JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS
Jambura J. Math. Vol. 4, No. 2, pp. 188–199, July 2022
Journal Homepage: http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom
DOI: https://doi.org/10.34312/jjom.v4i2.13583

Metode Reversible Self-Dual untuk Konstruksi Kode DNA atas Lapangan Hingga $GF(4)$

Juli Loisiana Butar-Butar[1*], Misa Br. Bukit[2]

[1,2]*Jurusan PGSD, Fakultas FKIP, Universitas Quality Berastagi, Berastagi 22153, Indonesia*
[*]*Corresponding author. Email: julois.butrz@gmail.com*

ABSTRAK

Rantai molekul DNA terdiri dari dua untai komplementer yang tersusun dari urutan empat basa nukleotida, yakni adenin (A), sitosin (C), guanin (G) dan timin (T). Kode DNA merupakan himpunan kode kata dengan panjang tetap atas alfabet $\{A, C, T, G\}$. Pengkodean DNA merupakan salah satu aplikasi dari teori pengkodean atas lapangan hingga. Himpunan $\{A, C, T, G\}$ diidentifikasikan sebagai lapangan hingga $GF(4) = \{0, 1, \omega, \omega^2\}$ dengan $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. Kode *reversible self-dual* (RSD) $\mathcal{C}$ atas lapangan hingga $GF(4)$ merupakan kode yang dualnya adalah dirinya sendiri dan kebalikan dari setiap kodekata termuat dalam kode tersebut. Penelitian ini bertujuan untuk menghasilkan algoritma untuk mengkontruksi kode DNA yang berasal dari kode RSD $\mathcal{C}$ atas lapangan hingga $GF(4)$ yang disebut dengan Metode *Reversible Self-Dual*. Aspek-aspek yang diteliti meliputi sifat-sifat yang menjadi dasar teori dalam menyusun algoritma kode DNA atas kode RSD atas $GF(4)$. Algoritma yang disusun merupakan metode kontruksi kode DNA dengan panjang kodekata genap yang memenuhi batasan jarak Hamming, batasan *reverse-complement*, serta batasan konten-GC. Adapun masukan dari algoritma adalah matriks generator dari kode RSD $\mathcal{C}$ dengan jarak minimum d dengan luarannya adalah kode DNA yang memenuhi ketiga batasan tersebut.

Kata Kunci:
Kode DNA; Lapangan Hingga $GF(4)$; Kode *Reversible Self-Dual*

ABSTRACT

The DNA molecule chain consists of two complementary strands composed of a sequence of four nucleotide bases, namely adenine (A), cytosine (C), guanine (G) and thymine (T). DNA code is a set of codewords with a fixed length of the alphabet $\{A, C, T, G\}$. *DNA coding is one application of coding theory over finite field. The set* $\{A, C, T, G\}$ *is identified as finite field* $GF(4) = \{0, 1, \omega, \omega^2\}$ *with* $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. *The reversible self-dual (RSD) code over finite field* $GF(4)$ *is a code whose dual is itself and the reverse of each codeword contained in the code. This study aims to obtain an algorithm to construct a DNA code derived from the RSD C code on the field to* $GF(4)$ *which is called the Reversible Self-Dual Method. The aspects studied include the characteristics that form the basis properties of the theory in compiling the DNA code algorithm over the RSD code over* $GF(4)$. *The compiled algorithm is a DNA code construction method of codeword length even that conforms the Hamming distance constraint, reverse-complement constraint, and GC-content constraint. The input of the algorithm is a generator matrix of RSD code* $\mathcal{C}$ *with a minimum distance of* d *and the output is a DNA code that satisfies these three constraints.*

e-ISSN: 2656-1344 © 2022 J. L. Butar-Butar, M. B. Bukit | Under the license CC BY-NC 4.0
Received: 23 February 2022 | Accepted: 26 March 2022 | Online: 9 May 2022

Keywords:
DNA Kode; Finite Field $GF(4)$; Reversible Self-Dual Code

Format Sitasi:

J. L. Butar-Butar and M. B. Bukit, "Metode Reversible Self-Dual untuk Konstruksi Kode DNA atas Lapangan Hingga $GF(4)$", *Jambura J. Math.*, vol. 4, No. 2, pp. 188–199, 2022, doi: https://doi.org/10.34312/jjom.v4i2.13583

1. Pendahuluan

DNA (*deoxyribonucleic acid*) merupakan rantai molekul yang berisi intruksi genetik yang khas untuk untuk pengembangan, fungsi, pertumbuhan dan reproduksi semua organisme bahkan virus. Terdapat banyak kandungan informasi dalam DNA, tetapi informasi ini baru mulai dipahami melalui seberapa efisien DNA dikodekan. Dalam Matematika, teori pengkodean merupakan aplikasi bagian dari bidang Aljabar dalam Genetika dan Biotekologi. Pengkodean DNA merupakan suatu desain untuk mengembangkan himpunan kodekata DNA dengan panjang n atas alfabet basa nukleotida DNA [1].

Setiap rantai molekul DNA terdiri dari dua untai komplementer yang tersusun dari urutan empat basa nukleotida yang berbeda. Empat basa nukleotida adalah adenin (A), sitosin (C), guanin (G) dan timin (T) [2]. Untaian komplementer DNA dibangun dengan aturan $\widehat{\mathrm{A}}=\mathrm{T}, \widehat{\mathrm{T}}=\mathrm{A}, \widehat{\mathrm{C}}=\mathrm{G}$, dan $\widehat{\mathrm{G}}=\mathrm{C}$. Kode DNA merupakan himpunan kode kata dengan panjang tetap n atas alfabet $\{\mathrm{A}, \mathrm{T}, \mathrm{C}, \mathrm{G}\}$. Kode DNA memenuhi batasan kombinatorial tertentu memiliki aplikasi untuk menyimpan dan mengambil informasi secara andal dalam untai DNA sintetis [3].

