

## $f_q$ -Derivasi di $BM$ -aljabar

Egytia Yattaqi<sup>1</sup>, Sri Gemawati<sup>2\*</sup>, Ihda Hasbiyati<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup> Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Riau,  
Jl. HR Soebrantas Km 12,5 Kel. Simpang Baru Kec. Tampan, Pekanbaru 28293, Indonesia

\*Penulis Korespondensi. Email: [gemawati.sri@gmail.com](mailto:gemawati.sri@gmail.com)

### ABSTRAK

$B$ -aljabar adalah suatu himpunan tak kosong  $X$  dengan operasi biner " $*$ " dan konstanta  $0$  yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Suatu bentuk khusus dari  $B$ -aljabar adalah  $BM$ -aljabar. Adapun hubungan kedua aljabar tersebut, setiap  $BM$ -aljabar adalah  $B$ -aljabar dan setiap  $B$ -aljabar  $0$ -komutatif adalah  $BM$ -aljabar. Konsep  $f_q$ -derivasi telah dibahas di  $B$ -aljabar. Pada artikel ini, dibahas konsep  $f_q$ -derivasi di  $BM$ -aljabar. Hasil penelitian yang diperoleh adalah mendefinisikan *inside* dan *outside*  $f_q$ -derivasi di  $BM$ -aljabar dan menentukan sifat-sifatnya. Adapun definisi  $f_q$ -derivasi di  $BM$ -aljabar ekuivalen dengan  $f_q$ -derivasi di  $B$ -aljabar, namun pada sifat-sifatnya terdapat perbedaan, yaitu terdapat sifat  $f_q$ -derivasi yang berlaku di  $BM$ -aljabar tetapi secara umum tidak berlaku di  $B$ -aljabar.

### Kata Kunci:

$BM$ -aljabar; *Inside*  $f_q$ -derivasi; *Outside*  $f_q$ -derivasi;  $f_q$ -derivasi

### ABSTRACT

$B$ -algebra is a non-empty set  $X$  with a constant  $0$  and binary operation " $*$ " satisfying certain axioms. A special form of  $B$ -algebra is a  $BM$ -algebra. Their relationship are every  $BM$ -algebra is a  $B$ -algebra and every  $0$ -commutative  $B$ -algebra is a  $BM$ -algebra. The concept of  $f_q$ -derivation in  $B$ -algebra is discussed. The results define an *inside* and an *outside*  $f_q$ -derivations in  $BM$ -algebra and obtain related properties. Moreover, the definition of  $f_q$ -derivation in  $BM$ -algebra is equivalent to  $f_q$ -derivation in  $B$ -algebra, but there are differences in their properties, which is there are some properties of  $f_q$ -derivation in  $BM$ -algebra, but generally don't hold in  $B$ -algebra.

### Keywords:

$BM$ -algebra; *Inside*  $f_q$ -derivation; *Outside*  $f_q$ -derivation;  $f_q$ -derivation

### Format Sitasi:

E. Yattaqi, S. Gemawati, and I. Hasbiyati, " $f_q$ -Derivasi di  $BM$ -aljabar," *Jambura J. Math.*, vol. 3, no. 2, pp.155-166, 2021

## 1. Pendahuluan

Neggers dan Kim [1] memperkenalkan struktur aljabar baru yang dinamakan  $B$ -aljabar. Suatu  $B$ -aljabar adalah himpunan tak kosong  $X$  dengan operasi biner  $*$  dan konstanta  $0$  yang dinotasikan dengan  $(X; *, 0)$ , serta memenuhi aksioma  $(B1)$   $x * x = 0$ ,  $(B2)$   $x * 0 = x$ , dan  $(B3)$   $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$  untuk setiap  $x, y, z \in X$ . Kemudian, Kim dan Park [2] memperkenalkan bentuk khusus dari  $B$ -aljabar, yaitu  $B$ -aljabar  $0$ -komutatif  $(X; *, 0)$  yang merupakan suatu  $B$ -aljabar yang memenuhi sifat  $x * (0 * y) = y * (0 * x)$  untuk setiap  $x, y \in X$ . Beberapa aljabar lainnya ada yang berkaitan dengan

$B$ -aljabar 0-komutatif, diantaranya adalah  $BM$ -aljabar. Kim dan Kim [3] membahas tentang  $BM$ -aljabar, yaitu suatu himpunan tak kosong  $X$  dengan operasi biner  $*$  dan konstanta  $0$  yang memenuhi aksioma (B2) dan (A2)  $(z * x) * (z * y) = y * x$  untuk setiap  $x, y, z \in X$ . Adapun hubungan antara  $BM$ -aljabar dengan  $B$ -aljabar telah dibahas dalam [3], yaitu setiap  $BM$ -aljabar adalah  $B$ -aljabar, tetapi tidak berlaku sebaliknya, karena ada  $B$ -aljabar yang bukan merupakan  $BM$ -aljabar. Namun, setiap  $B$ -aljabar 0-komutatif adalah  $BM$ -aljabar.

