JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS
Jambura J. Math. Vol. 3, No. 2, pp. 167-179, July 2021
Journal Homepage: http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom
DOI: https://doi.org/10.34312/jjom.v3i2.10468

Hasil Kali Matriks (*Mod* 2) pada Graf Roda, Graf Pertemanan dan Graf Bunga

Fransiskus Fran[1*], Novita Indah Saputri[2], Mariatul Kiftiah[3]

[1,2,3] *Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Tanjungpura, Jl. Prof. Dr. Hadari Nawawi, Kota Pontianak 78124, Kalimantan Barat, Indonesia*

* *Penulis Korespondensi. Email: fransiskusfran@math.untan.ac.id*

ABSTRAK

Pada artikel ini dibahas sifat-sifat hasil kali matriks (*mod* 2) terkait graf roda (W_n), graf pertemanan (F_n) dan graf bunga (Fl_n) yang grafikal. Beberapa hasil yang diperoleh, $A(W_n)A(\overline{W_n})(mod\ 2)$ dan $A(\overline{W_n})A(S_n)(mod\ 2)$ grafikal apabila $n = 2k + 1$, dengan S_n merupakan graf bintang. Selanjutnya, diperoleh $A(W_n)A(G_0)(mod\ 2)$ dan $A(\overline{W_n})A(G_0)(mod\ 2)$ grafikal untuk semua $n \geq 3$, dengan G_0 adalah subgraf dari W_n dengan $deg_{G_0}v_0 = 0, deg_{G_0}v_l = deg_{W_n}v_l$, untuk $1 \leq l \leq n$. Hasil kali matriks (*mod* 2) yang grafikal juga diperoleh untuk graf pertemanan dan graf bunga dengan komplemen dan subgrafnya masing- masing. Hasil lebih umum diperoleh untuk kondisi sehingga $A(G)A(G)(mod\ 2)$ grafikal.

Kata Kunci:
Matriks Ketetanggaan; Subgraf; Graf Roda; Graf Pertemanan; Graf Bunga; Hasil Kali Matriks

ABSTRACT

In this paper, we discussed the properties of the wheel, flower and friendship graphs for which the matrix product under modulo 2 were graphical. Let S_n be a star graph and G_0 be a subgraph of W_n where $deg_{G_0}v_0 = 0, deg_{G_0}v_l = deg_{W_n}v_l$, for $1 \leq l \leq n$. We proved the matrix product $A(W_n)A(\overline{W_n})(mod\ 2)$ and $A(\overline{W_n})A(S_n)(mod\ 2)$ was graphical for $n = 2k + 1$, and the matrix product $A(W_n)A(G_0)(mod\ 2)$ and $A(\overline{W_n})A(G_0)(mod\ 2)$ was graphical for all $n \geq 3$. For the next, a graphical matrix product (mod 2) was also obtained for the friendship graph and the flower graph with its complement and subgraph, respectively. As more general results were obtained for conditions such that $A(G)A(G)$(mod 2) was graphical.

Keywords:
Adjacency Matrix; Subgraph; Wheel Graph; Flower Graph; Friendship Graph; Matrix Product

Format Sitasi:

F. Fran, N. I. Saputri and M. Kiftiah, "Hasil Kali Matriks (Mod 2) pada Graf Roda, Graf Pertemanan dan Graf Bunga," *Jambura J. Math.*, vol. 3, no. 2, pp.167-179, 2021.

1. Pendahuluan

Suatu graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V merupakan himpunan tak kosong dari simpul-simpul dan E merupakan himpunan (boleh kosong) pasangan simpul-simpul $(E \subseteq V \times V)$. Pasangan simpul selanjutnya disebut sisi. Berdasarkan

e-ISSN: 2656-1344 © 2021 F. Fran., N. I. Saputri, M. Kiftiah | Under the license CC BY-NC 4.0
Received: 6 May 2021 | Accepted: 7 June 2021 | Online: 9 June 2021

sisinya, graf G merupakan graf sederhana jika tidak memuat *loop* dan sisi ganda. Pada artikel ini lebih khusus akan dibahas terkait graf sederhana. Terdapat beberapa graf sederhana yang menjadi fokus pada tulisan ini, yaitu graf roda, graf pertemanan dan graf bunga. Graf roda merupakan graf yang dapat dibentuk dari graf *cycle*, dan berdasarkan graf roda dapat dibentuk graf pertemanan dan graf helm. Lebih lanjut, dari graf helm dapat dibentuk graf bunga.

Berdasarkan graf sederhana yang telah dipaparkan, dapat dibentuk pula graf baru yaitu komplemen graf dan subgraf. Misalkan G graf sederhana, komplemen dari G dinotasikan dengan $\overline{G}$ merupakan graf dengan $V(\overline{G}) = V(G)$ dan sisi $(u, v) \in E(\overline{G})$ jika dan hanya jika sisi $(u, v) \notin E(G)$. Sedangkan, H merupakan subgraf dari G jika dan hanya jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$.

Jika diberikan suatu graf, maka graf ini dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks. Salah satu matriks yang dapat merepresentasikan graf adalah matriks ketetanggaan**.** Telah banyak penelitian terkait matriks ketetanggaan, diantaranya oleh Metha dan Acharya [1] yang meneliti tentang matriks ketetanggaan dari hasil kali graf. Pada tahun 2013, Prasad, *et.al.* [2] memperkenalkan tentang konsep perkalian matriks ketetanggaan dari graf-graf dengan banyak simpul yang sama, untuk memperoleh graf baru. Apabila hasil kali matriks ketetanggaan menghasilkan matriks simetris (0,1) dengan diagonal nol, maka akan diperoleh realisasi hasil kali matriks ketetanggaan dalam bentuk graf.