Sebagai awal dalam pengkodean DNA adalah membentuk himpunan basa nukleotida sesuai dengan struktur aljabar yang sudah diketahui. Terdapat beberapa penyesuaian dari himpunan basa nukleotida. Misalnya dalam [4], $\{\mathrm{C}, \mathrm{T}, \mathrm{A}, \mathrm{G}\}$ dicocokkan dengan $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Adapun oleh Feng [5], $\{\mathrm{A}, \mathrm{T}, \mathrm{C}, \mathrm{G}\}$ dengan aturan $\mathrm{A}\to 0, \mathrm{C}\to 1, \mathrm{T}\to 2, \mathrm{G}\to 3$ membentuk grup $\mathbb{Z}_4$. Dalam penelitian ini digunakan aturan yang sama dengan Kim [6], dimana $\{\mathrm{A}, \mathrm{C}, \mathrm{T}, \mathrm{G}\}$ diidentifikasikan sebagai $GF(4) = \{0, 1, \omega, \omega^2\}$ dengan $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. Hal ini disebabkan karena kontruksi kode DNA atas $GF(4)$ merupakan salah satu yang berkembang dengan baik dalam teori pengkodean sebagaimana telah ditunjukkan pada penelitian-penelitian sebelumnya [7, 8].

Kode DNA atas $GF(4)$ merupakan kode *reversible* atas lapangan hingga yang diperoleh dengan polinomial *lifted* [9]. Polinomial *lifted* digeneralisasikan lebih lanjut ke setiap lapangan hingga $GF(q)$ dengan $q = p^k$ untuk p bilangan prima dan k bilangan asli. Beberapa keunggulan dari polinomial *lifted* adalah mudah untuk mengkontruksi, terdapat banyak contoh dan mudah untuk menentukan dimensi kode yang dihasilkannya [10]. Salah satu permasalahan utama dalam studi kode DNA adalah menemukan metode kontruksi kode DNA yang efektif dan baik. Secara alami, masalah perancangan kode DNA dapat direduksi menjadi masalah komputasi kode siklik yang tidak dapat direduksi dalam $GF(4)$ [11].

Metode yang digunakan untuk mengkontruksi kode DNA dalam penelitian ini adalah metode *Reversible Self-Dual* (RSD) atas lapangan hingga $GF(4)$. Dikatakan metode *Reversible Self-Dual* dikarenakan kode DNA dikontruksi berawal dari kode *Reversible Self-Dual* lapangan hingga $GF(4)$. Masalah merancang kode DNA adalah mengenai menemukan himpunan kemungkinan terbesar dari kode DNA, masing-masing dengan panjang n, yang memenuhi empat batasan. Empat batasan dari kode DNA yang baik itu adalah batasan jarak Hamming (*Hamming distance*), batasan terbalik (*reverse constraint*), batasan pelengkap-balik (*reverse-complement constraint*), dan batasan konten-GC tetap (*GC-content constraint*) [12]. Tujuan penelitian ini adalah membuat algoritma kontruksi kode DNA yang berawal dari kode RSD yang memenuhi batasan jarak Hamming, jarak *reverse-complement*, dan batasan konten-GC.

2. Metode

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Kajian referensi mencakup lapangan hingga, teori pengkodean atas lapangan hingga, serta kontruksi kode DNA. Teori dasar dari kode linear atas lapangan hingga yakni berupa jarak Hamming [13], kode dual [14], kode *self-dual* [15], dan matriks generator kode linear [16].

Hal yang selanjutnya akan dilakukan adalah menyelidiki sifat dari kode linear *reserve self-dual* (RSD) [17] yang nanti digunakan dalam algoritma kontruksi kode DNA atas lapangan $GF(4)$. Sifat-sifat yang dibahas mencakup kodekata yang memenuhi batasan-RC dan bobot-GC sebagai kriteri yang diperlukan dalam kontruksi kode DNA. Dalam mempelajari sifat-sifat ini sangat diperlukan sifat yang menentukan matriks pembangun dari kode linear RSD.

Dari kontruksi ini, penelitian mengambil kondisi khusus, yakni kode DNA dengan panjang $2n$ dengan n bilangan asli dengan batas jarak minimum Hamming, dan batasan-RC dan batasan konten-GC. Pada penelitian, diperlukan enumerator bobot lengkap dari kode DNA yang berguna menunjukkan frekuensi setiap simbol yang muncul di setiap kodekata Proses algoritma menguraikan kode $\mathcal{C}$ RSD dengan kardinalitas dan bobot minimum d ke dalam koset subkode $\mathcal{C}$ yang terdiri dari semua kode kata sandi yang *reverse*-nya di C. Kemudian dikumpulkan kata sandi yang tepat dari setiap koset untuk membuat kode DNA yang memenuhi batasan Hamming dan RC yang lebih besar dari atau sama dengan d.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Kode Linear atas Lapangan Hingga dan Kode DNA

Lapangan hingga dinotasikan dengan $GF\left(q\right) = GF(p^l)$ dapat direpresentasikan dengan $GF(p)/\left\langle \phi\left(y\right)\right\rangle$ [18]. Untuk mengkontruksi lapangan hingga $GF(p^l)$ dari $\phi\left(y\right)$ suatu polinomial minimal dari ω berderajat l atas $GF(p)$ dengan menggunakan aturan $\phi\left(\omega\right) = 0$ sehingga sifat setiap elemen

$$GF(p^l) = \left\{a_0 + a_1\omega + \cdots + a_{l-1}\omega^{l-1} \middle| a_0, a_1, \ldots, a_{l-1} \in GF(p)\right\}$$

dapat ditentukan [19].

Pada penelitian ini kode DNA diidentifikasi sebagai himpunan kode kata atas lapangan hingga. Suatu kode DNA dengan panjang n merupakan suatu himpunan dari kode kata $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dengan $x_i \in \{\mathrm{A}, \mathrm{C}, \mathrm{G}, \mathrm{T}\}$. Dinotasikan komplemen Watson-Crick dari nukleotida $\widehat{\mathrm{A}}=\mathrm{T}, \widehat{\mathrm{T}}=\mathrm{A}, \widehat{\mathrm{C}}=\mathrm{G}$, dan $\widehat{\mathrm{G}}=\mathrm{C}$.

Definisi 1. Jarak Hamming $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dari dua kode kata $\mathbf{x}= (x_1 \cdots x_n)$ dan $\mathbf{y}= (y_1 \cdots y_n)$

adalah jumlah koordinat di mana $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ berbeda, atau dapat ditulis sebagai:

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d(x_1,y_1) + \cdots + d(x_n,y_n),$$

dengan

$$d(x_i,y_i) = \begin{cases} 1 \text{ jika } x_i \neq y_i \\ 0 \text{ jika } x_i = y_i \end{cases}.$$

Definisi 2. Kebalikan (*reverse*) dari suatu kode kata $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ dinotasikan sebagai $\mathbf{x}^r = (x_n, \cdots, x_1)$, dan komplemen-kebalikan (*reverse-complement*) dari $\mathbf{x}$ dinotasikan $\mathbf{x}^{rc} = (\hat{x}_n, \cdots, \hat{x}_1)$.