Berbagai konsep penting dalam aljabar abstrak telah dibahas, diantaranya konsep derivasi yang pertama kali diperkenalkan dalam kajian ring [4]. Suatu pemetaan  $d$  dari ring  $(R; +, \cdot)$  ke dirinya sendiri dikatakan derivasi di  $R$  jika memenuhi  $d(a \cdot b) = d(a) \cdot b + a \cdot d(b)$  untuk setiap  $a, b \in R$ . Kemudian, Al-Shehrie [5] memperumum konsep derivasi di ring untuk mendefinisikan konsep derivasi di  $B$ -aljabar. Suatu pemetaan  $d$  dari  $B$ -aljabar  $(X; *, 0)$  ke dirinya sendiri dikatakan *left-right* derivasi ( $(l, r)$ -derivasi) di  $X$  jika untuk setiap  $x, y \in X$  memenuhi  $d(x * y) = (d(x) * y) \wedge (x * d(y))$  dan  $d$  dikatakan *right-left* derivasi ( $(r, l)$ -derivasi) di  $X$  jika memenuhi  $d(x * y) = (x * d(y)) \wedge (d(x) * y)$ . Jika  $d$  merupakan  $(l, r)$ -derivasi sekaligus  $(r, l)$ -derivasi maka  $d$  dikatakan derivasi di  $X$ .

Konsep derivasi juga dibahas di struktur aljabar lainnya, seperti generalisasi derivasi di  $BM$ -aljabar yang dibahas oleh Sugianti dan Gemawati [6]. Pada pembahasan tersebut diberikan sifat-sifat derivasi di  $BM$ -aljabar yang memiliki perbedaan dengan sifat-sifat derivasi di  $B$ -aljabar. Kemudian, pendefinisian konsep generalisasi derivasi di  $BM$ -aljabar menghasilkan jenis derivasi baru yang berbeda dengan konsep derivasi biasa. Adapun konsep  $f_q$ -derivasi juga merupakan jenis lain dari suatu derivasi, seperti yang dibahas oleh Al-Kadi [7] tentang  $f_q$ -derivasi di  $G$ -aljabar. Selanjutnya, Muangkarn et al. [8] membahas konsep  $f_q$ -derivasi di  $B$ -aljabar dengan mendefinisikan suatu pemetaan yang melibatkan endomorfisma. Namun, pada artikel tersebut belum dibahas tentang sifat-sifat  $f_q$ -derivasi di  $B$ -aljabar khusus, seperti di  $BM$ -aljabar. Padahal konsep  $f_q$ -derivasi di  $BM$ -aljabar sangat urgen untuk menemukan sifat-sifat khusus dari suatu  $f_q$ -derivasi yang secara umum tidak berlaku di  $B$ -aljabar, namun berlaku di  $BM$ -aljabar. Adapun jenis derivasi lainnya juga telah banyak dibahas oleh peneliti lain seperti yang dapat ditemukan pada [9]-[14].

Berdasarkan uraian di atas, pada artikel ini didefinisikan *inside*  $f_q$ -derivasi di  $BM$ -aljabar beserta sifat-sifatnya dan *outside*  $f_q$ -derivasi di  $BM$ -aljabar beserta sifat-sifat yang dimilikinya. Kemudian, juga dibahas sifat-sifat  $f_q$ -derivasi dan  $f_q$ -derivasi yang *regular* di  $BM$ -aljabar.

## 2. Teori Dasar

Pada bagian ini, diberikan beberapa definisi yang diperlukan untuk mengkonstruksi hasil utama dari penelitian. Dimulai dengan beberapa definisi dan teori tentang  $B$ -aljabar dan  $BM$ -aljabar, kemudian, juga diberikan konsep  $f_q$ -derivasi di  $B$ -aljabar. Konsep-konsep yang diberikan tersebut telah dibahas dalam [1], [2], [3], [5], [6] dan [8].

Berikut ini diberikan konsep  $B$ -aljabar dan sifat-sifatnya yang diperkenalkan oleh Neggers dan Kim [1] dan konsep  $B$ -aljabar 0-komutatif beserta sifat-sifatnya.

**Definisi 2.1.** [1]  $B$ -aljabar adalah suatu himpunan tak kosong  $X$  dengan konstanta  $0$  dan operasi biner  $*$  yang memenuhi aksioma berikut:

(B1)  $x * x = 0$ ,

(B2)  $x * 0 = x$ ,

(B3)  $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$ ,

untuk setiap  $x, y, z \in X$ .

**Contoh 2.1.** Misalkan  $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  suatu himpunan yang didefinisikan pada Tabel 1.

**Tabel 1.** Tabel Cayley untuk  $(X; *, 0)$

*	0	1	2	3	4	5
0	0	2	1	3	4	5
1	1	0	2	4	5	3
2	2	1	0	5	3	4
3	3	4	5	0	2	1
4	4	5	3	1	0	2
5	5	3	4	2	1	0

Dapat dilihat pada Tabel 1 bahwa diagonal utamanya bernilai 0, sehingga untuk setiap  $x \in X$  berlaku  $x * x = 0$  (aksioma B1 terpenuhi) dan nilai pada kolom kedua menyatakan bahwa hasil operasi suatu elemen dengan 0 adalah elemen itu sendiri, sehingga berlaku  $x * 0 = x$  (aksioma B2 terpenuhi). Kemudian, misalkan  $x, y, z \in X$ , dari Tabel 1 dapat dibuktikan bahwa  $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$  sehingga aksioma B3 terpenuhi. Oleh karena itu, terbukti bahwa  $(X; *, 0)$  adalah B-aljabar.

**Lema 2.2.** [1] Jika  $(X; *, 0)$  suatu B-aljabar, maka

- (i)  $0 * (0 * x) = x$ ,
  - (ii)  $(x * y) * (0 * y) = x$ ,
  - (iii)  $y * z = y * (0 * (0 * z))$ ,
  - (iv)  $x * (y * z) = (x * (0 * z)) * y$ ,
  - (v) Jika  $x * z = y * z$ , maka  $x = y$ ,
  - (vi) Jika  $x * y = 0$ , maka  $x = y$ ,
- untuk setiap  $x, y, z \in X$ .