Berdasarkan konsep perkalian matriks, beberapa hasil perkalian matriks pada graf sangat mungkin tidak memenuhi syarat untuk mempunyai realisasi dalam bentuk graf, salah satunya ketika terdapat entri hasil kali matriks yang bernilai selain nol atau satu. Prasad, *et.al.* [3] melanjutkan penelitiannya dengan memperkenalkan tentang hasil kali matriks (*mod 2*) pada graf dan memberikan sifat-sifat hasil kali matriks (*mod 2*) yang grafikal. Oleh karena masing-masing graf mempunyai karakteristik yang berbeda-beda, sifat-sifat khusus yang lebih spesifik dapat diperoleh juga terkait hasil kali matriks (*mod 2*). Penelitian pada graf yang lebih khusus, dilakukan oleh John dan Jency [4]-[5] tentang hasil kali matriks (*mod 2*) pada graf *cycle* dan graf Petersen yang masing-masing merupakan graf regular (graf dengan simpul-simpulnya berderajat sama). Pengembagan lainnya dilakukan oleh Bhat, *et.al.* [6] yang menurunkan konsep baru yaitu hasil kali matriks $A(G)B(G)$ yang grafikal, dengan $B(G)$ merupakan matriks insidensi (0,1) dari graf G. Kemudian, sifat komutatif hasil kali matriks yang grafikal antara graf dan komplemennya yang diperumum dibahas oleh Bhat dan Sudhakara [7] dan penelitiannya dilanjutkan pada [8], membahas tentang sifat komutatif berdasarkan partisi himpunan simpul graf yang memenuhi sifat-sifat *perfect matching*.

Penelitian terkait hasil kali matriks (*mod 2*) untuk graf tak regular masih terbuka untuk dikaji. Dalam artikel ini dibahas tentang hasil kali matriks *(mod 2)* pada graf tak regular khususnya graf roda yang merupakan pengembangan dari hasil penelitian Saputri, *et.al.* [9] tentang perkalian matriks pada graf roda. Hasil kali matriks (*mod 2*) yang dibahas dikaitkan dengan komplemen dan subgrafnya. Selain itu, dibahas pula hasil kali matriks (*mod 2*) pada graf pertemanan dan graf bunga yang masih merupakan keluarga graf roda.

2. Dasar Teori

Seperti yang telah dipaparkan, untuk memperoleh hasil kali matriks, terlebih dahulu perlu diketahui matriks ketetanggaan dari graf yang diberikan. Untuk itu, diberikan definisi matriks ketetanggaan sebagai berikut.

Definisi 1. [2] Misalkan $G = (V, E)$ graf sederhana dan tak berarah dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. Matriks ketetanggaan dari G dinyatakan dengan $A(G) = (a_{ij})$ adalah matriks berukuran $n \times n$ dengan $a_{ij} = 1$ jika simpul v_i dan v_j bertetangga, selain itu $a_{ij} = 0$; $1 \leq i, j \leq n$.

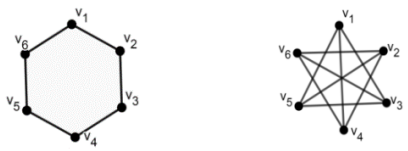
Jika terdapat sisi (u, v) untuk simpul $u, v \in G$, simpul u dan v dikatakan bertetangga dan dinotasikan dengan $u \sim_G v$. Berdasarkan Definisi 1 dapat diketahui bahwa pada suatu graf tak berarah G, jika simpul v_i bertetangga dengan simpul v_j, maka simpul v_j bertetangga dengan simpul v_i, sehingga pada matriks ketetanggaannya $A(G) = (a_{ij})$ entri a_{ij} bernilai sama dengan entri a_{ji}. Oleh karena itu, $A(G)$ merupakan matriks simetris. Simpul-simpul yang saling bertetangga pada graf G akan menentukan derajat dari simpul tersebut, yang pada artikel ini dinotasikan $deg_G v$, $v \in G$. Derajat suatu simpul $v \in G$ merupakan banyak sisi yang bersisian dengan simpul v [10].

Hasil kali matriks ketetanggaan dapat merupakan matriks ketetanggaann dari suatu graf tertentu jika matriks tersebut grafikal. Konsep matriks yang grafikal diberikan pada Definisi 2 dan pada Definisi 3 terkait hasil kali matriks (*mod* 2).

Definisi 2. [2] Matriks grafikal adalah matriks simetris (0,1) dengan diagonalnya mempunyai entri yang semuanya nol. Untuk suatu graf G dan matriks grafikal B dengan $B = A(G)$, maka G disebut realisasi dari B.

Definisi 3. [3] Graf Ψ merupakan hasil kali matriks (*mod* 2) dari graf G dan H apabila $A(G)A(H)$ (*mod* 2) adalah grafikal dan graf Ψ adalah realisasi dari $A(G)A(H)$ (*mod* 2).

Contoh 1. Diberikan graf G dan graf H seperti pada Gambar 1.



