggers and H. S Kim, "On B-algebras," *Mat. Vesn.*, vol. 54, no. 1–2, pp. 21–29, 2002.

[2] H. S. Kim and H. G. Park, "On 0-commutative B-algebras," *Sci. Math. Jpn.*, vol. 62, no. 1, pp. 31–36, 2005.

[3] C. B. Kim and H. S. Kim, "On BM-algebras," *Sci. Math. Jpn.*, vol. 63, no. 3, pp. 421–428, 2006.

[4] M. Ashraf, S. Ali, and C. Haetinger, "On derivations in rings and their applications," *Aligarh Bull Math*, vol. 25, no. 2, pp. 79–107, 2006.

[5] N. Alshehri, "Derivations of B-algebras," *Science (80-.).*, vol. 22, no. 1, 2010.

[6] K. Sugianti and S. Gemawati, "Generalized Derivations of BM-Algebras," *Int. J. Contemp. Math. Sci.*, vol. 15, no. 4, pp. 225–233, 2020.

[7] D. Al-Kadi, "fq-Derivations of G-Algebra," 2016.

[8] P. Muangkarn, C. Suanoom, P. Pengyim, and A. Iampan, "fq-Derivations of B-algebras," *J. Math. Comput. Sci.*, vol. 11, no. 2, pp. 2047–2057, 2021.

[9] C. Ramadhona, S. Gemawati, and Syamsudhuha, "Generalized f-derivation of BP-algebras," *Int. J. Math. Trends Technol.*, vol. 66, no. 11, pp. 80–86, 2020.

[10] N. Kandaraj and A. Devi A, "f-derivations on BP-algebras," *Int. J. Sci. Res. Publ.*, vol. 6, no. 10, pp. 8–18, 2016.

[11] W. Aziz, S. Gemawati, and L. Deswita, "On (f, g)-derivations in BG-algebras," *Int. Organ. Sci. Res. J. Math.*, vol. 16, pp. 14–20, 2020.

[12] Kamaludin, S. Gemawati, and Kartini, "Derivations in BG-algebras," *Int. J. Algebr.*, vol. 13, no. 5, pp. 249–257, 2019.

[13] T. Ganeshkumar and M. Chandramouleeswaran, "t-derivations on TM-algebras," *Int. J. Pure Appl. Math.*, vol. 85, no. 1, pp. 95–107, 2013.

[14] R. Soleimani and S. Jahangiri, "A Note on t-derivations of B-algebras."

[15] H. S. Kim, Y. H. Kim, and J. Neggers, "Coxeters and pre-Coxeter algebras in Smarandache setting," *Honam Math. J.*, vol. 26, no. 4, pp. 471–481, 2004.