**Bukti.** Pembuktian Lema 2.2 telah diberikan pada [1]. ■

**Definisi 2.3.** [3] BM-aljabar adalah suatu himpunan tak kosong  $X$  dengan konstanta 0 dan operasi biner  $*$  yang memenuhi aksioma berikut:

(A1)  $x * 0 = x$ ,

(A2)  $(z * x) * (z * y) = y * x$ ,

untuk setiap  $x, y, z \in X$ .

**Contoh 2.2.** Misalkan  $X = \{0, 1, 2\}$  suatu himpunan yang didefinisikan pada Tabel 2.

**Tabel 2.** Tabel Cayley untuk  $(X; *, 0)$

*	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

Berdasarkan Tabel 2 diketahui bahwa nilai pada kolom kedua menyatakan hasil operasi suatu elemen dengan 0 adalah elemen itu sendiri, sehingga untuk setiap  $x \in X$  berlaku  $x * 0 = x$  (aksioma A1 terpenuhi). Kemudian, misalkan  $x, y, z \in X$ , dari Tabel 2 juga dapat dibuktikan bahwa  $(z * x) * (z * y) = y * x$  sehingga aksioma A2 terpenuhi. Oleh karena itu, terbukti bahwa  $(X; *, 0)$  adalah *BM*-aljabar.

**Lema 2.4.** [3] Misalkan  $(X; *, 0)$  adalah *BM*-aljabar, maka

- (i)  $x * x = 0$ ,
- (ii)  $0 * (0 * x) = x$ ,
- (iii)  $0 * (x * y) = y * x$ ,
- (iv)  $(x * z) * (y * z) = x * y$ ,
- (v)  $x * y = 0$  jika dan hanya jika  $y * x = 0$ ,

untuk setiap  $x, y, z \in X$ .

**Bukti.** Pembuktian Lema 2.4 telah diberikan pada [3]. ■

**Teorema 2.5.** [3] Setiap *BM*-aljabar adalah *B*-aljabar.

**Bukti.** Pembuktian Teorema 2.5 telah diberikan pada [3]. ■

Kebalikan dari Teorema 2.5 tidak berlaku, karena ada *B*-aljabar yang bukan *BM*-aljabar. Seperti pada Contoh 2.1,  $(X; *, 0)$  adalah *B*-aljabar tetapi bukan *BM*-aljabar, karena  $(5 * 1) * (5 * 4) = 4 \neq 5 = 4 * 1$ .

**Teorema 2.6.** [3] Misalkan  $(X; *, 0)$  adalah *BM*-aljabar, maka  $(x * y) * z = (x * z) * y$  untuk setiap  $x, y \in X$ .

**Bukti.** Pembuktian Teorema 2.6 telah diberikan pada [3]. ■

**Definisi 2.7.** [15] *Coxeter* aljabar adalah suatu himpunan tak kosong  $X$  dengan konstanta 0 dan operasi biner  $*$  yang memenuhi aksioma berikut:

- (C1)  $x * x = 0$ ,
- (C2)  $x * 0 = x$ ,
- (C3)  $(x * y) * z = x * (y * z)$ ,

untuk setiap  $x, y, z \in X$ .

**Teorema 2.8.** [3] Jika  $(X; *, 0)$  adalah BM-aljabar dengan  $0*x = x$  untuk setiap  $x \in X$ , maka  $(X; *, 0)$  adalah Coxeter aljabar.

**Bukti.** Pembuktian Teorema 2.8 telah diberikan pada [3]. ■

**Akibat 2.9.** [3]  $(X; *, 0)$  adalah Coxeter aljabar jika dan hanya jika  $(X; *, 0)$  adalah BM-aljabar dengan  $0 * x = x$  untuk setiap  $x \in X$ .

**Bukti.** Pembuktian Akibat 2.9 telah diberikan pada [3]. ■

Dari Akibat 2.9 dapat disimpulkan bahwa *coxeter* aljabar ekuivalen dengan BM-aljabar  $X$  dengan  $0 * x = x$  untuk setiap  $x \in X$ .

Konsep derivasi di  $B$ -aljabar telah dibahas dalam [5]. Misalkan  $(X; *, 0)$  suatu  $B$ -aljabar, maka didefinisikan  $x \wedge y = y * (y * x)$  untuk setiap  $x, y \in X$ .

**Definisi 2.10.** [5] Misalkan  $(X; *, 0)$  adalah  $B$ -aljabar. Suatu pemetaan  $d$  dari  $X$  ke dirinya sendiri disebut  $(l)$ -derivasi di  $X$  jika memenuhi  $d(x * y) = (d(x) * y) \wedge (x * d(y))$  untuk setiap  $x, y \in X$  dan disebut  $(r, l)$ -derivasi di  $X$  jika memenuhi  $d(x * y) = (x * d(y)) \wedge (d(x) * y)$ . Pemetaan  $d$  disebut derivasi di  $X$  jika  $d$  merupakan  $(l, r)$ -derivasi sekaligus  $(r, l)$ -derivasi di  $X$ .

**Definisi 2.11.** [5] Misalkan  $(X; *, 0)$  suatu  $B$ -aljabar. Pemetaan dari  $X$  ke dirinya sendiri dikatakan *regular* jika memenuhi  $d(0) = 0$ .

Misalkan  $f$  adalah suatu pemetaan dari  $B$ -aljabar  $(X; *, 0)$  ke dirinya sendiri.  $f$  adalah endomorfisma dari  $X$  jika memenuhi  $f(x * y) = f(x) * f(y)$  untuk setiap  $x, y \in X$ . Kemudian, didefinisikan suatu pemetaan  $d_q^f$  dari  $X$  ke dirinya sendiri dengan  $d_q^f(x) = f(x) * q$  untuk setiap  $x, q \in X$ .

