

Sifat Preservasi Lingkaran dan Garis Pada Transformasi Möbius

Guntur Maulana Muhammad¹, Iden Rainal Ihsan^{2*}, Roni Priyanda³

^{1,2,3}Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Samudra, Jl. Prof. Dr. Syarif Thayeb, Meurandeh, Langsa Lama, Kota Langsa, Indonesia

*Corresponding author. Email: irainalhsan@unsam.ac.id

ABSTRAK

Artikel ini membahas transformasi Möbius dari sudut pandang aljabar untuk membahas salah satu sifat geometrisnya, yakni mempertahankan lingkaran dan garis di bidang kompleks. Sifat preservasi lingkaran dan garis ini secara sederhana dapat diartikan bahwa transformasi Möbius memetakan koleksi lingkaran dan garis (kembali) menjadi koleksi lingkaran dan garis. Secara umum pembahasan diawali dengan penjelasan definisi transformasi Möbius di bidang kompleks. Pembahasan dilanjutkan pada pendefinisian pemetaan dasar dan transformasi affine langsung. Kedua konsep tersebut dipergunakan untuk membuktikan eksistensi sifat preservasi lingkaran dan garis pada transformasi Möbius. Dapat ditunjukkan bahwa transformasi Möbius dapat dinyatakan sebagai komposisi dari transformasi affine langsung dan inversi. Dapat ditunjukkan juga bahwa transformasi affine langsung dan inversi keduanya memiliki sifat preservasi lingkaran dan garis pada bidang kompleks. Dengan demikian dapat diperoleh simpulan pada kajian ini transformasi Möbius memiliki sifat preservasi lingkaran dan garis di bidang kompleks.

Kata Kunci:

Inversi; Transformasi Affine Langsung; Transformasi Möbius

ABSTRACT

This article discuss about Möbius transformation from point view of algebra to describe one of its geometric property, i.e. preserving circles and lines in complex plane. In simple term, this preservation means that Möbius transformation maps a collection of circles and lines (back) into a collection of circles and lines. In general, the discussion begins with an explanation of the definition of the Möbius transformation in the complex plane. The discussion continues on defining the basic mapping and direct affine transformation. These two concepts are used to prove the existence of the preservation properties of circles and lines in the Möbius transformation. It can be shown that the Möbius transformation can be expressed as a composition of the direct affine transform and the inverse. It can also be shown that the direct affine transform and the inverse both have the property of preserving circles and lines in the complex plane. Thus, it can be concluded that in this study the Möbius transformation has the property of preserving circles and lines in the complex plane.

Keywords:

Inversion; Direct Affine Transformation; Möbius Transformation

Format Sitasi:

G. M. Muhammad, I. R. Ihsan and R. Priyanda, "Sifat Preservasi Lingkaran dan Garis Pada Transformasi Möbius", *Jambura J. Math.*, vol. 4, No. 2, pp. 200–208, 2022, doi: <https://doi.org/10.34312/jjom.v4i2.13497>

1. Pendahuluan

Transformasi Möbius merupakan pemetaan dengan domain dan kodomain berupa bidang kompleks yang diperluas (*extended complex plane*). Perhatikan definisi berikut:

Definisi 1. Bidang kompleks yang diperluas (*extended complex plane*) adalah himpunan yang dinyatakan sebagai berikut

$$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \infty.$$

Transformasi Möbius menarik untuk dibahas dan dipelajari, salah satunya karena memiliki sifat-sifat yang memiliki koneksi kuat dengan geometri non-euclid, ilmu terapan, dan fisika [1–6].

Pembahasan mengenai transformasi Möbius dapat dibahas dari beberapa aspek, seperti pembahasan terkait sifat-sifat yang dimiliki. Sebagai contoh, terdapat pembahasan sifat invarian bentuk dan image planar pada transformasi Möbius [7], preservasi bingkai yang meminimalkan rotasi [8]. Ada juga pembahasan pada aspek elemen atau konsep yang merupakan bagian dari transformasi Möbius, seperti titik tetap [9–11]. Lebih jauh lagi sangat dimungkinkan pembahasan dengan tingkatan lanjut sebagaimana konsep fungsi holomorphic [12], transformasi Möbius harmonik [13], dan sifat transitifitas [14].