(a) (b)

Gambar 1. (a) Graf G dan (b) Graf H

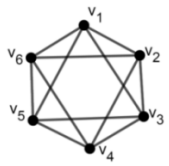
Matriks ketetanggaan dari G dan H berdasarkan Definisi 1 adalah,

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } A(H) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan $A(G)$ dan $A(H)$ diperoleh $A(\Psi)$ yaitu hasi kali (*mod* 2) dari $A(G)$ dan $A(H)$,

$$A(\Psi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan Definisi 2 dan Definisi 3, matriks $A(\Psi)$ grafikal, dan realisasi graf Ψ seperti pada Gambar 2.



Gambar 2. Graf Ψ

Selanjutnya, konsep hasil kali matriks (*mod* 2) diterapkan untuk graf roda sebagai pengembangan dari hasil penelitian Saputri, *et.al* [9] dan dibahas pula untuk graf pertemanan (F_n) yang dapat dipandang sebagai subgraf dari (W_{2n}) serta graf bunga (Fl_n) yang merupakan graf yang dibentuk dari graf helm. Untuk itu terlebih dahulu diberikan Teorema 1 yang merupakan salah satu karakteristik hasil kali (*mod* 2) pada suatu graf G dan komplemennya yang telah dibahas oleh Prasad, *et.al* [3] (untuk bukti Teorema 1 dapat dilihat di [3]).

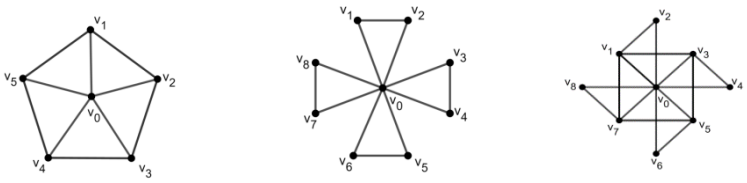
Teorema 1. [3] Diberikan graf G dengan $\overline{G}$ adalah komplemennya serta memiliki himpunan simpul yang sama yaitu $\{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$. Pernyataan berikut ekuivalen:

a. $A(G)A(\overline{G})(mod\ 2)$ grafikal
b. Untuk setiap k dan l, $0 \leq k, l \leq n, deg_G v_k - deg_G v_l \equiv 0\ (mod\ 2)$

3. Hasil dan Pembahasan

Sebelum membahas hasil kali matriks (*mod* 2) pada graf roda, graf pertemanan dan graf bunga, diberikan definisi graf *cycle*, graf bintang dan masing-masing graf tersebut. Graf *cycle* merupakan graf sederhana yang simpul-simpulnya berderajat dua. Graf *cycle* dengan n simpul dilambangkan dengan C_n [11]. Graf Roda (W_n) merupakan graf yang diperoleh dengan menambahkan satu simpul baru pada graf *cycle* sehingga masing-masing simpul pada graf *cycle* bertetangga dengan simpul baru tersebut [12]. Graf roda mempunyai himpunan simpul $V(W_n) = \{v_l | l = 0,1,2, \dots, n\}$ dan himpunan sisi $E(W_n) = \{(v_0, v_l), (v_1, v_n) | l = 1,2, \dots, n\} \cup \{(v_l, v_{l+1}) | l = 1,2, \dots, n-1\}$ dengan v_0 merupakan simpul pusat graf roda. Salah satu subgraf dari graf roda adalah graf bintang (S_n) yang merupakan graf sederhana dengan 1 simpul berderajat n dan n simpul anting-anting (berderajat 1). Graf pertemanan dinotasikan F_n adalah graf yang memiliki n salinan graf C_3 yang bertemu di satu simpul pusat [13]. Graf pertemanan mempunyai $2n + 1$ simpul dan merupakan subgraf dari W_{2n}. Graf pertemanan mempunyai himpunan simpul $V(F_n) = \{v_l | l = 0,1,2, \dots, 2n\}$ dan himpunan sisi $E(Fl_n) = \{(v_0, v_l) | l = 1,2, \dots, 2n\} \cup \{(v_{2l-1}, v_{2l}) | l = 1,2, \dots, n\}$. Dari graf roda, dapat dibentuk pula graf helm (H_n) yaitu graf yang diperoleh dari graf roda dengan menambahkan sisi

anting-anting pada masing-masing simpul di*cycle* luar [14]. Sedangkan graf bunga (Fl_n) merupakan graf yang diperoleh dari graf helm dengan menghubungkan setiap simpul anting-anting ke simpul pusat dari graf helm [14]. Graf bunga mempunyai himpunan simpul $V(Fl_n) = \{v_l | l = 0,1,2,\dots,2n\}$ dan himpunan sisi $E(Fl_n) = \{(v_0, v_l), (v_1, v_{2n-1}) | l = 1,2,\dots,2n\} \cup \{(v_{2l-1}, v_{2l}), (v_{2l-1}, v_{2l+1}) |\ l = 1,2,\dots,n\}$. Ilustrasi graf roda, graf pertemanan dan graf bunga dapat dilihat pada Gambar 3.



(a) (b) (c)

Gambar 3. (a) Graf W_4, (b) Graf F_4, (c) Graf Fl_4

Berdasarkan Definisi 1, $A(W_n)$ merupakan matriks berukuran $(n+1) \times (n+1)$. Sedangan $A(F_n)$dan $A(Fl_n)$merupakan matriks berukuran $(2n+1) \times (2n+1)$. Selanjutnya, berdasarkan Definisi 2 dan Definisi 3, maka hasil kali $A(W_n)A(W_n)(mod\ 2)$ tidak grafikal, hal ini karena matriks ketetanggaan merupakan matriks simetris dan titik-titik selain titik pusat pada graf roda mempunyai derajat 3. Akibatnya, terdapat elemen diagonal utama pada matriks hasil kali tersebut yang tidak nol setelah dimodulokan 2. Terkait perkalian matriks (*mod 2*) pada graf roda dan komplemennya, diberikan pada Teorema 2.