Dimisalkan $GF(4)^n$ ruang vektor dimensi n atas lapangan hingga $GF(4)$. Bobot Hamming dari vektor $\mathbf{x} \in GF(4)^n$, ditulis dengan $wt(\mathbf{x})$, adalah jumlah entri tak nol dari $\mathbf{x}$.

Kode nukleotida $\{\mathrm{A},\mathrm{C},\mathrm{G},\mathrm{T}\}$ diidentifikasikan sebagai lapangan hingga $GF(4)$ yang didefinisikan dalam pemetaan bijektif $\mu : GF(4) = \{0,1,\omega,\overline{\omega}\} \to \{\mathrm{A},\mathrm{C},\mathrm{G},\mathrm{T}\}$ sebagai $\mu(0) = \mathrm{A}, \mu(1) = \mathrm{T}, \mu(\omega) = \mathrm{C}$ dan $\mu(\overline{\omega}) = \mathrm{G}$ dimana $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ dan $\overline{\omega} = \omega^2$.

Definisi 3. Diberikan matriks G ukuran $k \times n$ dengan $0 < k \leq n$ atas $GF(q)$. Matriks G dikatakan matriks generator kode $\mathcal{C}$ jika barisnya adalah basis dari kode $\mathcal{C}$.

Contoh 1. Diberikan kode $\mathcal{C} = \{\overline{\omega}010, \omega0\overline{\omega}0, 1\omega01, 1\overline{\omega}1\omega, \omega1\omega\overline{\omega}, \overline{\omega}10\overline{\omega}, 0\overline{\omega}\overline{\omega}\omega, 0\omega\omega1, \overline{\omega}10\overline{\omega}, \omega1\omega\overline{\omega}, 1\overline{\omega}1\omega, 1\omega01\}$ atas $GF(4)$ dan matriks

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \overline{\omega} \end{pmatrix}.$$

Diambil $\omega1\omega\overline{\omega}, 1\overline{\omega}1\omega, 1\omega01 \in \mathcal{C}$ sehingga $\omega1\omega\overline{\omega} = \omega(10\omega0) + (011\overline{\omega})$ dan $1\overline{\omega}1\omega = (10\omega0) + \overline{\omega}(011\overline{\omega})$. Selain itu, jika semua kode $\mathcal{C}$ dibentuk menjadi baris suatu matriks dan matriks tersebut diproses dengan operasi baris elementer, maka diperoleh matriks G.

Diberikan $\mathcal{C}$ kode linear dengan panjang n atas $GF(4)$. Dianggap bahwa ruang vektor yang dilengkapi $GF(4)^n$ dengan perkalian dalam, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, dimana $\mathbf{x} = (x_i)$ dan $\mathbf{y} = (y_i)$ merupakan vektor di $GF(4)^n$. Kode dual $\mathcal{C}^\perp$ dari $\mathcal{C}$ didefinisikan sebagai

$$\mathcal{C}^\perp = \{\mathbf{v} \in GF(4)^n | \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0\,(\forall \mathbf{w} \in \mathcal{C})\}. \tag{1}$$

Suatu kode $\mathcal{C}$ disebut *self-orthogonal* jika $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}^\perp$ dan *self-dual* jika $\mathcal{C} = \mathcal{C}^\perp$ [20]. Suatu kode $\mathcal{C}$ dikatakan kode *reversible* jika $\mathbf{x}^r \in \mathcal{C}$ untuk setiap $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ [21]. Jika suatu kode *self-dual* merupakan *reversible*, maka kode tersebut dikatakan kode *reversible self-dual*. Matriks M ukuran $n \times n$ dikatakan ortogonal jika $MM^T = I_n$.

Untuk mengkontruksi kode linear diperlukan matriks generator. Bentuk standar matriks generator dari kode linear $C = [n,k,d]_q$ dengan panjang n kode kata, k dimensi dari kode linear sebagai ruang vektor, d jarak minimum dari kode, dan q ukuran dari lapangan hingga adalah $G = (I_n|M)$. Matriks generator $G = (I_n|M)$ dapat mengkontruksi matriks *parity check*

$$H = \left(-M^T \,\middle|\, I_{n-k}\right). \tag{2}$$

Matriks H ini merupakan matriks pembangun untuk kode dual $C^{\perp}$.

Teorema 1. *Jika $\mathcal{C}$ kode self-dual atas $GF(4)$ dengan panjang $2n$ mempunyai matriks generator dengan bentuk $(I_n|M)$, maka M adalah matriks orthogonal ukuran $n \times n$.*

Bukti. Karena $(I_n|M)$ merupakan matriks generator dari kode *self-dual* $\mathcal{C}$, maka $(I_n|M)$ juga matriks generator kode $\mathcal{C}^{\perp}$. Karena $(I_n|M)$ merupakan matriks generator dari $\mathcal{C}$, maka perkalian dalam dari setiap vektor dari baris dari $(I_n|M)$ dengan setiap vektor dari baris dari $(I_n|M)$ adalah 0. Sehingga

$$(I_n \mid M)\,(I_n \mid M)^T = \mathbf{0}$$

$$(I_n \mid M)\begin{pmatrix} I_n \\ M^T \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\left(MM^T + I_n\right) = \mathbf{0}$$

$$MM^T = -I_n.$$

Karena -1 adalah invers penjumlahan dari 1 dan pada $GF(4)$ berlaku $-1 = 1$, maka $-I_n = I_n$. Karena itu, $MM^T = I_n$. Ini berarti M adalah matriks ortogonal. □

3.2. Kontruksi Kode DNA dengan Kode Linear RSD

Pada penelitian ini dipilih $\mathcal{C}$ kode RSD atas $GF(4)$ dengan panjang $2n$. Namun sebelum memahas lebih lanjut, terdapat empat batasan untuk mengkontruksi kode DNA atas suatu kode [12], yaitu

1. Batasan jarak Hamming: batasan jarak Hamming untuk suatu kode DNA $\mathcal{C}$ adalah $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq d$ untuk semua $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{C}$ dengan $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, untuk jarak minimum d yang ditentukan.
2. Batasan *reverse*: batasan jarak *reverse* untuk suatu kode DNA $\mathcal{C}$ adalah $d(\mathbf{x}^r, \mathbf{y}) \geq d$ untuk semua $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{C}$ termasuk $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
3. Batasan *reverse-complement* (Batasan-RC): batasan jarak *reverse* untuk suatu kode DNA $\mathcal{C}$ adalah $d(\mathbf{x}^{rc}, \mathbf{y}) \geq d$ untuk semua $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{C}$ termasuk $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
4. Batasan *content*-GC: batasan ini merupakan setiap kodekata di $\mathcal{C}$ mempunyai bobot-GC yang sama. Konten-GC dari suatu kodekata DNA didefinisikan sebagai banyak posisi yang mana kodekata mempunyai koordinat CG.