Terdapat juga beberapa kajian yang berfokus pada karakterisasi dari transformasi Möbius, seperti diantaranya dilakukan oleh Haruki dan Rassias [15, 16] yang membahas mengenai karakteristik transformasi Möbius sebagai pemetaan konformal (preservasi sudut), serta Niamsup [17–19] yang membahas karakteristik transformasi Möbius berdasarkan sifat invariant. Kami tertarik untuk membahas dengan pendekatan yang sama terhadap transformasi Möbius, yakni terkait konstruksi. Pembahasan yang kami tuliskan berupa kajian dari sudut pandang aljabar dan geometri. Hal tersebut didasari pendapat Budhi [20] yang menyampaikan bahwa transformasi geometri merupakan salah satu teknik relevan untuk membuktikan sifat-sifat geometri. Pembahasan inti dari artikel ini adalah transformasi Möbius sebagai *direct affine transformation* dan sifat preservasi lingkaran dan garis. Secara lebih teknis, pembahasan pada artikel ini bertujuan untuk menunjukkan bahwa transformasi Möbius memetakan himpunan semua lingkaran dan garis di bidang kompleks ke himpunan yang sama.

2. Dasar Teori

Terdapat beberapa nama atau istilah berbeda dari transformasi Möbius, seperti *homographic transformations*, *fractional linear transformations*, atau *bilinear transformations* ([21, 22]). Sebagai penghormatan dan dedikasi kepada matematikawan yang pertama kali membahas secara mendalam tentang transformasi ini, yakni *Auguste Ferdinand Möbius* dinamakanlah sbagai transformasi Möbius. Adapun definisi dari transformasi Möbius adalah sebagai berikut.

Definisi 2. [1] Suatu transformasi Möbius $M : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ adalah suatu pemetaan sedemikian sehingga

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (1)$$

dengan $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ dan $ad - bc \neq 0$.

Perhatikan pada koefisien-koefisien pada Definisi 2. Karena $ad - bc \neq 0$, maka tidak jadi

suatu masalah jika setiap koefisien dibagi oleh $\sqrt{ad - bc}$. Misalkan diberikan transformasi (1) sebagaimana yang disajikan pada Definisi 2. Kemudian, dimisalkan pula $\sqrt{ad - bc} = k$, sehingga dapat dikonstruksi bentuk transformasi Möbius dengan bentuk penyajian lain sebagai berikut:

$$\hat{M}(z) = \frac{\frac{a}{k}z + \frac{b}{k}}{\frac{c}{k}z + \frac{d}{k}}. \quad (2)$$

Bentuk $\hat{M}(z)$ pada persamaan (2) merupakan bentuk fungsi ternormalisasi dari bentuk persamaan (1). Perhatikan bahwa

$$\frac{a}{k} \cdot \frac{d}{k} - \frac{b}{k} \cdot \frac{c}{k} = \frac{ad}{k^2} - \frac{bc}{k^2} = \frac{ad - bc}{k^2} = \frac{k^2}{k^2} = 1. \quad (3)$$

Berdasarkan hal tersebut, dapat kita definisikan transformasi Möbius ternormalisasi sebagai berikut:

Definisi 3. Suatu transformasi Möbius $\hat{M} : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ adalah suatu pemetaan sedemikian sehingga

$$\hat{M}(z) = \frac{pz + q}{rz + s} \quad (4)$$

dengan $p, q, r, s \in \mathbb{C}$ dan $ps - qr = 1$. $\hat{M}(z)$ disebut sebagai **transformasi Möbius ternormalisasi**.

Pembahasan berlanjut kepada sifat-sifat geometri yang mendasar pada transformasi Möbius. Terlebih dahulu akan ditinjau konsep pemetaan dasar dan pemetaan *affine* langsung (*direct affine transformation*). Berikut adalah pendefinisian terkait hal-hal tersebut.