Teorema 2. Diberikan graf roda W_n dengan $\overline{W_n}$ adalah komplemennya.

a. $A(W_n)A(\overline{W_n})(mod\ 2)$ tidak grafikal untuk $n = 2k$ dengan $k \in \mathbb{N}$ dan $k \geq 2$.

b. $A(W_n)A(\overline{W_n})(mod\ 2)$ grafikal untuk $n = 2k+1$ dan $k \in \mathbb{N}$.

Bukti:

a. Diberikan graf W_n dan $\overline{W_n}$ dengan $n = 2k$. Graf W_n dan $\overline{W_n}$ memiliki himpunan simpul yang sama yaitu $\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dengan v_0 adalah simpul pusat. Akibatnya matriks ketetanggaan dari W_n, $A(W_n) = (a_{ij})$ dengan $a_{1j} = a_{i1} = 1,\ 2 \leq i,j \leq n+1$ dan $a_{11} = 0$, sedangkan untuk a_{ij} dengan $2 \leq i,j \leq n+1$ adalah,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i \pm 1, j = i \pm (n-1) \\ 0, & lainnya. \end{cases}$$

Matriks ketetanggaan dari $\overline{W_n}$, $A(\overline{W_n}) = (a'_{ij})$ dengan $a'_{1j} = a'_{i1} = 0$, untuk $1 \leq i,j \leq n+1$ dan untuk a'_{ij} dengan $2 \leq i,j \leq n+1$ adalah,

$$a'_{ij} = \begin{cases} 0, & j = i, j = i \pm 1\ dan\ j = i \pm (n-1) \\ 1, & lainnya. \end{cases}$$

Dari $A(W_n)$ dan $A(\overline{W_n})$ diperoleh $A(W_n)A(\overline{W_n}) = (c_{ij})$ dengan entri-entriya c_{1j} untuk $2 \leq j \leq n+1$ adalah $deg_{\overline{W_n}} v_l \not\equiv 0 \ (mod\ 2)$. Sedangkan c_{i1} adalah 0, oleh karena itu, $A(W_n)A(\overline{W_n})$ dengan $n = 2k$ tidak grafikal.

b. Diberikan graf W_n dan $\overline{W_n}$ dengan $n = 2k+1$. Untuk $n = 3$, $\overline{W_n}$ merupakan graf *null*. Oleh karena itu, diperoleh $A(\overline{W_3})$ merupakan matriks yang semua entrinya adalah nol. Akibatnya, semua entri pada $A(W_3)A(\overline{W_3})(mod\ 2)$ adalah nol (grafikal). Untuk $n > 4$ dengan $n = 2k+1$, W_n dan $\overline{W_n}$ memiliki himpunan simpul yang sama yaitu $\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dengan v_0 adalah simpul pusat. Berdasarkan definisi graf roda W_n, diperoleh $deg_{W_n} v_0 = n = 2k+1$ dan $deg_{W_n} v_l = 3$ untuk $1 \leq l \leq n$. Akibatnya, untuk setiap i dan j, $0 \leq i, j \leq n$, $deg_{W_n} v_i - deg_{W_n} v_j \equiv 0 \ (mod\ 2)$. Berdasarkan Teorema 1, $A(W_n)A(\overline{W_n})(mod\ 2)$ grafikal. ■

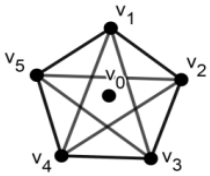
Contoh 2. Diberikan graf roda W_5 dan kompelmennya $\overline{W_5}$ seperti pada Gambar 4.

Gambar 4. (a) Graf W_5 dan (b) Graf $\overline{W_5}$

Dari Gambar 4, diperoleh matriks ketetanggaan $A(W_5)$ dan $A(\overline{W_5})$ sehingga $A(\Psi) = A(W_5)A(\overline{W_5})(mod\ 2)$ adalah,

$$A(\Psi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan Definisi 3, $A(\Psi)$ merupakan matriks yang grafikal, sehingga terdapat graf Ψ merupakan realisasi dari $A(\Psi)$ seperti pada Gambar 5.



Gambar 5. Graf Ψ

Untuk selanjutnya, pembahasan berfokus pada hasil perkalian matriks $(mod\ 2)$ terkait graf roda yang grafikal.

Teorema 3. Jika diberikan graf roda W_n dan G_0 adalah subgrafnya dengan $deg_{G_0} v_0 = 0, deg_{G_0} v_l = deg_{W_n} v_l$, untuk $1 \leq l \leq n$, maka $A(W_n)A(G_0)(mod\ 2)$ grafikal.