Dengan memilih $\mathcal{C}$ kode RSD atas $GF(4)$ dengan panjang $2n$ dengan jarak minimum Hamming sehingga dapat dikontruksi kode DNA *self-dual* $\mu(\mathcal{C})$ yang memenuhi batasan jarak Hamming. Sebagaimana diketahui dalam [22] untuk setiap kode kata $\mathbf{x} \in \mu(C)$ memenuhi $\mathbf{x}^r, \mathbf{x}^{rc} \in \mu(\mathcal{C})$. Oleh karena itu, jarak *reverse* minimum dan jarak *complement-reverse* selalu nol. Namun, dengan mengecualikan semua kode kata *self-reverse-complementary*, diperoleh subkode dari $\mu(\mathcal{C})$, yang memiliki jarak minimum *complement-reverse* d. Hal ini menjadi pengarah dalam menyusun algoritma efisien untuk membangun kode DNA yang memenuhi batasan *complement-reverse* yang disebut metode *self-dual* reversibel untuk konstruksi kode DNA (metode RSD).

Untuk selanjutnya, diberikan $\mathcal{C}$ kode RSD dengan panjang $2n$ atas $GF(4)$ dengan matriks pembangun $G = (I_n|M)$. Suatu kode kata $\mathbf{x}$ dikatakan *self-reversible* jika $\mathbf{x} = \mathbf{x}^r$.Sedangkan suatu kode kata $\mathbf{x}$ dikatakan *self-reverse-complementary* jika $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{rc}$. Ini berarti $\mathbf{x}$ mempunyai kemungkinan sama dengan $\mathbf{x}^r$ atau $\mathbf{x}^{rc}$ tetapi tidak keduanya.

Dimisalkan $\mathcal{C}_0$ merupakan himpunan bagian dari semua kode kata *self-reversible* di $\mathcal{C}$. Didefinisikan pemetaan linear

$$\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}\mathbf{x} \mapsto \phi\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{x} + \mathbf{x}^r$$

Karena $\mathbf{x}+\mathbf{x}^r \in \phi(\mathcal{C})$ sehingga $(\mathbf{x}+\mathbf{x}^r) = \mathbf{x}^{\mathbf{r}}+(\mathbf{x}^r)^{\mathbf{r}} = \mathbf{x}^r + \mathbf{x} = \mathbf{x}+\mathbf{x}^r$, maka $\mathbf{x}+\mathbf{x}^r \in \mathcal{C}_0$. Hal ini menunjukkan bahwa, $\phi\left(\mathcal{C}\right) \subseteq \mathcal{C}_0$. Selain itu, diperoleh bahwa

$$\begin{aligned}
\ker\left(\phi\right) &= \{\mathbf{x}{\in}GF(4) \mid \phi\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{0}\} \\
&= \{\mathbf{x}{\in}GF(4) \mid \mathbf{x} + \mathbf{x}^r = \mathbf{0}\} \\
&= \{\mathbf{x}{\in}GF(4) \mid \mathbf{x} = -\mathbf{x}^r\} \\
&= \{\mathbf{x}{\in}GF(4) \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}^r\}.
\end{aligned}$$

Ini berarti, $\ker\left(\phi\right) = \mathcal{C}_0$. Dengan demikian, $\mathcal{C}_0$ merupakan subkode linear dari $\mathcal{C}$ yang memuat $\phi(\mathcal{C})$ sebagai subkodenya dan $|\mathcal{C}| = |\mathcal{C}_0|\left|\phi\left(\mathcal{C}\right)\right|$. Pemetaan linear ϕ dapat direpresentasikan dengan matriks $I_{2n} + R_{2n}$ sehingga matriks

$$G\left(I_{2n} + R_{2n}\right) = \left(I_n + MR_n|M + R_n\right) \tag{3}$$

membangun subkode $\phi(\mathcal{C})$ dari $\mathcal{C}$.

Kemudian didefinisikan pemetaan projeksi sebagai

$$\pi : GF(4)^{2n} \to GF(4)^n(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n) \mapsto \pi\left((\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n)\right) = \mathbf{u}_n$$

dimana $\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n \in GF(4)^{\boldsymbol{n}}$**.** Pemetaan π merupakan bijeksi dari $\mathcal{C}_0$ ke $\pi(\mathcal{C}_0)$.

Berikut ini merupakan sifat yang diperlukan dalam penyusunan algoritma.

Teorema 2. *Jika $G = (I_n|M)$ generator matriks dari kode RSD $\mathcal{C}$ atas $GF(4)$, maka $\pi(\mathcal{C}_0)$ kode dual dari $\pi\left(\phi\left(\mathcal{C}\right)\right)$ dibangun oleh matriks $MR_n + I_n$.*

Bukti. Karena $\mathcal{C}$ merupakan kode RSD atas $GF(4)$, maka $\pi(\mathcal{C}_0)$ merupakan kode *self-dual* Euclidean sehingga $\pi\left(\mathbf{1}\right) \in \pi(\mathcal{C}_0)$. Karena $\left(I_n + MR_n|M + R_n\right)$ matriks generator dari subkode $\phi(\mathcal{C})$ dan berdasarkan definisi dari π, maka $MR_n + I_n$ membangun $\pi\left(\phi\left(\mathcal{C}\right)\right)$. Karena $\mathcal{C}_0$ memuat semua kodekata *self-reversible* di $\mathcal{C}$, untuk semua $\mathbf{x}{\in}\pi(\mathcal{C}_0)$ dan $(\mathbf{x}, \mathbf{x}^r)$ merupakan kodekata di $\mathcal{C}$. Karena $\mathbf{x}G = \mathbf{x}\left(I_n \mid M\right) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}M)$ merupakan suatu kodekata di $\mathcal{C}$ yang identik terhadap $(\mathbf{x}, \mathbf{x}^r)$ dan matriks $MR_n + I_n$ simetrik, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}M = \mathbf{x}^r &\Leftrightarrow \mathbf{x}M = \mathbf{x}R_n \\
&\Leftrightarrow \mathbf{x}MR_n = \mathbf{x}R_nR_n \\
&\Leftrightarrow \mathbf{x}MR_n = \mathbf{x} \\
&\Leftrightarrow \mathbf{x}MR_n + \mathbf{x} = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow \mathbf{x}(MR_n + I_n) = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow \mathbf{x}(MR_n + I_n)^T = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Ini menunjukkan bahwa $\pi(\mathcal{C}_0)$ termuat di $\pi(\phi\left(\mathcal{C}\right))^{\perp}$. Karena $|\mathcal{C}| = |\mathcal{C}_0|\left|\phi\left(\mathcal{C}\right)\right|$, $\phi\left(\mathcal{C}\right) \subseteq$