Definisi 4. [23] Perhatikan lima pemetaan dasar berikut

1. $z \rightarrow cz; c \in \mathbb{R}$, disebut perkalian skalar (*scaling*);
2. $z \rightarrow z + A, A \in \mathbb{C}$, disebut translasi;
3. $z \rightarrow Az, A = e^{i\theta}$, disebut rotasi;
4. $z \rightarrow \bar{z}$, disebut konjugasi kompleks; dan
5. $z \rightarrow \frac{1}{z}$, disebut inversi

Pemetaan *affine* langsung (*direct affine transformation*) adalah kombinasi dari pemetaan 1. 2. dan 3., yang ditulis sebagai

$$T(z) = Az + B \quad (5)$$

dengan $A, B \in \mathbb{C}$.

3. Hasil dan Pembahasan

Karena pembahasan bertujuan untuk menunjukkan bahwa transformasi Möbius memiliki sifat preservasi lingkaran dan garis, dipandang perlu untuk mendefinisikan bentuk umum persamaan lingkaran di bidang kompleks. Sifat preservasi di sini memiliki pengertian bahwa transformasi Möbius memetakan himpunan semua lingkaran dan garis menjadi himpunan semua lingkaran dan garis juga [21]. Persamaan

lingkaran dapat kita konstruksi dengan menggunakan pendekatan terhadap definisi lingkaran, yakni himpunan semua titik yang berjarak sama terhadap satu titik (titik pusat). Misalkan akan dikonstruksi persamaan lingkaran di bidang kompleks dengan titik pusat $z_0 \in \mathbb{C}$ dan jari-jari $r \in \mathbb{R}$. Dengan demikian persamaan lingkaran tersebut akan berbentuk sebagai berikut

$$|z - z_0| = r \quad (6)$$

dengan $z \in \mathbb{C}$

Perhatikan bahwa apabila kedua ruas pada persamaan (6) dikuadratkan, maka diperoleh

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2 \quad (7)$$

Dengan menjabarkan ruas kiri pada persamaan (7) diperoleh bentuk

$$z\bar{z} - z\bar{z}_0 - \bar{z}z_0 + z_0\bar{z}_0 = r^2 \quad (8)$$

Dalam langkah memperoleh persamaan umum, ruas kanan persamaan (8) dibuat menjadi nol, sehingga diperoleh

$$z\bar{z} - z\bar{z}_0 - \bar{z}z_0 + z_0\bar{z}_0 - r^2 = 0 \quad (9)$$

Selanjutnya dapat dilakukan suatu pengaturan (pemisalan) terhadap z_0 dalam upaya mendapatkan bentuk persamaan garis dalam persamaan lingkaran. Misalkan $z_0 = \frac{B}{A}$ dengan $A \in \mathbb{R} - \{0\}$ dan $B \in \mathbb{C}$, akan dihasilkan persamaan berikut

$$z\bar{z} - z\frac{\bar{B}}{A} - \bar{z}\frac{B}{A} + \frac{B\bar{B}}{A\bar{A}} - r^2 = 0$$

$$z\bar{z} - z\frac{\bar{B}}{A} - \bar{z}\frac{B}{A} + \frac{B\bar{B}}{A\bar{A}} - r^2 = 0 \quad (10)$$

Perhatikan bahwa karena $A \in \mathbb{R} - \{0\}$, maka $\bar{A} = A$. Dengan mengalikan semua suku pada persamaan (10) dengan A akan diperoleh

$$Az\bar{z} - Az\frac{\bar{B}}{A} - \bar{z}\frac{AB}{A} + A\frac{B\bar{B}}{A\bar{A}} - A^2r^2 = 0$$

$$Az\bar{z} - \bar{B}z - B\bar{z} + \frac{|B|^2}{A} - A^2r^2 = 0$$

Misalkan $\frac{|B|^2}{A} - A^2r^2 = C$, karena $A, |B|, r \in \mathbb{R}$ dan $A \neq 0$, maka $C \in \mathbb{R}$. Pemisalan juga berimplikasi pada nilai jari-jari dapat dinyatakan sebagai $r = \frac{1}{|A|} \sqrt{|B|^2 - AC}$ akan kita peroleh persamaan berikut