**Definisi 2.12.** [8] Misalkan  $(X; *, 0)$  adalah  $B$ -aljabar dan  $f$  adalah endomorfisma dari  $X$ . Suatu pemetaan  $d_q^f$  dari  $X$  ke dirinya sendiri dikatakan *inside*  $f_q$ -derivasi di  $X$  jika memenuhi  $d_q^f(x * y) = d_q^f(x) * f(y)$  untuk setiap  $x, y \in X$  dan dikatakan *outside*  $f_q$ -derivasi di  $X$  jika memenuhi  $d_q^f(x * y) = f(x) * d_q^f(y)$ . Pemetaan  $d_q^f$  disebut  $f_q$ -derivasi di  $X$  jika  $d_q^f$  merupakan *inside* sekaligus *outside*  $f_q$ -derivasi di  $X$ .

### 3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini diberikan hasil utama penelitian, yaitu mendefinisikan *inside*  $f_q$ -derivasi dan *outside*  $f_q$ -derivasi di BM-aljabar dengan menggunakan cara yang sama pada pendefinisian *inside*  $f_q$ -derivasi dan *outside*  $f_q$ -derivasi di  $B$ -aljabar oleh Muangkarn et al. [15]. Kemudian, juga diberikan sifat-sifat *inside*  $f_q$ -derivasi dan *outside*  $f_q$ -derivasi di BM-aljabar.

Misalkan  $(X; *, 0)$  adalah BM-aljabar dan  $f$  adalah suatu pemetaan dari  $X$  ke dirinya sendiri.  $f$  adalah endomorfisma dari  $X$  jika memenuhi  $f(x * y) = f(x) * f(y)$  untuk setiap  $x, y \in X$ . Kemudian, didefinisikan suatu pemetaan  $d_q^f$  dari  $X$  ke dirinya sendiri dengan  $d_q^f(x) = f(x) * q$  untuk setiap  $x, q \in X$ .

**Definisi 3.1.** Misalkan  $(X; *, 0)$  adalah  $BM$ -aljabar dan  $f$  adalah endomorfisma dari  $X$ . Suatu pemetaan  $d_q^f$  dari  $X$  ke dirinya sendiri dikatakan *inside*  $f_q$ -derivasi di  $X$  jika memenuhi  $d_q^f(x * y) = d_q^f(x) * f(y)$  untuk setiap  $x, y \in X$  dan dikatakan *outside*  $f_q$ -derivasi di  $X$  jika memenuhi  $d_q^f(x * y) = f(x) * d_q^f(y)$ . Pemetaan  $d_q^f$  disebut  $f_q$ -derivasi di  $X$  jika  $d_q^f$  merupakan *inside* sekaligus *outside*  $f_q$ -derivasi di  $X$ .

**Contoh 3.1.** Diketahui  $(\mathbb{Z}; -, 0)$  adalah  $BM$ -aljabar. Didefinisikan pemetaan  $f$  dan  $d_q^f$  dari  $\mathbb{Z}$  ke dirinya sendiri dengan  $f(x) = x$  dan  $d_q^f(x) = f(x) - q$  untuk setiap  $x \in \mathbb{Z}$ . Dengan mudah dapat dibuktikan bahwa  $f$  adalah suatu endomorfisma dari  $\mathbb{Z}$ . Akan diperiksa apakah  $d_q^f$  merupakan *inside*  $f_q$ -derivasi di  $\mathbb{Z}$ . Untuk setiap  $x, y \in \mathbb{Z}$  diperoleh  $d_q^f(x - y) = f(x - y) - q = x - y - q$  dan  $d_q^f(x) - f(y) = f(x) - q - y = x - y - q$  sehingga memenuhi  $d_q^f(x - y) = d_q^f(x) - f(y)$ . Jadi, terbukti bahwa  $d_q^f$  merupakan *inside*  $f_q$ -derivasi di  $\mathbb{Z}$ . Selanjutnya, diperiksa apakah  $d_q^f$  merupakan *outside*  $f_q$ -derivasi di  $\mathbb{Z}$ . Untuk setiap  $x, y \in \mathbb{Z}$  diperoleh  $f(x) - d_q^f(y) = x - (f(y) - q) = x - y + q \neq d_q^f(x - y)$  sehingga  $d_q^f$  bukan merupakan *outside*  $f_q$ -derivasi di  $\mathbb{Z}$ .

Pada Teorema 3.2 berikut ini, dinyatakan eksistensi dari  $f_q$ -derivasi di  $BM$ -aljabar, yaitu selalu terdapat  $d_0^f$  yang merupakan  $f_q$ -derivasi di  $BM$ -aljabar. Motivasi dari pengkonstruksian sifat ini adalah karena setiap  $BM$ -aljabar selalu memuat elemen 0.

**Teorema 3.2.** Jika  $(X; *, 0)$  adalah  $BM$ -aljabar dan  $f$  adalah endomorfisma dari  $X$ , maka  $d_0^f$  adalah  $f_q$ -derivasi di  $X$ .