$\mathcal{C}_0$ dan π pemetaan bijeksi dari $\mathcal{C}_0$ ke $\pi(\mathcal{C}_0)$, maka diperoleh

$$|\mathcal{C}_0| = |\pi(\mathcal{C}_0)| \text{ dan } |\phi(\mathcal{C})| = |\pi(\phi(\mathcal{C}))|.$$

Akibatnya,

$$4^n = |\mathcal{C}| = |\mathcal{C}_0|\,|\phi(\mathcal{C})| = |\pi(\mathcal{C}_0)|\,|\pi(\phi(\mathcal{C}))|,$$

yang berarti $|\pi(\mathcal{C}_0)| = \left|\pi(\phi(\mathcal{C}))^{\perp}\right|$. Dengan demikian, $\pi(\mathcal{C}_0)$ merupakan kode dual dari $\pi(\phi(\mathcal{C}))$. □

Berikut ini merupakan dua sifat dari kode RSD $\mathcal{C}$ atas $GF(4)$.

Proposisi 1. *Jika $\mathcal{C}$ adalah kode RSD atas $GF(4)$ dengan panjang $2n$, $\mathcal{C}_i$ suatu koset dari $\mathcal{C}_0$ di $\mathcal{C}$, maka untuk setiap kodekata $\mathbf{x}$ pada koset $\mathcal{C}_i$ berlaku $\mathbf{x}^r$, $\mathbf{x}^c$ dan $\mathbf{x}^{rc}$ juga di $\mathcal{C}_i$.*

Bukti. Misalkan $\mathcal{C}_i = \mathbf{v} + \mathcal{C}_0$ untuk suatu $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$ dan diambil sebarang kodekata $\mathbf{x}$ pada koset $\mathcal{C}_i$. Sehingga $\mathbf{x}{=}\mathbf{v}{+}\mathbf{u}$ untuk suatu $\mathbf{u}{\in}\mathcal{C}_0$. Karena $\phi(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}_0$, maka $\phi(\mathbf{v}) \in \mathcal{C}_0$ sehingga $\phi(\mathbf{v}) + \mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0$. Akibatnya, $\mathbf{u}{+}\phi(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ untuk suatu $\mathbf{w}{\in}\mathcal{C}_0$ dan $\mathbf{x}{=}\mathbf{v}{+}\phi(\mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{v}^r + \mathbf{w}$. Karena itu, $\mathbf{x}^r = (\mathbf{v}^r + \mathbf{w})^r = \mathbf{v}{+}\mathbf{w}^r = \mathbf{v}{+}\mathbf{w}{\in}\mathbf{v}{+}\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_i$.

Karena $\mathbf{1} \in \mathcal{C}_0$, maka diperoleh $\mathbf{x}^c = \mathbf{x} + \mathbf{1} \in \mathbf{x}{+}\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_i$. Karena $\mathbf{x}^r \in \mathcal{C}_i$, maka juga diperoleh $\mathbf{x}^{rc} = \mathbf{x}^r + \mathbf{1} \in \mathbf{x}^r{+}\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_i$. □

Proposisi 2. *Diberikan $\mathcal{C}$ adalah kode RSD atas $GF(4)$ dengan panjang $2n$. Jika terdapat kodekata self-reverse-complementary $\mathbf{x}$ di $\mathcal{C}$, maka koset $\mathbf{x}{+}\mathcal{C}_0$ adalah himpunan semua kodekata self-reverse-complementary di $\mathcal{C}$.*

Bukti. Diambil kodekata *self-reverse-complementary* $\mathbf{x}$ di $\mathcal{C}$. Karena $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{rc} = \mathbf{x}^r + \mathbf{1}$, maka diperoleh $\mathbf{x} + \mathbf{x}^r = \mathbf{1}$ sehingga $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{1}$. Diambil $\mathbf{y}_1 \in \mathbf{x} + \mathcal{C}_0$ sehingga $\mathbf{x} + \mathbf{y}_1 \in \mathcal{C}_0 = \ker\phi$. Akibatnya, $\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}_1) = \phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{y}_1) = \mathbf{0}$. Karena itu, $\phi(\mathbf{y}_1) = \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{1}$ dan $\mathbf{y}_1$ *self-reverse-complementary.* Diambil sebarang kodekata *self-reverse-complementary* $\mathbf{y}_2 \in \mathcal{C}$ sehingga diperoleh $\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}_2) = \phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{y}_2) = \mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$. Akibatnya, $\mathbf{x} + \mathbf{y}_2 \in \mathcal{C}_0$ dan $\mathbf{y}_2 \in \mathbf{x}{+}\mathcal{C}_0$. □

Bobot minimum Hamming dari suatu kode *self-dual* atas $GF(4)$ dengan panjang n mempunyai batas [6].

$$d_H(n) \leq 4\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 4. \tag{4}$$

Enumerator bobot lengkap dari kode linier menjadi kepentingan mendasar untuk teori dan praktik karena itu tidak hanya memberikan enumerator bobot tetapi juga menunjukkan frekuensi setiap simbol yang muncul di setiap kodekata [23]. Selanjutnya, rumus untuk enumerator bobot lengkap dari kode linear atas lapangan hingga $GF(4)$ berikut

$$CWE_{\mathcal{C}}(w_0, w_1, w_2, w_3) = \sum_{c\in\mathcal{C}} w_0^{n_0(x)} w_1^{n_1(x)} w_2^{n_\omega(c)} w_3^{n_{\overline{\omega}}(c)}$$

dengan $n_s(c)$ jumlah terjadinya s pada kode kata c, $w_i \in GF(4) = \{0, 1, \omega, \overline{\omega}\}$.