$$Az\bar{z} + B\bar{z} + \bar{B}z + C = 0 \quad (11)$$

Perhatikan bahwa pada persamaan (11), dapat diketahui $A, C \in \mathbb{R}$ (telah dimisalkan sebelumnya) dan $AC \leq |B|^2$ (Berdasarkan pemisalan jari-jari). Kemudian persamaan (11) akan menjadi persamaan garis lurus di bidang kompleks apabila ditambahkan kasus untuk $A = 0, B \neq 0$ dan $C \in \mathbb{R}$. Dengan demikian persamaan (11), dengan perluasan kasus $A \in \mathbb{R}$, dapat merepresentasikan himpunan semua lingkaran dan garis di bidang kompleks.

Deskripsi pada Definisi 4 sangat konsekuen dengan teorema yang akan dijelaskan selanjutnya. Transformasi *affine* langsung dapat merupakan suatu *scaling*, translasi, atau rotasi. Perhatikan terorema berikut

Teorema 1. Misalkan $T(z) = Az + B$ adalah suatu transformasi *affine* langsung. Hal-hal berikut berlaku

1. T merupakan *scaling* jika $A \in \mathbb{R}$ dan $B \in \mathbb{C} - \{0\}$
2. T merupakan translasi jika $A = 1$ dan $B \in \mathbb{C}$; dan
3. Jika $A \in \mathbb{C}, |A| = 1$, dan $A \neq 1$, maka T adalah rotasi $\frac{B}{1-A}$ dengan sebuah sudut $\arg(A)$.

Bukti. Bagian 1. dan 2. bersama dengan dengan penjelasan mengenai A dan B , sudah sangat jelas terbukti. Pembuktian akan berfokus pada bagian 3. Misalkan $A \in \mathbb{C}, |A| = 1$ dan $A \neq 1$, kemudian dimisalkan pula $F \in \mathbb{C}$ merupakan titik tetap (*fixed point*) bagi T . Sehingga diperoleh $T(F) = F$, yakni $F = AF + B$ yang juga berimplikasi pada diperolehnya $F = \frac{B}{1-A}$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} T(z) - F &= Az + B - \frac{B}{1-A} = \frac{Az - A^2z + B - BA - B}{1-A} \\ &= \frac{Az - A^2z - BA}{1-A} \\ &= \frac{Az(1-A) - BA}{1-A} \end{aligned}$$

Karena $|A| = 1$, maka kita peroleh hasil lanjutan sebagai berikut

$$\begin{aligned} &= \frac{Az(1-A) - B}{1-A} \\ &= A(z - F) \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa T merupakan rotasi terhadap F dengan sudut $\arg(A)$. \square

Penting untuk diperhatikan, bahwa dalam kasus pada Teorema 1 ini $A \in \mathbb{C}$, sehingga memungkinkan $|A| = 1$ dengan $A \neq 1$.

Definisi 4 dan Teorema 1 sangat penting untuk menunjukkan salah satu sifat geometris dari transformasi Möbius. Suatu transformasi Möbius dapat didekomposisikan menjadi transformasi *affine* langsung dan inversi sebagaimana ditunjukkan pada Teorema 2.

Teorema 2. [21] Misalkan M merupakan suatu transformasi Möbius. M dapat dinyatakan sebagai komposisi dari transformasi *affine* langsung dan inversi.

Bukti. Misalkan M adalah transformasi Möbius dengan bentuk seperti dalam persamaan (1). Dengan mengasumsikan $c \neq 0$, bentuk di atas dapat diuraikan sebagai berikut

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) - \frac{ad}{c} + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d} \quad (12)$$

Misalkan $P_1 = cz + d$, berdasarkan Definisi 4 P_1 merupakan bentuk transformasi *affine* langsung. Selanjutnya kita misalkan pula $P_2 = \frac{1}{P_1}$ yang merupakan suatu inversi dan $P_3 = \left(b - \frac{ad}{c}\right) p_2 + ac$. Dari dua pemisalan tersebut diperoleh

$$M = P_3 \circ P_2 \circ P_1 \quad (13)$$

Persamaan (13) menunjukkan bahwa transformasi Möbius dapat dinyatakan sebagai komposisi dari transformasi *affine* langsung dan inversi. \square