**Bukti.** Akan dibuktikan bahwa  $d_0^f$  merupakan *inside*  $f_q$ -derivasi sekaligus *outside*  $f_q$ -derivasi di  $X$ . Berdasarkan aksioma A1 di  $BM$ -aljabar diperoleh

$$d_0^f(x) = f(x) * 0 = f(x),$$

sehingga

$$\begin{aligned} d_0^f(x * y) &= f(x * y) * 0 \\ &= f(x * y) \\ &= f(x) * f(y) \\ d_0^f(x * y) &= d_0^f(x) * f(y), \end{aligned}$$

untuk setiap  $x, y \in X$ . Jadi, terbukti bahwa  $d_0^f$  adalah *inside*  $f_q$ -derivasi di  $X$ . Kemudian, juga dari aksioma A1 di  $BM$ -aljabar diperoleh

$$d_0^f(y) = f(y) * 0 = f(y),$$

sehingga

$$\begin{aligned} d_0^f(x * y) &= f(x * y) * 0 \\ &= f(x * y) \\ &= f(x) * f(y) \\ d_0^f(x * y) &= f(x) * d_0^f(y), \end{aligned}$$

### $f_q$ -Derivasi di BM-aljabar

untuk setiap  $x, y \in X$ . Jadi, terbukti bahwa  $d_0^f$  adalah *outside*  $f_q$ -derivasi di  $X$ . Oleh karena itu, terbukti bahwa  $d_0^f$  adalah  $f_q$ -derivasi di  $X$ . ■

Pada  $BM$ -aljabar diperoleh sifat bahwa  $d_q^f$  selalu merupakan *inside*  $f_q$ -derivasi, namun belum tentu merupakan *outside*  $f_q$ -derivasi. Oleh karena itu diberikan syarat cukup untuk menjadikan  $d_q^f$  merupakan *outside*  $f_q$ -derivasi di  $BM$ -aljabar yang diberikan pada Teorema 3.3.

**Teorema 3.3.** Misalkan  $(X; *, 0)$  adalah  $BM$ -aljabar dan  $f$  adalah endomorfisma dari  $X$ , maka

- (i)  $d_q^f$  adalah *inside*  $f_q$ -derivasi di  $X$ ,
- (ii) Jika  $0 * x = x$  untuk setiap  $x \in X$ , maka  $d_q^f$  adalah *outside*  $f_q$ -derivasi di  $X$ .

**Bukti.** Misalkan  $(X; *, 0)$  adalah  $BM$ -aljabar dan  $f$  adalah endomorfisma dari  $X$ .

- (i) Berdasarkan Teorema 2.6 diperoleh

$$\begin{aligned} d_q^f(x * y) &= f(x * y) * q \\ &= (f(x) * f(y)) * q \\ &= (f(x) * q) * f(y) \\ d_q^f(x * y) &= d_q^f(x) * f(y), \end{aligned}$$

untuk setiap  $x, y, q \in X$ . Jadi, terbukti bahwa  $d_q^f$  adalah *inside*  $f_q$ -derivasi di  $X$ .

- (ii) Berdasarkan Akibat 2.9 diperoleh bahwa  $X$  juga merupakan *Coxeter* aljabar sehingga memenuhi aksioma C3 pada *Coxeter* aljabar. Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} d_q^f(x * y) &= f(x * y) * q \\ &= (f(x) * f(y)) * q \\ &= f(x) * (f(y) * q) \\ d_q^f(x * y) &= f(x) * d_q^f(y), \end{aligned}$$

untuk setiap  $x, y, q \in X$ . Jadi, terbukti bahwa  $d_q^f$  adalah *outside*  $f_q$ -derivasi di  $X$ . ■

Berdasarkan Teorema 3.3 diperoleh Akibat 3.4.

**Akibat 3.4.** Jika  $(X; *, 0)$  adalah  $BM$ -aljabar yang memenuhi  $0 * x = x$  untuk setiap  $x \in X$ , maka  $d_q^f$  adalah  $f_q$ -derivasi di  $X$ .

**Bukti.** Misalkan  $(X; *, 0)$  adalah  $BM$ -aljabar dan  $f$  adalah endomorfisma dari  $X$ . Dari Teorema 3.3 (i) diperoleh bahwa  $d_q^f$  adalah *inside*  $f_q$ -derivasi di  $X$ . Karena pada  $X$  berlaku  $0 * x = x$  untuk setiap  $x \in X$ , maka dari Teorema 3.3 (ii) diperoleh bahwa  $d_q^f$  adalah *outside*  $f_q$ -derivasi di  $X$ . Jadi, terbukti bahwa  $d_q^f$  adalah  $f_q$ -derivasi di  $X$ . ■

Pada Akibat 2.9 diketahui bahwa suatu  $BM$ -aljabar  $X$  yang memenuhi  $0 * x = x$  untuk setiap  $x \in X$  merupakan *coxeter* aljabar. Jadi, Akibat 3.4 di atas juga menyatakan bahwa pada *coxeter* aljabar,  $d_q^f$  selalu merupakan  $f_q$ -derivasi.

Selanjutnya, diperoleh Lema 3.5 tentang sifat *inside*  $f_q$ -derivasi di  $BM$ -aljabar dan Lema 3.6 tentang sifat *outside*  $f_q$ -derivasi di  $BM$ -aljabar yang diperlukan untuk pembuktian teorema berikutnya.

**Lema 3.5.** Misalkan  $(X; *, 0)$  adalah  $BM$ -aljabar dan  $f$  adalah endomorfisma dari  $X$ . Jika  $d_q^f$  adalah *inside*  $f_q$ -derivasi di  $X$ , maka

- (i)  $d_q^f(0) = d_q^f(x) * f(x)$  untuk setiap  $x \in X$ ,
- (ii)  $d_q^f(x) * f(x) = d_q^f(y) * f(y)$  untuk setiap  $x, y \in X$ .