Diidentifikasikan enumerator bobot lengkap dari suatu kode DNA $\mathcal{D}$ dengan kode $\mathcal{C}$ atas $GF(4)$, dimana $\mathcal{D} = \mu(\mathcal{C})$. Bobot-GC dari kode kata $c \in \mathcal{C}$ adalah jumlah dari $n_\omega(c)$ dan

$n_{\overline{\omega}}(c)$ dengan

$$CWE_{\mathcal{C}}\left(a,a,b,b\right)=\sum_{c\in\mathcal{C}}a^{n_0(c)+n_1(c)}b^{n_\omega(c)+n_{\overline{\omega}}(c)}.$$

$GCW_{\mathcal{C}}(a,b)$ adalah enumerator bobot-GC dari kode $\mathcal{C}$, dimana koefisien dari b^i adalah sama dengan kode kata bobot-GC i.

Selanjutnya, algoritma 5.1 pada [22] akan diperbaharui. Namun diperlukan teorema berikut yang berkaitan dengan enumerator bobot-GC dari suatu kode DNA $\mathcal{D}$ yang dikontruksi dengan algoritma kontruksi RSD.

Teorema 3. *Diberikan kode RSD, dan $\mathcal{D}$ adalah kode DNA yang dikontruksi dari $\mathcal{C}$ dengan algoritma kontruksi RSD.*

1. *Jika $\mathbf{1}\notin\phi(\mathcal{C})$, maka*
$$GCW_{\mathcal{D}}\left(a,b\right)=\frac{CWE_{\mathcal{C}}\left(a,a,b,b\right)}{2}.$$
2. *Jika $\mathbf{1}\in\phi(\mathcal{C})$, maka*
$$GCW_{\mathcal{D}}\left(a,b\right)=\frac{CWE_{\mathcal{C}}\left(a,a,b,b\right)-CWE_{\mathbf{x}+\mathcal{C}_0}\left(a,a,b,b\right)}{2}$$

dengan $\phi\left(\mathbf{x}\right)=\mathbf{1}$.

Bukti. Jelas bahwa $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{x}^r$ mempunyai bobot lengkap yang sama. Karena $\omega^c=\overline{\omega}$, maka $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{x}^{rc}$ mempunyai bobot-GC yang sama.

1. Karena $\mathbf{1}\notin\phi(\mathcal{C})$, maka tidak ada kodekata *self-reverse-complementary* di $\mathcal{C}$. Berdasarkan Algoritma 5.1 pada [22], diperoleh suatu kode DNA dengan memilih satu dari setiap kodekata berbeda $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{x}^{rc}$. Akibatnya, jumlah kode kata dari bobot-GC i di $\mathcal{D}$ adalah setengah dari jumlah kodekata dari bobot-GC i di $\mathcal{C}$ untuk semua i.
2. Karena $\mathbf{1}\in\phi(\mathcal{C})$, maka koset $\mathbf{x}+\mathcal{C}_0$ memuat kodekata *self-reverse-complementary* di $\mathcal{C}$ berdasarkan Proposisi 4, dan koset $\mathbf{x}+\mathcal{C}_0$ dibuang berdasarkan Algoritma 5.1 pada [22]. Akibatnya, jumlah kode kata dari bobot-GC i di $\mathcal{D}$ adalah setengah dari jumlah kodekata dari bobot-GC i di $\mathcal{C}$ dikurangi jumlah dari kodekata dari bobot-GC i pada koset $\mathbf{x}+\mathcal{C}$ untuk semua i.

$\square$

Sebagai catatan secara umum bobot-GC konstan $k=n$ jika n genap, dan $k=n+1$ jika n ganjil. Berikut ini merupakan algoritma kontruksi kode DNA RSD yang disusun berdasarkan teorema dan proposisi sebelumnya.

Algoritma Metode Kode RSD untuk Kode DNA

Input:
$G=(I_n\mid M)=$ matriks pembangun kode RSD $\mathcal{C}$ dengan panjang $2n$
$d=$ jarak minimum

Selanjutnya dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Bentuk semua kodekata dari kode RSD $\mathcal{C}$ dengan $|\mathcal{C}|=4^n$ dan bentuk $\phi(\mathcal{C})$ yang dibangun oleh matriks $(I_n+MR_n|M+R_n)$.

2. Bentuk himpunan *self-reversible* $\mathcal{C}_0$ dari kode dual $\pi(\phi(\mathcal{C}))$.
3. Dekomposisi $\mathcal{C}$ ke koset $\mathcal{C}_0$ sehingga $\mathfrak{C} := \{\mathbf{x} + \mathcal{C}_0 | \mathbf{x} \in \mathcal{C}\}$.
4. Jika terdapat $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$ sehingga $\phi(\mathbf{u}) = \mathbf{1}$, maka koset $\mathbf{u} + \mathcal{C}_0$ adalah himpunan semua kodekata *self-reverse-complementary* di $\mathcal{C}$. Bentuk $\mathfrak{C}\mathfrak{C} - \{\mathbf{u} + \mathcal{C}_0\}$.
5. Untuk suatu koset $\mathcal{C}_i \in \mathfrak{C}$, bentuk $\mathcal{C}_i' = \emptyset$. Ambil suatu kodekata $\mathbf{x} \in \boldsymbol{\mathcal{C}}_i$. Bentuk $\mathcal{C}_i' := \mathcal{C}_i' \cup \{\mathbf{x}, \mathbf{x}^r\}$ dan $\mathcal{C}_i := \mathcal{C}_i - \{\mathbf{x}, \mathbf{x}^r, \mathbf{x} + \mathbf{1}, \mathbf{x}^r + \mathbf{1}\}$. Ulangi hingga $\mathcal{C}_i := \emptyset$.
6. Jika $\mathbf{1} \notin \phi(\mathcal{C})$, maka
$$GCW_{\mathcal{D}}(a,b) = \frac{CWE_{\mathcal{C}}(a,a,b,b)}{2}.$$
Jika tidak, maka
$$GCW_{\mathcal{D}}(a,b) = \frac{CWE_{\mathcal{C}}(a,a,b,b) - CWE_{\mathbf{x}+\mathcal{C}_0}(a,a,b,b)}{2}$$
dengan $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{1}$.
7. Bentuk $\mathcal{D} := \mathcal{D} \cup \mathcal{C}_i'$ dan kembali Langkah 5 untuk semua koset di $\mathfrak{C}$.
8. $\mathcal{D}$ adalah kode DNA dengan jarak Hamming dan jarak *reverse-complement* $\geq d$ dengan bobot-GC konstan $k = n$ jika n genap, dan $k = n + 1$ jika n ganjil.
9. Selesai.