Pembahasan selanjutnya adalah tujuan utama pada kajian ini, yakni menyelidiki apakah transformasi Möbius memiliki sifat preservasi lingkaran dan garis atau tidak. Pembuktian eksistensi sifat ini akan memanfaatkan Teorema 1 dan dua teorema yang akan dibahas selanjutnya, yakni preservasi lingkaran dan garis pada transformasi *affine* langsung dan inversi.

Teorema 3. Misalkan T merupakan suatu transformasi *affine* langsung. M memetakan lingkaran dan garis menjadi lingkaran dan garis (preservasi lingkaran dan garis) di bidang kompleks.

Bukti. Berdasarkan Teorema 1 transformasi T dapat merupakan *scaling*, translasi, atau rotasi. Pembahasan akan dibagi ke dalam dua kasus, yakni T sebagai translasi dan T sebagai *scaling* atau rotasi (karena memiliki bentuk fungsi yang sama). Pada kasus T sebagai translasi, misal $T(z) = a + z$, dengan $a \in \mathbb{C}$. Kita dapat memisalkan $T(z) = w$ untuk suatu $w \in \mathbb{C}$. Dengan demikian $w = z + a$. Jika nilai $z = w - a$ disubstitusikan ke dalam persamaan umum lingkaran (persamaan (11)), maka akan dihasilkan

$$\begin{aligned} A(w - a)(\bar{w} - \bar{a}) + B(\bar{w} - \bar{a}) + \bar{B}(w - a) + C &= 0 \\ Aw\bar{w} + (\bar{B} - \bar{a}A)w + (B - aA)\bar{w} + (a\bar{a}A - a\bar{B} + \bar{a}B + C) &= 0 \end{aligned}$$

Dengan mendefinisikan $B' = B - aA$ dan $C' = a\bar{a}A - a\bar{B} + \bar{a}B + C$ sehingga diperoleh

$$Aw\bar{w} + B'\bar{w} + \bar{B}'w + C' = 0 \quad (14)$$

Dengan demikian T sebagai translasi memiliki sifat preservasi lingkaran dan garis. Hal tersebut dikarenakan persamaan (14) merupakan persamaan lingkaran di bidang kompleks, dan ketika $A = 0$ persamaan tersebut merupakan persamaan garis di bidang kompleks ($B', C' \in \mathbb{C}$)

Kasus selanjutnya adalah memisalkan T sebagai *scaling* atau rotasi. Dengan argumetasi yang sama pada kasus pertama. Kita dapat memisalkan $T(z) = az$ dengan $a \in \mathbb{C} - \{0\}$. Kita dapat menyatakan $z = \frac{w}{a}$ untuk suatu $w \in \mathbb{C}$. Dengan cara serupa dengan kasus

pertama, nilai $z = \frac{w}{a}$ disubstitusi ke persamaan (11), akan diperoleh persamaan sebagaimana berikut

$$A \frac{w}{a} \frac{\bar{w}}{a} + B \frac{\bar{w}}{a} + \bar{B} \frac{w}{a} + C = 0$$

$$A \frac{w}{a} \frac{\bar{w}}{\bar{a}} + B \frac{\bar{w}}{\bar{a}} + \bar{B} \frac{w}{a} + C = 0$$

$$A \left| \frac{w}{a} \right| + B \frac{\bar{w}}{a} + \bar{B} \frac{w}{a} + C = 0$$

$$A |z| + B\bar{z} + \bar{B}z + C = 0 \quad (15)$$

Persamaan (15) merupakan persamaan lingkaran di bidang kompleks, dan ketika $A = 0$ merupakan persamaan garis di bidang kompleks. Dari pembuktian kasus pertama dan kedua menunjukkan bahwa *scaling*, translasi, dan rotasi memiliki sifat preservasi lingkaran dan garis di bidang kompleks. \square

Teorema 4. Misalkan T merupakan suatu transformasi inversi. M memetakan lingkaran dan garis menjadi lingkaran dan garis (preservasi lingkaran dan garis) di bidang kompleks.

