JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS
Jambura J. Math. Vol. 3, No. 2, pp. 180-186, July 2021
Journal Homepage: http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom
DOI: https://doi.org/10.34312/jjom.v3i2.10653

Ruang Fase Tereduksi Grup Lie Aff (1)

Edi Kurniadi[1*]

[1] Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Padjadjaran
Jl. Raya Bandung Sumedang Km 21 Jatinangor, Sumedang, Jawa Barat 45363, Indonesia

* Penulis Korespondensi. Email: edi.kurniadi@unpad.ac.id

ABSTRAK

Dalam artikel ini dipelajari ruang fase tereduksi dari suatu grup Lie khususnya untuk grup Lie affine $\mathrm{Aff}(1)$ berdimensi 2. Tujuannya adalah untuk mengidentifikasi ruang fase tereduksi dari $\mathrm{Aff}(1)$ melalui orbit *coadjoint* buka di titik tertentu pada ruang dual $\mathfrak{aff}(1)^*$ dari aljabar Lie $\mathfrak{aff}(1)$. Aksi dari grup Lie $\mathrm{Aff}(1)$ pada ruang dual $\mathfrak{aff}(1)^*$ menggunakan representasi *coadjoint*. Hasil yang diperoleh adalah ruang Fase tereduksi $\mathrm{Aff}(1)$ tiada lain adalah orbit *coadjoint*-nya yang buka di ruang dual $\mathfrak{aff}(1)^*$. Selanjutnya, ditunjukkan pula bahwa grup Lie affine $\mathrm{Aff}(1)$ tepat mempunyai dua buah orbit *coadjoint* buka. Hasil yang diperoleh dalam penelitian ini dapat diperluas untuk kasus grup Lie affine $\mathrm{Aff}(n)$ berdimensi $n(n+1)$ dan untuk kasus grup Lie lainnya.

Kata Kunci:
Ruang Fase Tereduksi; Grup Lie Affine; Orbit *Coadjoint*; Representasi *Coadjoint*

ABSTRACT

In this paper, we study a reduced phase space for a Lie group, particularly for the 2-dimensional affine Lie group which is denoted by $\mathrm{Aff}(1)$. *The work aims to identify the reduced phase space for* $\mathrm{Aff}(1)$ *by open coadjoint orbits at certain points in the dual space* $\mathfrak{aff}(1)^*$ *of the Lie algebra* $\mathfrak{aff}(1)$. *The group action of* $\mathrm{Aff}(1)$ *on the dual space* $\mathfrak{aff}(1)^*$ *is considered using coadjoint representation. We obtained that the reduced phase space for the affine Lie group* $\mathrm{Aff}(1)$ *is nothing but its open coadjoint orbits. Furthermore, we show that the affine Lie group* $\mathrm{Aff}(1)$ *exactly has two open coadjoint orbits in* $\mathfrak{aff}(1)^*$. *Our result can be generalized for the* $n(n+1)$ *dimensional affine Lie group* $\mathrm{Aff}(n)$ *and for another Lie group.*

Keywords:
The Reduced Phase Space; Affine Lie Groups; Coadjoint Orbits; Coadjoint Representations

Format Sitasi:

E. Kurniadi, "Ruang Fase Tereduksi Grup Lie Aff (1)," *Jambura J. Math.*, vol. 3, no. 2, pp.180-186, 2021

1. Pendahuluan

Metode orbit memegang peranan penting dalam konstruksi representasi suatu grup Lie [1]. Secara garis besar, metode orbit diterapkan dengan cara menentukan representasi berdimensi 1 dari grup Lie bagian dan kemudian menginduksinya ke kasus representasi grup Lie yang diinginkan. Dimensi aljabar Lie bagian ini merupakan dimensi maksimal yang *subordinate* terhadap suatu titik di orbit *coadjoint*-

e-ISSN: 2656-1344
Received: 3 June 2021 | Accepted: 22 June 2021 | Online: 24 June 2021