**Bukti.** Misalkan  $(X; *, 0)$  adalah  $BM$ -aljabar dan  $f$  adalah endomorfisma dari  $X$ .

- (i) Karena  $d_q^f$  adalah *inside*  $f_q$ -derivasi di  $X$ , maka  $d_q^f(x * y) = d_q^f(x) * f(y)$  untuk setiap  $x, y \in X$ . Dengan mengganti  $y$  menjadi  $x$  dan berdasarkan Lema 2.4 (i) diperoleh

$$\begin{aligned} d_q^f(x * x) &= d_q^f(x) * f(x) \\ d_q^f(0) &= d_q^f(x) * f(x). \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa  $d_q^f(0) = d_q^f(x) * f(x)$  untuk setiap  $x \in X$ .

- (ii) Dari (i) diperoleh  $d_q^f(0) = d_q^f(x) * f(x)$  dan juga dapat ditulis  $d_q^f(0) = d_q^f(y) * f(y)$  untuk setiap  $x, y \in X$ , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} d_q^f(0) &= d_q^f(0) \\ d_q^f(x) * f(x) &= d_q^f(y) * f(y) \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa  $d_q^f(x) * f(x) = d_q^f(y) * f(y)$  untuk setiap  $x, y \in X$ . ■

**Lema 3.6.** Misalkan  $(X; *, 0)$  adalah  $BM$ -aljabar dan  $f$  adalah endomorfisma dari  $X$ . Jika  $d_q^f$  adalah *outside*  $f_q$ -derivasi di  $X$ , maka

- (i)  $d_q^f(0) = f(x) * d_q^f(x)$  untuk setiap  $x \in X$ ,
- (ii)  $f(x) * d_q^f(x) = f(y) * d_q^f(y)$  untuk setiap  $x, y \in X$ .

**Bukti.** Misalkan  $(X; *, 0)$  adalah  $BM$ -aljabar dan  $f$  adalah endomorfisma dari  $X$ .

- (i) Karena  $d_q^f$  adalah *outside*  $f_q$ -derivasi di  $X$ , maka  $d_q^f(x * y) = f(x) * d_q^f(y)$  untuk setiap  $x, y \in X$ . Dengan mengganti  $y$  menjadi  $x$  dan berdasarkan Lema 2.4 (i) diperoleh

$$\begin{aligned} d_q^f(x * x) &= f(x) * d_q^f(x) \\ d_q^f(0) &= f(x) * d_q^f(x). \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa  $d_q^f(0) = f(x) * d_q^f(x)$  untuk setiap  $x \in X$ .

- (ii) Dari (i) diperoleh  $d_q^f(0) = f(x) * d_q^f(x)$  dan juga dapat ditulis  $d_q^f(0) = f(y) * d_q^f(y)$  untuk setiap  $x, y \in X$ , sehingga diperoleh

### $f_q$ -Derivasi di BM-aljabar

$$\begin{aligned} d_q^f(0) &= d_q^f(0) \\ f(x) * d_q^f(x) &= f(y) * d_q^f(y) \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa  $f(x) * d_q^f(x) = f(y) * d_q^f(y)$  untuk setiap  $x, y \in X$ . ■

Berdasarkan sifat-sifat yang diperoleh dari Lema 3.5 dan Lema 3.6 dapat dikonstruksi sifat *inside* dan *outside*  $f_q$ -derivasi di BM-aljabar yang diberikan pada Teorema 3.7.

**Teorema 3.7.** Misalkan  $(X; *, 0)$  adalah BM-aljabar dan  $f$  adalah endomorfisma dari  $X$ .

- (i) Jika  $d_q^f$  adalah *inside*  $f_q$ -derivasi di  $X$ , maka  $d_q^f(0) = 0 * q$  untuk setiap  $q \in X$ ,
- (ii) Jika  $d_q^f$  adalah *outside*  $f_q$ -derivasi di  $X$ , maka  $d_q^f(0) = q$  untuk setiap  $q \in X$ .

**Bukti.** Misalkan  $(X; *, 0)$  adalah BM-aljabar dan  $f$  adalah endomorfisma dari  $X$ .

- (i) Misalkan  $d_q^f$  adalah *inside*  $f_q$ -derivasi di  $X$ , maka berdasarkan Lema 3.5 (i), aksioma A1 dan aksioma A2 diperoleh

$$\begin{aligned} d_q^f(0) &= d_q^f(x) * f(x) \\ &= (f(x) * q) * f(x) \\ &= (f(x) * q) * (f(x) * 0) \\ d_q^f(0) &= 0 * q. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa  $d_q^f(0) = 0 * q$  untuk setiap  $q \in X$ .

- (ii) Misalkan  $d_q^f$  adalah *outside*  $f_q$ -derivasi di  $X$ , maka berdasarkan Lema 3.6 (i), aksioma A1 dan aksioma A2 diperoleh

$$\begin{aligned} d_q^f(0) &= f(x) * d_q^f(x) \\ &= f(x) * (f(x) * q) \\ &= (f(x) * 0) * (f(x) * q) \\ &= q * 0 \\ d_q^f(0) &= q \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa  $d_q^f(0) = q$  untuk setiap  $q \in X$ . ■

Berdasarkan Teorema 3.7 dapat dikonstruksi sifat  $f_q$ -derivasi di BM-aljabar yang diberikan pada Teorema 3.8.

**Teorema 3.8.** Misalkan  $(X; *, 0)$  adalah BM-aljabar dan  $f$  adalah endomorfisma dari  $X$ .  $d_q^f$  adalah  $f_q$ -derivasi di  $X$  jika dan hanya jika  $0 * x = x$  untuk setiap  $x \in X$ .