Bukti. Misalkan $T = \frac{1}{z}$ kemudian $T(z) = w$ untuk suatu $w \in \mathbb{C} - \{0\}$. Dapat kita tuliskan $z = \frac{1}{w} \in \mathbb{C} - \{0\}$. Nilai z tersebut apabila kita substitusi ke persamaan (11), maka kita peroleh

$$A \frac{1}{w} \frac{1}{\bar{w}} + B \frac{1}{\bar{w}} + \bar{B} \frac{1}{w} + C = 0$$

$$A + B\bar{w} + \bar{B}w + Cw\bar{w} = 0$$

$$Cw\bar{w} + B\bar{w} + \bar{B}w + A = 0 \quad (16)$$

Jelas bahwa untuk $C = 0$ persamaan (16) merupakan bentuk persamaan lingkaran, sedangkan untuk $C \neq 0$ garis. Dengan demikian terbukti bahwa inversi memiliki sifat preservasi lingkaran dan garis di bidang kompleks, yakni memetakan himpunan lingkaran dan garis di bidang kompleks ke himpunan yang sama. \square

Pembuktian masalah utama pada artikel ini, yakni sifat preservasi lingkaran dan garis pada transformasi Möbius cukup dibuktikan dengan memanfaatkan Teorema 1, 2, dan 3. Berdasarkan Teorema 2 kita peroleh sifat bahwa transformasi Möbius merupakan komposisi dari transformasi *affine* langsung dan inversi. Kemudian berdasarkan Teorema 2 dan 3 terbukti bahwa transformasi *affine* langsung dan inversi keduanya memiliki sifat preservasi lingkaran dan garis di bidang kompleks. Dengan demikian terbukti bahwa transformasi Möbius memiliki sifat preservasi lingkaran dan garis di bidang kompleks.

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada artikel ini, terdapat dua hal yang diperoleh sebagai simpulan utama pada kajian ini. Pertama, telah ditunjukkan bahwa transformasi Möbius dapat dinyatakan sebagai komposisi dari transformasi *affine* langsung dan inversi. Simpulan kedua merupakan implikasi dari simpulan yang pertama, yakni

karena transformasi *affine* langsung dan inversi memiliki sifat preservasi lingkaran dan garis di bidang kompleks, maka transformasi Möbius juga memiliki sifat yang sama, preservasi lingkaran dan garis di bidang kompleks.

Pada bagian ini, kami juga memiliki saran guna untuk diperolehnya hasil kajian yang lebih lanjut. Dapat dikaji dan diteliti lebih lanjut sifat transformasi Möbius, baik sifat geometris maupun aljabar. Pada ranah geometri, disarankan untuk mengkaji pemanfaatan titik tetap dari transformasi Möbius. Kemudian dari ranah aljabar disarankan untuk mengkaji struktur pada sistem transformasi Möbius yang dilengkapi operasi komposisi.