nya yaitu codimensinya setengah dari dimensi orbit *coadjoint.* Dalam metode ini, prinsip dasarnya adalah aksi suatu grup Lie G pada suatu ruang dual $\mathfrak{g}^*$ dari aljabar Lie $\mathfrak{g}$ dari G. Dengan kata lain, aksi grup Lie tersebut dapat dinyatakan sebagai pemetaan $\mathrm{Ad}^*(g): \mathfrak{g}^* \ni \Delta \mapsto \mathrm{Ad}^*(g)\Delta \in \mathfrak{g}^*$ untuk setiap $g \in G$. Hubungan antara $\mathfrak{g}$ dengan $\mathfrak{g}^*$ diberikan oleh $\langle \mathrm{Ad}^*(g)\Delta, X\rangle = \langle \Delta, \mathrm{Ad}(g^{-1})X\rangle$, untuk setiap $X \in \mathfrak{g}$. Aksi tersebut dinamakan aksi *coadjoint* dan himpunan semua aksi *coadjoint* tersebut dinamakan orbit *coadjoint*. Khususnya untuk $f \in \mathfrak{g}^*$, orbit *coadjoint* diberikan oleh $\mathrm{Ad}^*(G)f = G.f = \{\mathrm{Ad}^*(g)f \ ; f \in \mathfrak{g}^*\} \subset \mathfrak{g}^*$. Hubungan antara orbit *adjoint* dan *coadjoint* telah diteliti sebelumnya dalam [2].

Karakteristik atau sifat-sifat orbit *coadjoint* sangat menarik untuk dipelajari khususnya sifat-sifat yang berkaitan dengan geometri. Semua orbit *coadjoint* bersifat manifold simplektik dan berdimensi genap. Lebih jauh, orbit *coadjoint* mempunyai struktur simplektik G-invarian kanonik. Artinya, dalam setiap orbit *coadjoint* dapat didefinisikan *differential* 2-*form* yang bersifat G-invarian, *non-degenerate,* dan tutup. Di sisi lain, keterbukaan suatu orbit *coadjoint* berkaitan erat dengan notasi aljabar Lie Frobenius dari grup Lie Frobenius [3]-[5]. Struktur aljabar simetrik kiri dalam [6] juga dapat diselidiki eksistensinya untuk aljabar Lie Frobenius.

Penelitian tentang aksi *coadjoint* telah banyak dilakukan oleh para peneliti sebelumnya seperti orbit *coadjoint* nilpoten dalam *small characteristic* [7], aljabar Lie konstraksi dengan orbit *coadjoint* generik berdimensi dua [8], orbit *coadjoint* untuk *motion groups* dan *coherent state* [9], dan orbit *coadjoint* untuk Lie *groupoids* [10]. Berbeda dengan hasil-hasil sebelumnya, dalam artikel ini dibahas terlebih dahulu ruang fase tereduksi grup Lie khususnya grup Lie affine Aff (1) berdimensi 2 melalui pemetaan momentum dan representasi *coadjoint.* Konstruksi tersebut menunjukkan bahwa ruang kuosien dari peta invers pemetaan momentum dengan stabilizer grupnya pada suatu titik di ruang dual aljabar Lie-nya ternyata orbit *coadjoint* dari grup Lie affine Aff(1).

Lebih jauh, notasi *reduced phase space* atau ruang fase tereduksi diperkenalkan dalam matematika fisika [11]. Misalkan G grup Lie dengan aljabar Lie $\mathfrak{g}$ dan ruang dual $\mathfrak{g}^*$. Selanjutnya, misalkan P manifold simplektik dengan simplektik *form*-nya ω dan $J: P \to \mathfrak{g}^*$ pemetaan momentum. Untuk titik $f \in \mathfrak{g}^*$, diperoleh $J^{-1}(f) = \{x \in P \ ; J(x) = f\}$ yang bersifat invarian. Ruang fase tereduksi diberikan oleh ruang kuosien J^{-1}/G_f dengan G_f adalah stabilizer dari G di titik f. Berkenaan dengan ruang fase tereduksi tersebut, menurut [11] ruang fase tereduksi $J^{-1}(f)/G_f$ tersebut dapat diidentifikasi oleh $G/G_f \simeq G.f = \mathrm{Ad}^*(G)f$ yang tidak lain adalah orbit *coadjoint* di $\mathfrak{g}^*$. Dengan kata lain, menentukan ruang fase tereduksi untuk grup Lie adalah kasus menentukan orbit *coadjoint*-nya pada suatu titik tertentu di $\mathfrak{g}^*$ melalui aksi atau representasi *coadjoint*-nya.