Bukti. Misalkan W_n merupakan graf roda, $A(W_n) = (a_{ij})$ sama seperti pada bukti Teorema 2 (a) dan G_0 adalah subgraf dari W_n dengan$deg_{G_0} v_0 = 0, deg_{G_0} v_l = deg_{W_n} v_l$, untuk $1 \leq l \leq n$sehingga $A(G_0) = (d_{ij})$ dengan entri-entrinya $d_{1j} = d_{i1} = 0$ untuk $1 \leq i, j \leq n+1$, dan $d_{ij} = a_{ij}$ untuk $2 \leq i, j \leq n+1$. Berdasarkan a_{ij} dan d_{ij} diperoleh $A(W_n)A(G_0)(mod\ 2) = (w_{ij})$. Hasil $A(W_n)A(G_0)(mod\ 2)$ untuk $n = 3,4$ merupakan matriks *null* (grafikal). Sedangkan untuk $n \geq 5$, diperoleh entri-entri $w_{1j} = deg_{G_0} v_l = 2 \equiv 0\ (mod\ 2), l = j-1$ dan $w_{i1} = 0$ untuk $2 \leq i, j \leq n+1$. Untuk w_{ij} dengan $2 \leq i, j \leq n+1$ adalah,

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i \pm 2\ dan\ j = i \pm (n-2) \\ 0, & lainnya. \end{cases}$$

Dari w_{ij} diperoleh bahwa entri diagonal pada $A(W_n)A(G_0)(mod\ 2)$ adalah 0 dan $A(W_n)A(G_0)(mod\ 2)$ merupakan matriks simetris (0,1). Oleh karena itu, $A(W_n)A(G_0)(mod\ 2)$ grafikal. ■

Contoh 3. Diberikan graf W_3 dan G_0 seperti pada Gambar 6.

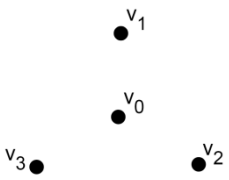
(a) (b)

Gambar 6. (a) Graf W_3 dan (b) Graf G_0

Dari Gambar 6, hasil kali matriks ketetanggaan untuk graf W_3 dan G_0 adalah $A(\Psi) = A(W_3)A(G_0)(mod\ 2)$ sebagai berikut.

$$A(\Psi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks $A(\Psi)$ adalah matriks grafikal. Oleh karena itu, $A(W_3)A(G_0)(mod\ 2)$ dapat direalisasikan dalam bentuk graf seperti pada Gambar 7.



Gambar 7. Graf Ψ

Selanjutnya, ditinjau hasil kali matriks $(mod\ 2)$ dari komplemen graf roda dengan beberapa subgraf yang diperoleh dari graf roda. Untuk lebih jelasnya, dibahas pada Teorema 4 dan Teorema 5.

Teorema 4. Diberikan komplemen graf roda $(\overline{W_n})$ dan graf bintang S_n. Jika $n = 2k + 1$ dan $k \in \mathbb{N}$ maka $A(\overline{W_n})A(S_n)(mod\ 2)$ grafikal.

Bukti. Diberikan W_n merupakan graf roda dan $\overline{W_n}$ komplemen dari W_n. Seperti pada bukti Teorema 2 (a), $A(\overline{W_n}) = (a'_{ij})$ dan graf bintang S_n (dapat dipandang sebagai subgraf W_n), dengan $A(S_n) = (s_{ij})$ dengan $s_{1j} = s_{i1} = 1, 2 \leq i, j \leq n + 1$ dan $s_{ij} = 0$ untuk i, j lainnya. Berdasarkan a'_{ij} dan s_{ij} diperoleh $A(\overline{W_n})A(S_n)(mod\ 2) = (f_{ij})$. Oleh karena $\overline{W_3}$ merupakan graf *null*, $A(\overline{W_3})A(S_3)(mod\ 2)$merupakan matriks *null* (grafikal). Sedangkan untuk $n \geq 4$, entri-entri f_{ij} adalah $f_{i1} = deg_{\overline{W_n}} v_l$, untuk $2 \leq i \leq n + 1$, $l = i - 1$ dan $f_{ij} = 0$ untuk i, j lainnya. Oleh karena $f_{i1} = deg_{\overline{W_n}} v_l$, maka agar $A(\overline{W_n})A(S_n)(mod\ 2)$ grafikal haruslah $deg_{\overline{W_n}} v_l \equiv 0\ (mod\ 2)$, yang dipenuhi ketika $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$. ■

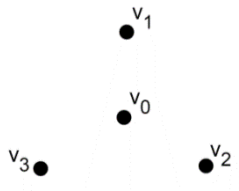
Contoh 4. Diberikan graf $\overline{W_3}$ dan graf S_3 seperti pada Gambar 8.

Gambar 8. (a) graf $\overline{W_3}$ dan (b) Graf S_3

Dari Gambar 8, dapat diperoleh matriks ketetanggaan $A(\overline{W_3})$ dan $A(S_3)$ sehingga $A(\Psi) = A(\overline{W_3})A(S_3)(mod\ 2)$ sebagai berikut.

$$A(\Psi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan $A(\Psi)$ dapat diketahui bahwa $A(\overline{W_3})A(S_3)(mod\ 2)$ yang grafikal. Oleh karena itu, terdapat realisasi untuk $A(\overline{W_3})A(G)(mod\ 2)$ sebagai berikut.



Gambar 9. Graf Ψ

Teorema. 5 Jika G_0 adalah subgraf dari W_n dengan $deg_{G_0}v_0 = 0, deg_{G_0}v_l = deg_{W_n}v_l$, untuk $1 \leq l \leq n$, maka $A(\overline{W_n})A(G_0)(mod\ 2)$ grafikal.