Referensi

- [1] L. G.-M. Zaragoza, *Möbius Transformations*. University of Seville, 2019.
- [2] M. Chaveroche, F. Davoine, and V. Cherfaoui, "Efficient Möbius Transformations and their applications to D-S Theory," in *13th International Conference on Scalable Uncertainty Management (SUM 2019)*, Compiègne, France, pp. 390–403.
- [3] A. Galda and V. Vinokur, "Linear dynamics of classical spin as Möbius transformation," *Scientific Reports*, vol. 7, no. 1, p. 1168, dec 2017, doi: <http://dx.doi.org/10.1038/s41598-017-01326-x>.
- [4] D. S. Mackey, N. Mackey, C. Mehl, and V. Mehrmann, "Möbius transformations of matrix polynomials," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 470, pp. 120–184, apr 2015, doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2014.05.013>.
- [5] R. Penrose and W. Rindler, *Spinors and Space-Time*. Cambridge University Press, oct 1984, doi: <http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511564048>.
- [6] J. C. Boggino and R. J. Miatello, "No Title Geometría Hiperbólica I. Movimientos rígidos y recetas hiperbólicas," *Rev. Educ. Mat.*, vol. 3, no. 1, 2021.
- [7] S. Marsland and R. I. McLachlan, "Möbius Invariants of Shapes and Images," *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, aug 2016, doi: <http://dx.doi.org/10.3842/SIGMA.2016.080>.
- [8] M. Bartoň, B. Jüttler, and W. Wang, "Construction of Rational Curves with Rational Rotation-Minimizing Frames via Möbius Transformations," in *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 2010, pp. 15–25, doi: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-11620-9_2.
- [9] L. V. Ahlfors, "On the fixed points of Möbius transformations in R^n ," *Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Series A. I. Mathematica*, vol. 10, pp. 15–27, 1985, doi: <http://dx.doi.org/10.5186/aasfm.1985.1005>.
- [10] P. Kaur, "The Fixed Points of Möbius Transformation," *Ijee*, vol. 9, no. 1, pp. 38–42, 2017.
- [11] I. R. Ihsan, "Titik Tetap (Fixed Point) Pada Transformasi Möbius," *Euclid*, vol. 3, no. 1, pp. 485–490, 2016.
- [12] S. Giardino, "Möbius Transformation for Left-Derivative Quaternion Holomorphic Functions," *Advances in Applied Clifford Algebras*, vol. 27, no. 2, pp. 1161–1173, jun 2017, doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s00006-016-0673-y>.
- [13] R. Hernández and M. J. Martín, "On the Harmonic Möbius Transformations," *The Journal of Geometric Analysis*, vol. 32, no. 1, p. 18, jan 2022, doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s12220-021-00809-8>.
- [14] N. Yilmaz Özgür, "On the n-transitivity of the group of Möbius transformations on C ," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 40, no. 1, pp. 106–110, apr 2009, doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2007.07.024>.
- [15] H. Haruki and T. Rassias, "A New Invariant Characteristic Property of Möbius Transformations from the Standpoint of Conformal Mapping," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 181, no. 2, pp. 320–327, jan 1994, doi: <http://dx.doi.org/10.1006/jmaa.1994.1024>.

- [16] H. Haruki and T. M. Rassias, "A New Characteristic of Möbius Transformations by Use of Apollonius Points of Triangles," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 197, no. 1, pp. 14–22, jan 1996, doi: <http://dx.doi.org/10.1006/jmaa.1996.0002>.
- [17] P. Niamsup, "A Note on the Characteristics of Möbius Transformations," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 248, no. 1, pp. 203–215, aug 2000, doi: <http://dx.doi.org/10.1006/jmaa.2000.6888>.
- [18] —, "A characterization of Möbius transformations," *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 24, no. 10, pp. 663–666, 2000, doi: <http://dx.doi.org/10.1155/S0161171200010255>.
- [19] —, "A Note on the Characteristics of Möbius Transformations," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 248, no. 1, pp. 203–215, aug 2000, doi: <http://dx.doi.org/10.1006/jmaa.2000.6888>.
- [20] W. S. Budhi, *Langkah Awal Menuju ke Olimpiade Matematika*. Jakarta: Ricardo, 2006.
- [21] I. R. Ihsan, *Klasifikasi Geometris dari Transformasi Möbius*. Institut Teknologi Bandung, 2015.
- [22] G. P. Dresden, "There Are Only Nine Finite Groups of Fractional Linear Transformations with Integer Coefficients," *Mathematics Magazine*, vol. 77, no. 3, p. 211, jun 2004, doi: <http://dx.doi.org/10.2307/3219118>.
- [23] J. Olsen, *The Geometry of Möbius Transformations*. Rochester: University of Rochester, 2010.



This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/). Editorial of JJoM: Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo, Jln. Prof. Dr. Ing. B.J. Habibie, Moutong, Tilongkabila, Kabupaten Bone Bolango, Provinsi Gorontalo 96119, Indonesia.