Dalam artikel ini, hasil yang sudah diperoleh dalam [11] yaitu identifikasi ruang fase tereduksi yang diidentifikasi oleh $G/G_f \simeq G.f = \mathrm{Ad}^*(G)f \subseteq \mathfrak{g}^*$, diterapkan untuk kasus grup Lie $G = \mathrm{Aff}(1)$ yaitu grup Lie berdimensi 2. Tujuannya adalah untuk menentukan ruang fase tereduksi grup Lie affine Aff(1) dengan cara mengidentifikasinya melalui perhitungan orbit *coadjoint*-nya. Hal ini menjadi sangat penting karena konstruksi suatu orbit *coadjoint* melalui representasi *coadjoint*-nya ternyata bisa diperoleh juga melalui konstruksi ruang fase tereduksinya. Gagasan perhitungan orbit *coadjoint* ini dapat dikaji lebih jauh khususnya yang berkaitan dengan konstruksi ruang fase tereduksi Aff(1) yang tidak lain adalah orbit *coadjoint*-nya. Penerapan pada grup Lie affine disebabkan karena grup Lie affine ini memberikan banyak kontribusi baik pada cabang matematika atau pada bidang ilmu lainnya ([12], [13], dan [14]). Hal ini menjadi motivasi untuk mempelajari aljabar Lie affine khususnya Aff(1).

Artikel ini ditulis dengan menggunakan sistematika penulisan sebagai berikut: Bagian pertama adalah pendahuluan yang menjelaskan tentang kajian yang sudah dilakukan oleh para peneliti sebelumnya, motivasi dan latar belakang penelitian, dan signifikansi penelitian. Bagian ke dua adalah Metode penelitian yaitu langkah-langkah dalam penelitian ini dan landasan teori yang digunakan dalam membahas hasil utama dalam penelitian ini. Lebih spesifik bahwa metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur atau kajian pustaka. Bagian ke tiga adalah hasil dan pembahasan yaitu membuktikan bahwa ruang fase tereduksi dari grup Lie affine Aff (1) tiada lain orbit *coadjoint* yang buka di ruang dual $\mathfrak{aff}\,(1)^*$ yang merupakan ruang dual vektor dari $\mathfrak{aff}\,(1)$. Masih dalam bagian ini, diberikan juga diskusi untuk penelitian selanjutnya. Hasil yang diperoleh diperluas untuk kasus grup Lie affine Aff (n) berdimensi $n(n+1)$. Masalah yang muncul untuk menentukan ruang fase tereduksi dari Aff (n) adalah formula umum orbit *coadjoint*-nya. Diduga bahwa secara umum Aff(n) mempunyai tepat 2 orbit *coadjoint* sebagi hasil perluasan dari kasus Aff (1) yang telah diperoleh dalam penelitian ini.

2. Metode

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Pertama dipelajari tentang grup Lie Aff (n) khususnya untuk $n = 1$ dan sifat-sifatnya termasuk cara mendapatkan orbit *coadjoint*-nya dan keterbukaannya di $\mathfrak{aff}\,(1)^*$, ke dua dipelajari tentang ruang fase tereduksi yang dapat diidentifikasi oleh orbit *coadjoint*-nya. Selanjutnya, dalam penelitian ini diperoleh ruang fase tereduksi untuk grup Lie Aff (1) adalah orbit *coadjoint*-nya.

Sebelum melangkah dalam pembahasan, berikut ini dibahas tentang landasan teori yang digunakan dalam penelitian ini. Grup Lie affine berdimensi 2 Aff (1), orbit *coadjoint,* ruang fase tereduksi untuk grup Lie.

Definisi 1 [15]. Transformasi di $\mathbb{R}$ yang berbentuk

$$\psi_{a,b}(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \tag{1}$$

disebut dengan transformasi affine. Himpunan yang memuat semua transformasi affine di $\mathbb{R}$ seperti pada persamaan (1) membentuk grup Lie berdimensi dua yang disebut dengan grup Lie affine dan dinotasikan oleh Aff (1).

Perhatikan bahwa grup Lie Aff (1) ini dapat dipandang sebagai grup matriks yang berukuran 2×2 dan sebagai objek geometri di $\mathbb{R}^4$. Dengan kata lain, transformasi $\psi_{a,b}$ dapat dikaitkan dengan matriks 2×2 dalam bentuk

$$\Psi_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Grup Lie Aff (1) ini grup tidak sederhana dan tidak kompak [15]. Selanjutnya, dipandang dari objek geometri, grup Lie Aff (1) ini adalah himpunan bagian dari $\mathbb{R}^4$ yang tidak terbatas atau *unbounded.* Sifat lainnya adalah grup ini tidak abelian karena terdapat $\psi_{1,2}$ dan $\psi_{2,1}$ di Aff (1) tetapi $\psi_{1,2} \circ \psi_{2,1} \neq \psi_{2,1} \circ \psi_{1,2}$, dan grup ini adalah non-unimodular.