Bukti. Diberikan W_n merupakan graf roda dan $\overline{W_n}$ komplemen dari W_n. Seperti pada bukti Teorema 2 (a), $A(\overline{W_n}) = (a'_{ij})$ dan graf G_0 dengan $A(G_0) = (d_{ij})$ seperti pada Teorema 3. Oleh karena itu diperoleh entri-entri pada $A(\overline{W_n})A(G_0)(mod\ 2)$ sama dengan entri-entri pada $A(\overline{W_n})A(W_n)(mod\ 2)$ (kecuali pada kolom pertama untuk n genap). Selanjutnya, berdasarkan Teorema 2, untuk n ganjil, $A(W_n)A(\overline{W_n})(mod\ 2)$ grafikal, yang berarti $A(\overline{W_n})A(W_n)(mod\ 2)$ grafikal. Oleh karena $a'_{i1} = a'_{1j} = d_{i1} = d_{1j} = 0, 1 \leq i, j \leq n+1$, berakibat semua entri pada kolom pertama dan baris pertama dari $A(\overline{W_n})A(G_0)(mod\ 2)$ adalah nol. Jadi, untuk $n$genap, $A(\overline{W_n})A(G_0)(mod\ 2)$ grafikal. Oleh karena itu, $A(\overline{W_n})A(G_0)(mod\ 2)$ grafikal untuk semua $n \geq 3$. ■

Contoh 5. Diberikan graf $\overline{W_4}$ dam graf G_0 seperti pada Gambar 10.

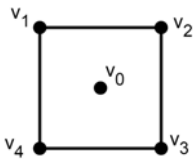
(a) (b)

Gambar 10. (a) Graf $\overline{W_4}$dan (b) Graf G_0

Dari Gambar 10, diperoleh matriks ketetanggaan $A(\overline{W_4})$ dan $A(G_0)$ sehingga $A(\Psi) = A(\overline{W_4})A(G_0)(mod\ 2)$ adalah,

$$A(\Psi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan $A(\Psi)$, $A(\overline{W_4})A(G)(mod\ 2)$ grafikal. Oleh karena itu terdapat realisasi Ψ untuk $A(\overline{W_4})A(G)(mod\ 2)$ seperti pada Gambar 11.



Gambar 11. Graf Ψ

Pada pembahasan selanjutnya, diberikan salah satu karakteristik hasil kali matriks $(mod\ 2)$ yang grafikal dan dinyatakan pada Teorema 6. Selain itu, dibahas pula sifat-sifat hasil kali matriks$(mod\ 2)$ yang grafikal pada graf pertemanan (F_n) dan graf bunga (Fl_n).

Teorema 6. Misalkan G graf sederhana dengan $V(G) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Hasil kali $A(G)A(G)(mod\ 2)$ grafikal jika dan hanya jika $deg_G v_l \equiv 0\ (mod\ 2), 0 \leq\ l \leq n$.

Bukti. Misalkan untuk graf sederhana G dengan $V(G) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $A(G)A(G)(mod\ 2)$ grafikal. Artinya, jika $A(G)A(G)(mod\ 2) = (g_{ij}), 1 \leq\ i, j \leq n + 1$, nilai $g_{ii} \equiv 0\ (mod\ 2)$. Disisi lain, $g_{ii} = deg_G v_l$, $l = i - 1$. Oleh karena itu, $deg_G v_l \equiv 0\ (mod\ 2), 0 \leq\ l \leq n$. Sebaliknya, karena $A(G)$ matriks simetris, maka $A(G)A(G)(mod\ 2)$ matriks simetris (0,1). Akibatnya, jika $deg_G v_l \equiv 0\ (mod\ 2), 0 \leq\ l \leq n$ maka $g_{ii} \equiv 0\ (mod\ 2)$ yang berarti $A(G)A(G)(mod\ 2)$ grafikal.

Teorema 7. Misalkan F_n merupakan graf pertemanan dengan $2n + 1$ simpul dan G_1 adalah subgraf dari $F_n$dengan $deg_{G_1} v_0 = 0, deg_{G_1} v_l = deg_{F_n} v_l$, untuk $1 \leq l \leq 2n$.

a. $A(F_n)A(F_n)(mod\ 2)$ grafikal.
b. $A(F_n)A(\overline{F_n})(mod\ 2)$ grafikal.
c. $A(\overline{F_n})A(S_{2n})(mod\ 2)$ grafikal
d. $A(\overline{F_n})A(G_1)(mod\ 2)$ grafikal

Bukti:

a. Berdasarkan definisi graf pertemanan F_n dengan $V(F_n) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{2n}\}$, diperoleh $deg_{F_n} v_0 = 2n$ dan $deg_{F_n} v_l = 2, 1 \leq\ l \leq 2n$, yang berarti simpul-simpul pada F_n mempunyai derajat genap. Akibatnya, berdasarkan Teorema 6, $A(F_n)A(F_n)(mod\ 2)$ grafikal.
b. Berdasarkan bukti pada Teorema 7 (a), simpul-simpul pada F_n mempunyai derajat genap. Dengan demikian, untuk setiap k dan l, $0 \leq k, l \leq 2n$, $deg_{F_n} v_k - deg_{F_n} v_l \equiv 0\ (mod\ 2)$. Akibatnya, menurut Teorema 1, $A(F_n)A(\overline{F_n})(mod\ 2)$ grafikal.
c. Diberikan graf pertemanan F_n dengan $\overline{F_n}$ merupakan komplemennya, serta graf bintang S_{2n}. Berdasarkan $\overline{F_n}$ diperoleh $A(\overline{F_n}) = (h_{ij})$ dengan $h_{1j} = h_{i1} = 0$ untuk $1 \leq i, j \leq 2n + 1$ dan graf bintang S_{2n} dengan $A(S_{2n}) = (s_{ij})$ seperti pada Teorema 5 untuk $1 \leq i, j \leq 2n + 1$. Berdasarkan h_{ij} dan s_{ij} diperoleh $A(\overline{F_n})A(S_{2n})(mod\ 2) =$