Untuk lebih memahami algoritma tersebut perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh 2. Diberikan kode RSD atas $GF(4)$ dengan panjang 4 dengan $d = 2$ dengan matriks pembangun
$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \overline{\omega} & \omega \\ 0 & 1 & \omega & \overline{\omega} \end{pmatrix}.$$
Kode $\mathcal{C}$ yang memenuhi batasan-RC dengan $d = 2$ adalah sebagai berikut

TAGC	GACT	CTGA	CGAT
ATCG	ACGT	TGCA	GCTA
TTTT	AGTC	TCAG	GGGG
CATG-	GTAC	CCCC	AAAA

Karena
$(I_2 + MR_2 \mid M + R_2) = \begin{pmatrix} \overline{\omega} & \overline{\omega} & \overline{\omega} & \overline{\omega} \\ \overline{\omega} & \overline{\omega} & \overline{\omega} & \overline{\omega} \end{pmatrix}$ maka $\phi(\mathcal{C}) = \{\text{TTTT}, \text{GGGG}\}$.
Adapun himpunan semua *self-reversible* $\mathcal{C}_0 = \{\text{CCCC}, \text{TTTT}, \text{GGGG}\}$. Selanjutnya diperoleh himpunan kodekata yang memenuhi $\phi(\mathbf{u}) = \mathbf{1}$, yakni $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\} = \{\text{CATG}, \text{ACGT}, \text{GTAC}, \text{TGCA}\}$. Dibentuk $\mathfrak{C}$ himpunan semua koset sehingga diperoleh anggota $\mathfrak{C}$ adalah

$$\mathbf{u}_1 + \mathcal{C}_0 = \{\text{ACGT}, \text{GTAC}, \text{TGCA}\},$$
$$\mathbf{u}_2 + \mathcal{C}_0 = \{\text{CATG}, \text{TGCA}, \text{GTAC}\},$$
$$\mathbf{u}_3 + \mathcal{C}_0 = \{\text{TGCA}, \text{CATG}, \text{ACGT}\},$$
$$\mathbf{u}_4 + \mathcal{C}_0 = \{\text{GTAC}, \text{ACGT}, \text{CATG}\}.$$

Setelah membuang semua elemen dari koset dan elemen *self-reversible* diperoleh bahwa $\mathcal{D} = \emptyset$. Ini berarti, kode RSD yang dibangun oleh matriks G_1 tidak membentuk kode DNA yang memenuhi batasan-RC dengan $d = 2$ dan konten-GC tetap dengan $k = 2$.

Contoh 3. Diberikan matriks berikut

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \omega & \omega \\ 0 & 1 & 0 & \overline{\omega} & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 1 & \overline{\omega} & \overline{\omega} & 1 \end{pmatrix}$$

yang merupakan matriks generator kode RSD atas $GF(4)$ dengan panjang 6 dan $d = 3$. Tentukan kontruksi kode DNA yang dibangun oleh matriks G.

Solusi. Karena setiap baris matriks G merupakan basis kode $\mathcal{C}$, maka diperoleh kontruksi suatu kode DNA yang memenuhi batasan-RC dengan $d = 3$ sebagai berikut

GGGGGG	CGTTGC	CGGCAA	GGTAAT
TCGGCT	ACTTCA	AACGGC	TAATGG
ATGGTA	TTTTTT	ACGCTC	TCTATG
CAGGAC	GATTAG	CTCGCA	GTATCT
TGGTCC	CTGTAT	AGGATT	GTGAGC
CCTGGT	TATGTC	TTAGGA	CGAGTG
GCGTGA	AAGTTG	CCGAAG	TAGACA
AGTGCG	GTTGAA	GAAGCC	ACAGAT

Dimisalkan $\mathcal{C}$ merupakan kode RSD dengan matriks $G = (I_3|M)$ dengan

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega \\ \overline{\omega} & 0 & \omega \\ \overline{\omega} & \overline{\omega} & 1 \end{pmatrix}.$$

Dari matriks

$$(I_3 + MR_3 \mid M + R_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \overline{\omega} & \omega & 1 & 1 & \omega & \overline{\omega} \\ \omega & 1 & \overline{\omega} & \overline{\omega} & 1 & \omega \\ 1 & \overline{\omega} & \omega & \omega & \overline{\omega} & 1 \end{array}\right)$$

diperoleh kode

$$\phi\left(\mathcal{C}\right) = \{\overline{\omega}\omega 11\omega\overline{\omega}, \omega 1\overline{\omega}\overline{\omega}1\omega, 1\overline{\omega}\omega\omega\overline{\omega}1\}$$

$$\phi\left(\mathcal{C}\right) = \{\text{GCTTCG}, \text{CTGGTC}, \text{TGCCGT}\}.$$

Karena $\mathbf{1} \notin \phi(\mathcal{C})$, maka tidak ada kodekata *self-reverse-complementary* sehingga

$$GCW_{\mathcal{D}}\left(a,b\right) = \frac{CWE_{\mathcal{C}}\left(a,a,b,b\right)}{2} = \frac{2a^6 + 30a^4b^2 + 30a^2b^6 + 2b^6}{2}$$

$$= a^6 + 15a^4b^2 + 15a^2b^4 + b^6.$$

Selanjutnya, buang kodekata $\mathbf{x}$ yang juga memuat $\mathbf{x}^r$.

Akibatnya, kode DNA dengan 15 kodekata yang memenuhi batasan-RC dengan $d = 3$ dan konten-GC dengan $k = 4$ adalah

CGTTGC	CGGCAA	TCGGCT	AACGGC
ACGCTC	CAGGAC	CTCGCA	TGGTCC
GTGAGC	CCTGGT	CGAGTG	GCGTGA
CCGAAG	AGTGCG	GAAGCC	

Salah satu yang menjadi perbedaan penelitian ini dengan pendahulunya adalah perhitungan contoh masih dilakukan secara manual. Namun penelitian ini menyusun ulang dan menambahkan bobot enumerator serta ketentuan untuk nilai k pada konten-GC dari b^k pada $GCW_{\mathcal{D}}$.