Di sisi lain, aljabar Lie dari Aff (1) dinyatakan sebagai $\mathfrak{aff}$ (1), yaitu ruang vektor dari semua matriks berbentuk

$$\tau_{a,b} := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Tentu saja, diperoleh juga $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha X_1 + \beta X_2$. Aljabar Lie dari grup Lie affine Aff(1) ini dinotasikan oleh $\mathfrak{aff}(1) = \mathrm{Span}\{X_1, X_2\}$ dengan bracket Lie-nya diberikan oleh matriks komutator $[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1 = X_2$. Ruang dual dari $\mathfrak{aff}$ (1) dinotasikan oleh $\mathfrak{aff}\,(1)^* = \mathrm{Span}\{X_1^*, X_2^*\}$ yang hubungan ke duanya dapat dinyatakan oleh $\langle X_i^*, X_j \rangle = \delta_{ij}$. Dalam hal ini, ruang dual $\mathfrak{aff}(1)^*$ dapat diidentifikasi oleh matriks berbentuk

$$\Psi_{x,y}^* \coloneqq xX_1^* + yX_2^* = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Yaitu $X_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $X_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Karena Grup Lie Aff (1) dapat dipandang sebagai grup matriks, notasi aksi *coadjoint* juga dapat dinyatakan untuk grup matriks.

Definisi 2[1]. Misalkan G grup matriks dengan aljabar Lie-nya adalah $\mathfrak{g} \subset \mathrm{M}(\mathrm{n}, \mathbb{R})$ di mana $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ ruang vektor matriks $n \times n$. Representasi *adjoint* adalah matriks konjugasi yang dinyatakan oleh

$$\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1}, g \in G, X \in \mathfrak{g}. \tag{5}$$

Dual dari representasi *adjoint* ini adalah representasi *coadjoint* dan dinyatakan oleh $\mathrm{Ad}^*(g) := \mathrm{Ad}(g^{-1})^*$. Jadi, nilai linear fungsional $f \in \mathfrak{g}^*$ oleh representasi *coadjoint* di titik $X \in \mathfrak{g}$ diberikan oleh $\langle \mathrm{Ad}^*(g)f, X \rangle = \langle f, \mathrm{Ad}(g^{-1})X \rangle$. Himpunan semua aksi *codjoint* ini dinamakan orbit *coadjoint*. Selanjutnya, orbit *coadjoint* buka di ruang dual $\mathfrak{g}^*$ jika stabilizer dari $\mathfrak{g}$ trivial. Dengan kata lain

$$\mathfrak{stab}^{\mathfrak{g}}(f) = \{X \in \mathfrak{g} \ ; \langle f, [X, Y] \rangle = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\} = \{0\} \tag{6}$$

dengan $f \in \mathfrak{g}^*$.

3. Hasil dan Pembahasan

Dalam bagian ini dibuktikan bahwa ruang fase tereduksi grup Lie Aff (1) dapat diidentifikasi oleh orbit *coadjoint*-nya. Secara umum telah diperoleh bahwa terdapat dua orbit *coadjoint* dari grup Lie Aff (1) yang tergantung pada titik-titik yang dipilih di $\mathfrak{g}^*$ yang bersifat buka dan hasil ini tidak lain adalah ruang fase tereduksi dari Aff (1). Dengan kata lain, melalui representasi *coadjoint*, grup Lie Aff (1) mempunyai tepat dua orbit *coadjoint* buka di ruang $\mathfrak{aff}(1)^*$. Sebelumnya, diberikan perhitungan orbit *coadjoint* dari Aff (1) sebagai berikut :

Lema 3 [1]. *Orbit coadjoint grup Lie* Aff (1) *dinyatakan dalam bentuk*

1. *Dua orbit coadjoint berdimensi 2*

$$\mathfrak{O}_{\pm X_2^*} = \{xX_1^* + yX_2^* \ ; \pm y > 0\} \tag{7}$$

2. *Titik-titik di bidang atau orbit coadjoint berdimensi nol*

$$\mathfrak{O}_x = \{(x,0) \ ; x \in \mathbb{R}\} \tag{8}$$

Bukti. Untuk menghitung ini, kita gunakan persamaan (5) di atas yaitu dengan menghitung aksi *coadjoint*-nya. Misalkan $\Psi_{a,b} \in \mathrm{Aff}(1)$ dan $\Psi_{x,y}^* \in \mathfrak{aff}(1)^*$, dengan bentuk matriksnya dinyatakan oleh persamaan (2) dan (4) masing-masing. Perhatikan bahwa

$$\mathrm{Ad}^*(\Psi_{a,b}) \colon \mathfrak{aff}(1)^* \ni \Psi_{x,y}^* \mapsto \Psi_{x+a^{-1}by,a^{-1}y}^* \in \mathfrak{aff}(1)^*. \tag{9}$$