(m_{ij}). Akibatnya, entri-entri m_{ij} adalah $m_{i1} = deg_{\overline{F_n}} v_l$, untuk $2 \leq i \leq 2n+1$, $l = i-1$ dan $m_{ij} = 0$ untuk i, j lainnya. Oleh karena $deg_{\overline{F_n}} v_l \equiv 0 \ (mod\ 2)$, maka $A(\overline{F_n})A(S_{2n})(mod\ 2)$ grafikal.

d. Diberikan graf bunga F_n dengan $\overline{F_n}$ merupakan komplemennya, serta graf G_1. Berdasarkan Teorema 7 (b) dan karena G_1 subgraf $F_n$dengan $deg_{G_1} v_0 = 0, deg_{G_1} v_l = deg_{F_n} v_l$, untuk $1 \leq l \leq 2n$,akibatnya, entri $A(G_1) = (p_{ij})$ adalah $p_{1j} = p_{i1} = 0, 1 \leq i, j \leq 2n+1$ dan entri lainnya sama dengan entri matriks $A(Fl_n)$. Oleh karena itu diperoleh entri-entri pada $A(\overline{F_n})A(G_1)(mod\ 2)$ sama dengan entri-entri pada $A(\overline{F_n})A(F_n)(mod\ 2)$ dengan $A(\overline{F_n})A(F_n)(mod\ 2)$ grafikal. Jadi, $A(\overline{F_n})A(G_1)(mod\ 2)$ grafikal. ■

Teorema 8 Misalkan Fl_n merupakan graf bunga dengan $2n+1$ simpul dan G_2 adalah subgraf Fl_n dengan $deg_{G_2} v_0 = 0, deg_{G_2} v_l = deg_{Fl_n} v_l$, untuk $1 \leq l \leq 2n$.

a. $A(Fl_n)A(Fl_n)(mod\ 2)$ grafikal.
b. $A(Fl_n)A(\overline{Fl_n})(mod\ 2)$ grafikal.
c. $A(\overline{Fl_n})A(S_{2n})(mod\ 2)$ grafikal
d. $A(\overline{Fl_n})A(G_2)(mod\ 2)$ grafikal

Bukti:

a. Berdasarkan definisi graf bunga Fl_n dengan $V(Fl_n) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{2n}\}$, diperoleh $deg_{Fl_n} v_0 = 2n$, $deg_{F_{ln}} v_l = 4, l$ ganjildan $deg_{Fl_n} v_l = 2, l$ genap, $l \neq 0$, yang berarti simpul-simpul pada Fl_n mempunyai derajat genap. Akibatnya, berdasarkan Teorema 6, $A(Fl_n)A(Fl_n)(mod\ 2)$ grafikal.
b. Berdasarkan bukti pada Teorema 8 (a), simpul-simpul pada Fl_n mempunyai derajat genap. Dengan demikian, untuk setiap k dan l, $0 \leq k, l \leq 2n$, $deg_{Fl_n} v_k - deg_{Fl_n} v_l \equiv 0 \ (mod\ 2)$. Akibatnya, menurut Teorema 1, $A(Fl_n)A(\overline{Fl_n})(mod\ 2)$ grafikal.
c. Diberikan graf bunga Fl_n dengan $\overline{Fl_n}$ merupakan komplemennya, serta graf bintang S_{2n}. Berdasarkan $\overline{Fl_n}$ diperoleh, $A(\overline{F_{ln}}) = (h'_{ij})$ dengan $h'_{1j} = h'_{i1} = 0, 1 \leq i, j \leq 2n+1$ dan graf bintang S_{2n} dengan $A(S_{2n}) = (s_{ij})$ seperti pada Teorema 5 untuk $1 \leq i, j \leq 2n+1$. Berdasarkan h'_{ij} dan s_{ij} diperoleh $A(\overline{Fl_n})A(S_{2n})(mod\ 2) = (n_{ij})$. Akibatnya, entri-entri n_{ij} adalah $n_{i1} = deg_{\overline{Fl_n}} v_l$, untuk $2 \leq i \leq 2n+1$, $l = i-1$ dan $n_{ij} = 0$ untuk i, j lainnya. Oleh karena $deg_{\overline{Fl_n}} v_l \equiv 0 \ (mod\ 2)$, maka $A(\overline{Fl_n})A(S_{2n})(mod\ 2)$ grafikal.
d. Diberikan graf bunga Fl_n dengan $\overline{Fl_n}$ merupakan komplemennya, serta graf G_2. Berdasarkan Teorema 8 (b) dan karena G_2 subgraf Fl_n dengan $deg_{G_2} v_0 = 0, deg_{G_2} v_l = deg_{Fl_n} v_l$, untuk $1 \leq l \leq 2n$. Akibatnya, entri $A(G_2) = (g'_{ij})$ adalah $g'_{1j} = g'_{i1} = 0, 1 \leq i, j \leq 2n+1$ dan entri lainnya sama dengan entri matriks $A(Fl_n)$. Oleh karena itu diperoleh entri-entri pada $A(\overline{Fl_n})A(G_2)(mod\ 2)$ sama

dengan entri-entri pada $A(\overline{Fl_n})A(Fl_n)(mod\ 2)$ dengan $A(\overline{Fl_n})A(Fl_n)(mod\ 2)$ grafikal. Jadi, $A(\overline{Fl_n})A(G_2)(mod\ 2)$ grafikal.