**Bukti.** Karena  $d_q^f$  adalah  $f_q$ -derivasi di  $X$ , maka  $d_q^f$  merupakan *inside*  $f_q$ -derivasi sekaligus *outside*  $f_q$ -derivasi di  $X$ , sehingga dari Teorema 3.7 (i) dan (ii) diperoleh

$$\begin{aligned} d_q^f(0) &= d_q^f(0) \\ 0 * q &= q \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa  $0 * x = x$  untuk setiap  $x \in X$ . Sebaliknya, jika  $0 * x = x$  untuk setiap  $x \in X$ , maka dari Akibat 3.4 terbukti bahwa  $d_q^f$  adalah  $f_q$ -derivasi di  $X$ . ■

Berikut ini diberikan sifat  $d_0^f$  yang diperoleh jika  $f$  adalah endomorfisma identitas dari suatu  $BM$ -aljabar.

**Teorema 3.9.** Misalkan  $(X; *, 0)$  adalah  $BM$ -aljabar dan  $f$  adalah endomorfisma dari  $X$ . Jika  $f$  adalah fungsi identitas, maka  $d_0^f$  juga merupakan fungsi identitas.

**Bukti.** Misalkan  $(X; *, 0)$  adalah  $BM$ -aljabar dan  $f$  adalah endomorfisma dari  $X$ . Karena  $f$  adalah fungsi identitas, maka  $f(x) = x$  untuk setiap  $x \in X$  sehingga berdasarkan aksioma A1 diperoleh

$$d_0^f(x) = f(x) * 0 = f(x) = x.$$

Jadi, terbukti bahwa  $d_0^f$  juga merupakan fungsi identitas. ■

Misalkan  $(X; *, 0)$  adalah  $BM$ -aljabar dan  $f$  adalah endomorfisma dari  $X$ . Untuk setiap  $x, y \in X$  didefinisikan  $x \wedge y = y * (y * x)$ . Suatu pemetaan  $d_q^f$  dari  $X$  ke dirinya sendiri disebut  $(l,r)$ - $f_q$ -derivasi di  $X$  jika memenuhi  $d_q^f(x * y) = (d_q^f(x) * f(y)) \wedge (f(x) * d_q^f(y))$  untuk setiap  $x, y \in X$  dan disebut  $(r,l)$ - $f_q$ -derivasi di  $X$  jika memenuhi  $d_q^f(x * y) = (f(x) * d_q^f(y)) \wedge (d_q^f(x) * f(y))$ . Pemetaan  $d_q^f$  disebut  $f_q$ -derivasi di  $X$  jika  $d_q^f$  merupakan  $(l, r)$ - $f_q$ -derivasi sekaligus  $(r, l)$ - $f_q$ -derivasi di  $X$ .

Berdasarkan pendefinisian tersebut diperoleh Teorema 3.10.

**Teorema 3.10.** Misalkan  $(X; *, 0)$  adalah  $BM$ -aljabar dan  $f$  adalah endomorfisma dari  $X$ .

- (i) Jika  $d_q^f$  adalah  $(l,r)$ - $f_q$ -derivasi di  $X$ , maka  $d_q^f$  adalah *inside*  $f_q$ -derivasi di  $X$ ,
- (ii) Jika  $d_q^f$  adalah  $(r,l)$ - $f_q$ -derivasi di  $X$ , maka  $d_q^f$  adalah *outside*  $f_q$ -derivasi di  $X$

**Bukti.** Misalkan  $(X; *, 0)$  adalah  $BM$ -aljabar dan  $f$  adalah endomorfisma dari  $X$ .

- (i) Karena  $d_q^f$  adalah  $(l,r)$ - $f_q$ -derivasi di  $X$ , maka dari aksioma A1 dan A2 diperoleh

$$\begin{aligned} d_q^f(x * y) &= (d_q^f(x) * f(y)) \wedge (f(x) * d_q^f(y)) \\ &= (f(x) * d_q^f(y)) * [(f(x) * d_q^f(y)) * (d_q^f(x) * f(y))] \\ &= [(f(x) * d_q^f(y)) * 0] * [(f(x) * d_q^f(y)) * (d_q^f(x) * f(y))] \\ &= (d_q^f(x) * f(y)) * 0 \\ d_q^f(x * y) &= d_q^f(x) * f(y). \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa  $d_q^f$  adalah *inside*  $f_q$ -derivasi di  $X$ .

- (ii) Karena  $d_q^f$  adalah  $(r, l)$ - $f_q$ -derivasi di  $X$ , maka dari aksioma A1 dan A2 diperoleh

$$\begin{aligned} d_q^f(x * y) &= (f(x) * d_q^f(y)) \wedge (d_q^f(x) * f(y)) \\ &= (d_q^f(x) * f(y)) * [(d_q^f(x) * f(y)) * (f(x) * d_q^f(y))] \\ &= [(d_q^f(x) * f(y)) * 0] * [(d_q^f(x) * f(y)) * (f(x) * d_q^f(y))] \\ &= (f(x) * d_q^f(y)) * 0 \\ d_q^f(x * y) &= f(x) * d_q^f(y). \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa  $d_q^f$  adalah *outside*  $f_q$ -derivasi di  $X$ . ■

### $f_q$ -Derivasi di BM-aljabar

Dengan mudah dapat dibuktikan bahwa Teorema 3.10 juga berlaku sebaliknya, sehingga dapat disimpulkan bahwa pada BM-aljabar konsep  $(l)$ - $f_q$ -derivasi sama dengan konsep *inside*  $f_q$ -derivasi dan konsep  $(r,l)$ - $f_q$ -derivasi sama dengan konsep *outside*  $f_q$ -derivasi. Selanjutnya, diberikan definisi  $d_q^f$  yang *regular* beserta sifatnya.