4. Kesimpulan

Dari kode *reversible self-dual* $\mathcal{C}$ atas lapangan hingga $GF(4)$ dapat dikontruksi kode DNA yang memenuhi batasan minimum Hamming, batasan-RC, dan batasan konten-GC. Kontruksi kode DNA. Sebelum menyusun algoritma kontruksi didefinisikan pemetaan linear $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{x}^r$ untuk $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ dan pemetaan proyeksi $\pi((\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n)) = \mathbf{u}_n$ untuk $\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n \in GF(4)^{\boldsymbol{n}}$ yang diperlukan dalam memenuhi ketiga batasan. Adapun pada langkah kontruksi kode DNA dibagi dalam dua kondisi yakni $\mathbf{1}$ berada di $\phi(\mathcal{C})$ dan $\mathbf{1}$ tidak berada di $\phi(\mathcal{C})$ yang mana dari kondisi yang terbagi ini dapat ditentukan jumlah kode kata dari bobot-GC pada kode DNA.

Referensi

[1] D. Limbachiya, B. Rao, and M. K. Gupta, "The Art of DNA Strings: Sixteen Years of DNA Coding Theory," *Arxiv Cornel University*, vol. 1607.00266, pp. 1–19, 2016.

[2] X. Wang and C. Liu, "A novel and effective image encryption algorithm based on chaos and DNA encoding," *Multimedia Tools and Applications*, vol. 76, no. 5, pp. 6229–6245, mar 2017, doi: http://dx.doi.org/10.1007/s11042-016-3311-8.

[3] P. Gaborit and O. D. King, "Linear constructions for DNA codes," *Theoretical Computer Science*, vol. 334, no. 1-3, pp. 99–113, apr 2005, doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.tcs.2004.11.004.

[4] I. Aisah, E. Kurniadi, and E. Carnia, "Representasi Mutasi Kode Genetik Standar Berdasarkan Basa Nukleotida," *Jurnal Matematika Integratif*, vol. 11, no. 1, pp. 25–34, apr 2015, doi: http://dx.doi.org/10.24198/jmi.v11.n1.9399.25-34.

[5] B. Feng, S. Bai, B. Chen, and X. Zhou, "The Constructions of DNA Codes from Linear Self-Dual Codes over Z4," in *International Conference on Computer Information Systems and Industrial Applications*, 2015, pp. 496–498, doi: http://dx.doi.org/10.2991/cisia-15.2015.135.

[6] H. K. Kim, D. K. Kim, and J. L. Kim, "Type I Codes over GF(4)," *Ars Comb.*, vol. 106, no. 4, pp. 173–191, 2012.

[7] T. Todorov and Z. Varbanov, "DNA codes based on additive self-dual codes over GF (4)," in *7th Int. Workshop on Optimal Codes and Related Topics, Albena, Bulgaria*, 2013, pp. 170–175.

[8] Z. Varbanov, T. Todorov, and M. Hristova, "A Method for Constructing Dna Codes from Additive Self-Dual Codes over GF(4)," *ROMAI J.*, vol. 10, no. 2, pp. 203–211, 2014.

[9] E. S. Oztas and I. Siap, "On a generalization of lifted polynomials over finite fields and their applications to DNA codes," *International Journal of Computer Mathematics*, vol. 92, no. 9, pp. 1976–1988, sep 2015, doi: http://dx.doi.org/10.1080/00207160.2014.930449.

[10] S. Oztas and I. Siap, "Lifted polynomials over F16 and their applications to DNA codes," *Filomat*, vol. 27, no. 3, pp. 459–466, 2013, doi: http://dx.doi.org/10.2298/FIL1303459O.

[11] H. Hong, L. Wang, H. Ahmad, J. Li, Y. Yang, and C. Wu, "Construction of DNA codes by using algebraic number theory," *Finite Fields and Their Applications*, vol. 37, pp. 328–343, jan 2016, doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.ffa.2015.10.008.

[12] D. H. Smith, N. Aboluion, R. Montemanni, and S. Perkins, "Linear and nonlinear constructions of DNA codes with Hamming distance d and constant GC-content," *Discrete Mathematics*, vol. 311, no. 13, pp. 1207–1219, jul 2011, doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2010.03.005.

[13] J. H. van Lint, *Introduction to Coding Theory*, ser. Graduate Texts in Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1992, vol. 86, doi: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-00174-5.

[14] M. Kelbert and Y. Suhov, *Information Theory and Coding by Example*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013, doi: http://dx.doi.org/10.1017/CBO9781139028448.

[15] K. Guenda, "New MDS self-dual codes over finite fields," *Designs, Codes and Cryptography*, vol. 62, no. 1, pp. 31–42, jan 2012, doi: http://dx.doi.org/10.1007/s10623-011-9489-x.

[16] S. Ling and C. Xing, *Coding Theory*. Cambridge University Press, feb 2004, doi: http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511755279.

[17] H. J. Kim, W.-H. Choi, and Y. Lee, "Construction of reversible self-dual codes," *Finite Fields and Their Applications*, vol. 67, p. 101714, oct 2020, doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.ffa.2020.101714.

[18] J. Doliskani and É. Schost, "Taking roots over high extensions of finite fields," *Mathematics of Computation*, vol. 83, no. 285, pp. 435–446, may 2013, doi: http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-2013-02715-9.

[19] J. L. Butar-Butar and Y. B. P. Siringoringo, "Kode Siklik Berulang dari Kode Linear F_p atas Lapangan Hingga $F_(p^l)$ dengan l Bilangan Prima Tertentu," *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, vol. 15, no. 2, pp. 231–240, jun 2021, doi: http://dx.doi.org/10.30598/barekengvol15iss2pp231-240.

[20] J. L. Butar-Butar, "Kode Self-Dual Siklik atas Ring Rantai Berhingga," *J. Curere*, vol. 4, no. 1, pp. 60–66, 2020, doi: http://dx.doi.org/10.36764/jc.v4i1.347.

[21] F. Gursoy, E. Segah Oztas, and I. Siap, "Reversible DNA codes over $F_{16} + uF_{16} + vF_{16} + uvF_{16}$," *Advances in Mathematics of Communications*, vol. 11, no. 2, pp. 307–312, 2017, doi: http://dx.doi.org/10.3934/amc.2017023.

[22] H. J. Kim, W.-H. Choi, and Y. Lee, "Designing DNA codes from reversible self-dual codes over GF(4)," *Discrete Mathematics*, vol. 344, no. 1, p. 112159, jan 2021, doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2020.112159.

[23] S. Yang, X. Kong, and C. Tang, "A construction of linear codes and their complete weight enumerators," *Finite Fields and Their Applications*, vol. 48, pp. 196–226, nov 2017, doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.ffa.2017.08.001.

This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License. Editorial of JJoM: Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo, Jln. Prof. Dr. Ing. B.J. Habibie, Moutong, Tilongkabila, Kabupaten Bone Bolango, Provinsi Gorontalo 96119, Indonesia.