4. Kesimpulan

Hasil kali matriks (*mod 2*) pada graf roda, graf pertemanan dan graf bunga yang dibahas pada artikel ini dikaitkan dengan subgraf dan komplemen masing-masing graf tersebut. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh $A(W_n)A(\overline{W_n})(mod\ 2)$ dan $A(\overline{W_n})A(S_n)(mod\ 2)$ grafikal apabila $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$, dengan $\overline{W_n}$ merupakan komplemen graf roda. Selanjutnya diperoleh $A(W_n)A(G_0)(mod\ 2)$ dan $A(\overline{W_n})A(G_0)(mod\ 2)$ grafikal untuk $n \geq 3$ dengan graf G_0 adalah subgraf dari W_n dengan $deg_{G_0}v_0 = 0, deg_{G_0}v_l = deg_{W_n}v_l$, untuk $1 \leq l \leq n$. Selain itu, untuk graf sederhan G, $A(G)A(G)(mod\ 2)$ grafikal jika dan hanya jika simpul-simpulnya G mempunyai derajat genap. Hasil kali matriks (*mod 2*) yang grafikal juga diperoleh untuk graf pertemanan dan graf bunga dengan komplemen dan subgrafnya masing-masing yang berlaku untuk $n \geq 3$.

Berdasarkan hasil observasi untuk beberapa graf dengan simpul-simpulnya ada yang memiliki derajat ganjil dan ada yang genap, kemungkinan untuk hasil kali matriks (*mod 2*) adalah tidak grafikal. Namun demikian diperlukan penelitian lebih lanjut terkait hal ini. Selain itu, untuk penelitian tentang karakteristik-karakteristik graf sehingga diperoleh hasil kali matriks (*mod 2*) yang grafikal masih sangat terbuka. Misalnya, terkait sifat-sifat matriks, graf-graf dengan graf pembangun yang sama, graf pohon dan lain-lain.

Referensi

[1] H.S. Mehta and U.P. Acharya, "Adjacency Matrix of Product Graphs", in *International Conference on Research and Inventions in Science, Engineering & Technology*. vol. 7, 2017, pp. 158-165.

[2] K.M. Prasad, M. Sudhakara, H.S. Sujatha, and M. Vinay. "Matrix Product of Graphs", in *Combinatorial Matrix Theory and Generalized Inverses of Matrices*, R. B. Bapat, S. J. Kirkland, K. M. Prasad, and S. Puntanen, Eds. India: Springer India, 2013, pp. 41-56, 2013.

[3] K.M. Prasad, M. Sudhakara, H.S. Sujatha, and K.V. Soumnya, "Matrix Product (Modulo 2) of Graphs", *Indian J. Pure Appl. Math.*, vol. 45, no. 6, pp. 851–860, Dec. 2014, doi: 10.1007/s13226-014-0093-4.

[4] B. S. John and S. Jency, "Matrix Product (Modulo-2) Of Cycle Graphs", *International Journal of Mathematics and Statistics Invention*, vol. 4, no. 7, pp. 8-13, sept. 2016.

[5] B. S. John and S. Jency, "Matrix Product (Modulo-2) Of Petersen Graphs", *International Journal of Mathematics Archive*, vol. 7, No. 8, pp. 139-143, 2016.

[6] K. A. Bhat, K. M. Prasad, and G. Sudhakara, "Some Matrix Equestions of Graph", *Advances and Applications in Discrete Mathematics*, vol. 17. No. 1, pp. 29-48, 2018.

[7] K. A. Bhat and G. Sudhakara, "Commuting Graph and Their Generalized Complements", *Malaysian Journal of Mathematical Science*, vol. 12, No.1, pp. 63-84,

2018.

[8] K. A. Bhat and G. Sudhakara, "Commuting and Decomposition of $K_{n_1,n_2,\cdots,n_k}$ through Realization of The Product $A(G)A(G_k^p)$", *Special Issue on Linear Algebra and Its Applications (ICLAA2017), Spec. Matrices*; vol. 6, pp. 343-356, 2018.

[9] N. I. Saputri, M. Kiftiah, and F. Fran, "Perkalian Matriks pada Graf Roda", B*uletin Ilmiah Mat.Stat dan Terapannya (Bimaster)*, vol. 9, No. 2, pp. 337-342, 2020.

[10] R. Munir, *Matematika Diskrit*, Ed ke-3, Bandung: Informatika, 2010.

[11] H. Y. Harsya, I. H. Agustin, and D. Dafik, "Pewarnaan Titik pada Operasi Graf Sikel dengan Graf Lintasan", in *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*, vol. 1, 2014, pp. 11-18.

[12] N. Rahmawati and B. Rahajeng, "Dekomposisi Graf Sikel, Graf Roda, Graf Gir dan Graf Persahabatan", *MATHunesa*, vol. 3, np. 3, pp. 64-71, 2014.

[13] G. B. Mertzios and W. Unger, "The Friendship Problem on Graphs", in *1st International Conference on Relations, Orders and Graphs : Interaction with Computer Science (ROGICS)*, 2008, pp. 152-158.

[14] W. Abidin and Masni, "Pewarnaan Sisi pada Graf yang Berhubungan dengan Sikel", *Jurnal MSA*, vol. 2 No. 1, pp. 69-75, 2014.

This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License. Editorial of JJoM: Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo, Jln. Prof. Dr. Ing. B.J. Habibie, Moutong, Tilongkabila, Kabupaten Bone Bolango, Provinsi Gorontalo 96119, Indonesia.