**Definisi 3.11.** Misalkan  $(X; *, 0)$  suatu BM-aljabar dan  $f$  adalah endomorfisma dari  $X$ . Suatu pemetaan  $d_q^f$  dari  $X$  ke dirinya sendiri dikatakan *regular* jika  $d_q^f(0) = 0$ .

**Teorema 3.12.** Misalkan  $(X; *, 0)$  adalah BM-aljabar dan  $f$  adalah endomorfisma dari  $X$ . Jika  $d_q^f$  *regular*, maka  $d_q^f = f$ .

**Bukti.** Misalkan  $(X; *, 0)$  adalah BM-aljabar dan  $f$  adalah endomorfisma dari  $X$ . Karena  $d_q^f$  *regular* diperoleh

$$\begin{aligned}d_q^f(0) &= 0 \\f(0) * q &= 0 \\0 * q &= 0.\end{aligned}$$

Karena  $0 * q = 0$ , maka berdasarkan Lema 2.4 (v) diperoleh  $q * 0 = 0$  dan berdasarkan aksioma A1 diperoleh  $q = 0$ . Kemudian, karena  $q = 0$  dan dari aksioma A1 diperoleh

$$d_q^f(x) = d_0^f(x) = f(x) * 0 = f(x).$$

Jadi, terbukti bahwa  $d_q^f = f$ . ■

#### 4. Kesimpulan

Pada artikel ini, dapat disimpulkan bahwa secara umum sifat-sifat *inside*  $f_q$ -derivasi berbeda dengan *outside*  $f_q$ -derivasi di BM-aljabar. Namun, ada satu sifat yang sama, yaitu jika  $f$  endomorfisma identitas dari suatu BM-aljabar maka  $d_q^f$  juga merupakan fungsi identitas dan tidak disyaratkan  $d_q^f$  itu merupakan *inside* ataupun *outside*  $f_q$ -derivasi di BM-aljabar. Demikian halnya untuk suatu pemetaan  $d_q^f$  yang *regular* diperoleh satu sifat, yaitu  $d_q^f = f$  dan juga tidak disyaratkan  $d_q^f$  itu merupakan *inside* ataupun *outside*  $f_q$ -derivasi di BM-aljabar. Namun, tentunya setiap  $d_q^f$  merupakan *inside*  $f_q$ -derivasi, tetapi belum tentu merupakan *outside*  $f_q$ -derivasi di BM-aljabar. Adapun sifat-sifat  $f_q$ -derivasi di BM-aljabar berbeda dengan di B-aljabar dan sifat-sifat tersebut tidak berlaku secara umum di B-aljabar. Walaupun demikian, juga ada beberapa sifatnya yang sama.

#### Referensi

- [1] J. Neggers and H. S Kim, "On B-algebras," *Mat. Vesn.*, vol. 54, no. 1-2, pp. 21-29, 2002.
- [2] H. S. Kim and H. G. Park, "On 0-commutative B-algebras," *Sci. Math. Jpn.*, vol. 62, no. 1, pp. 31-36, 2005.
- [3] C. B. Kim and H. S. Kim, "On BM-algebras," *Sci. Math. Jpn.*, vol. 63, no. 3, pp. 421-428, 2006.
- [4] M. Ashraf, S. Ali, and C. Haetinger, "On derivations in rings and their applications," *Aligarh Bull Math*, vol. 25, no. 2, pp. 79-107, 2006.
- [5] N. Alshehri, "Derivations of B-algebras," *Science (80-. )*, vol. 22, no. 1, 2010.

- [6] K. Sugianti and S. Gemawati, "Generalized Derivations of BM-Algebras," *Int. J. Contemp. Math. Sci.*, vol. 15, no. 4, pp. 225–233, 2020.
- [7] D. Al-Kadi, "fq-Derivations of G-Algebra," 2016.
- [8] P. Muangkarn, C. Suanoom, P. Pengyim, and A. Iampan, "fq-Derivations of B-algebras," *J. Math. Comput. Sci.*, vol. 11, no. 2, pp. 2047–2057, 2021.
- [9] C. Ramadhona, S. Gemawati, and Syamsudhuha, "Generalized f-derivation of BP-algebras," *Int. J. Math. Trends Technol.*, vol. 66, no. 11, pp. 80–86, 2020.
- [10] N. Kandaraj and A. Devi A, "f-derivations on BP-algebras," *Int. J. Sci. Res. Publ.*, vol. 6, no. 10, pp. 8–18, 2016.
- [11] W. Aziz, S. Gemawati, and L. Deswita, "On (f, g)-derivations in BG-algebras," *Int. Organ. Sci. Res. J. Math.*, vol. 16, pp. 14–20, 2020.
- [12] Kamaludin, S. Gemawati, and Kartini, "Derivations in BG-algebras," *Int. J. Algebr.*, vol. 13, no. 5, pp. 249–257, 2019.
- [13] T. Ganeshkumar and M. Chandramouleeswaran, "t-derivations on TM-algebras," *Int. J. Pure Appl. Math.*, vol. 85, no. 1, pp. 95–107, 2013.
- [14] R. Soleimani and S. Jahangiri, "A Note on t-derivations of B-algebras."
- [15] H. S. Kim, Y. H. Kim, and J. Neggers, "Coxeters and pre-Coxeter algebras in Smarandache setting," *Honam Math. J.*, vol. 26, no. 4, pp. 471–481, 2004.



This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/). Editorial of JJoM: Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo, Jln. Prof. Dr. Ing. B.J. Habibie, Moutong, Tilongkabila, Kabupaten Bone Bolango, Provinsi Gorontalo 96119, Indonesia.