Selanjutnya, untuk $y \neq 0$, diperoleh orbit *coadjoint* seperta dinyatakan dalam persamaan (7), yaitu orbit *coadjoint* berdimensi 2. Di sisi lain, untuk $y = 0$, diperoleh orbit *coadjoint* berupa titik-titik di bidang, dalam hal ini orbit *coadjoint*-nya berdimensi nol seperti dinyatakan dalam persamaan (8).■

Lema 4. *Orbit coadjoint berdimensi* 2 *dari* $\mathrm{Aff}(1)$ *seperti dinyatakan dalam persamaan* (7) *buka di* $\mathfrak{aff}(1)^*$ *dan* $\mathrm{Aff}(1)$ *tepat mempunyai* 2 *buah orbit coadjoint yang buka.*

Bukti. Untuk membuktikan pernyataan ini, cukup dihitung untuk kasus $\mathfrak{O}_{X_2^*} = \{xX_1^* + yX_2^* \ ; y > 0\}$ dan sisanya mengikuti cara pembuktian kasus ini. Pilih $f = X_2^* \in \mathfrak{aff}(1)^*$. Dengan menggunakan persamaan (6), dapat dihitung stabilizer $\mathfrak{stab}^{\mathfrak{g}}(f)$ terhadap bracket Lie $[X,Y] = Y$. Karena $X, Y \notin \mathfrak{stab}^{\mathfrak{g}}(f)$ maka $\mathfrak{stab}^{\mathfrak{g}}(f) = \{0\}$. Jadi, $\mathfrak{O}_{X_2^*}$ buka. Cara yang sama bisa digunakan untuk menunjukkan bahwa $\mathfrak{O}_{-X_2^*} = \{xX_1^* + yX_2^* \ ; -y > 0\}$ juga buka di $\mathfrak{aff}(1)^*$. Oleh karena sifat keterbukaan ke dua orbit *coadjoint* tersebut, maka orbit *coadjoint* $\mathfrak{O}$ dari $\mathrm{Aff}(1)$ yang buka di $\mathfrak{aff}(1)^*$ tepat hanya dua yaitu $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_{X_2^*}$ dan $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_{-X_2^*}$. ■

Lema 5. *Ruang fase tereduksi dari grup Lie affine* $G \coloneqq \mathrm{Aff}(1)$ *berdimensi* 2 *dapat diidentifikasi oleh* 2 *buah orbit coadjoint yang buka di ruang dual vektor* $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{aff}(1)^*$ *dari aljabar Lie* $\mathfrak{g} \coloneqq \mathfrak{aff}(1)$. *Dengan kata lain,* $J^{-1}(f)/G_f \simeq G/G_f \simeq G.f = \mathrm{Ad}^*(G)f = \mathfrak{O}_{\pm X_2^*} \subseteq \mathfrak{g}^*$ *dengan* $f = \pm X_2^* \in \mathfrak{aff}(1)^*$.

Bukti. Pembuktian Lema 5 ini mengikuti hasil yang sudah diperoleh pada [11]. Misalkan P manifold simplektik dengan simplektik *form*-nya ω dan $J\colon P \to \mathfrak{g}^*$ pemetaan momentum yaitu pemetaan yang didefinisikan sebagai berikut :

$$J : P \to \mathfrak{g}^* \tag{10}$$

untuk setiap $X \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{d}\hat{J}(X) = i_{X_p}\omega$ dengan $\hat{J}(X)\colon P \ni p \mapsto \hat{J}(X)(p) = J(p).X \in \mathbb{R}$ dengan $i_{X_p}\omega$ adalah turunan interior dan X_p generator *infinetesimal* berkorepondensi dengan X. Misalkan G beraksi secara transitif pada P dengan aksi Hamiltonian, maka peta $J(P)$

adalah orbit *coadjoint* di $\mathfrak{g}^*$. Dalam kasus ini, pemetaan momentum dalam persamaan (10) diberikan untuk $P = \mathrm{T}^*G$. Selanjutnya, $J^{-1}(f_+) = \{p \in P\ ;\ J(p) = f_+\}$ dengan $f_+ = X_2^*$. Dengan menghitung G_{f_+}, diperoleh bahwa $J^{-1}(f_+)/G_{f_+}$ tidak lain adalah orbit *coadjoint* $\mathfrak{O}_{X_2^*}$. Untuk $f_- = -X_2^*$, diperoleh juga bahwa $J^{-1}(f_-)/G_{f_-} \simeq \mathfrak{O}_{-X_2^*}$. ■

Hasil yang diperoleh dapat diperluas untuk mengidentifikasi ruang fase tereduksi grup Lie affine $\mathrm{Aff}(n)$ berdimensi $n(n+1)$. Diduga bahwa $\mathrm{Aff}(n)$ mempunyai tepat dua buah orbit *coadjoint* buka.

4. Kesimpulan

Dalam artikel ini telah dibuktikan bahwa ruang fase tereduksi dari grup Lie affine Aff (1) dapat diidentifikasi oleh orbit *coadjoint* buka di ruang dual vektor $\mathfrak{aff}\,(1)^*$. Selanjutnya, dibuktikan bahwa grup Lie affine Aff (1) tepat mempunyai dua buah orbit *coadjoint* buka dan karena sifat keterbukaan ke dua orbit *coadjoint* tersebut, maka orbit *coadjoint* $\mathfrak{O}$ dari Aff (1) yang buka di $\mathfrak{aff}\,(1)^*$ tepat hanya dua yaitu $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_{X_2^*}$ dan $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_{-X_2^*}$.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Universitas Padjadjaran yang telah mendanai penelitian ini melalui Riset Percepatan Lektor Kepala (RPLK) tahun 2021 dengan Nomor kontrak 1959/UN6.3.1/PT.00/2021.

Referensi

[1] A. A. Kirillov, "Lectures on the Orbit Method, Graduate Studies in Mathematics," *Am. Math. Soc.*, vol. 64, 2004.

[2] P. Arathoon, "A bijection between the adjoint and coadjoint orbit of a semidirect product," *Differ. Geom. Its Appl.*, vol. 62, pp. 267-282, 2019.

[3] M. A. Alvarez and et al, "Contact and Frobenius solvable Lie algebras with abelian nilradical," *Comm. Algebra.*, vol. 46, pp. 4344–4354, 2018.

[4] A. Diatta and B. Manga, "On properties of principal elements of frobenius lie algebras," *J. Lie Theory*, vol. 24, no. 3, pp. 849–864, 2014.

[5] A. Diatta, B. Manga, and A. Mbaye, "On systems of commuting matrices , Frobenius Lie algebras and Gerstenhaber's Theorem," no. February, pp. 0–12, 2020.

[6] D. Burde, "Left-symmetric algebras, or pre-Lie algebras in geometry and physics," *Cent. Eur. J. Math.*, vol. 4, no. 3, pp. 323–357, 2015.

[7] T. Xue, "Nilpotent coadjoint orbits in small characteristic," *J. Algebr.*, vol. 397, pp. 111-140, 2014.

[8] D. Beltita and B. Cahen, "Contractions of Lie algebras with 2-dimensional generic coadjoint orbits," *Linear Algebra Appl.*, vol. 466, pp. 41--63, 2015.

[9] M. Ben Halima, "Coadjoint Orbits of Certain Motion Groups and Their Coherent States," vol. 9251, no. August, 2016.

[10] Lang, Honglei and Z. Liu, "Coadjoint orbits of Lie groupoids," *J. Geom. Phsysics*, vol. 129, pp. 217-232, 2018.

[11] R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of Machanics*, Second Edi. Canada: Addison-wesley Publishing Company, 1978.

[12] Ayala,V, A. Da Silva, and M. Ferreira, "Affine and bilinear systems on Lie groups," *Syst. &Control Lett.*, vol. 117, pp. 23-29, 2018.

[13] J. Souza, "Sufficient conditions for dispersiveness of invariant control affine system on the Heisenberg group," *Syst. &Control Lett.*, vol. 124, pp. 68-74, 2019.
[14] W. Rump, "Affine stucture of decomposable solvable groups," *J. Algebr.*, vol. 556, pp. 725-749, 2020.
[15] J. Stillwell, *Naive Lie Theory*. New York: Springer-Verlag, 2008.