

Penentuan Premi Tunggal Bersih pada *Reversionary Annuity* untuk Pasangan Suami Istri dengan Model *Frank's Copula*

Furlo Gilbert Godfrey¹, I Gusti Putu Purnaba², Ruhiyat^{3*}

^{1,2,3}Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Institut Pertanian Bogor, Bogor 16680, Indonesia

*Corresponding author. Email: ruhiyat-mat@apps.ipb.ac.id

ABSTRAK

Salah satu contoh produk anuitas *multi-life* (mencakup lebih dari satu orang) adalah *reversionary annuity*, yaitu produk anuitas hidup untuk dua orang tertanggung yang pembayaran anuitas akan dimulai setelah salah satu tertanggung yang telah ditentukan di kontrak meninggal terlebih dahulu sampai pihak tertanggung lainnya meninggal juga. Perhitungan premi anuitas tersebut biasanya dilakukan dengan mengasumsikan kebebasan peubah acak sisa waktu hidup antara pihak tertanggung. Namun, hal tersebut tidak relevan dengan keadaan sesungguhnya karena pasangan suami istri seharusnya saling terkait kelangsungan hidupnya. Penelitian ini memperhitungkan keterkaitan tersebut pada saat memodelkan sebaran bersama sisa waktu hidup antara pihak suami dan istri. Sebaran bersama sisa waktu hidup suami istri tersebut dimodelkan dengan *Frank's copula* yang dibangun dari sebaran marginal masing-masing pihak yang diasumsikan sebarannya mengikuti nilai mortalitas pada Tabel Mortalitas Indonesia IV tahun 2019 di mana nilai mortalitas pada usia *non-integer* diasumsikan juga mengikuti sebaran seragam (*uniform distribution of death*). Lebih lanjut, sebaran bersama yang dimodelkan dengan *copula* tersebut dibangun tepat pada saat suami dan istri menikah. Penelitian ini juga memperhitungkan premi tunggal bersih *reversionary annuity* untuk beberapa kasus penerima manfaat. Secara umum, hasil perhitungan premi tunggal bersih dengan sebaran bersama *Frank's copula* menghasilkan nilai lebih rendah dibandingkan dengan perhitungan asumsi kebebasan untuk semua kasus penerima manfaat. Selain itu, waktu pembelian anuitas juga memengaruhi besar nilai premi tunggal bersih yang mengalami peningkatan hingga pada suatu titik usia pernikahan tertentu lalu mengalami penurunan setelahnya.

Kata Kunci:

Frank's Copula; Pasangan Suami Istri; Premi Tunggal Bersih; Reversionary Annuity; Uniform Distribution of Death

ABSTRACT

One of the *multi-life annuity* products is a *reversionary annuity*, a life annuity product for two insured people. The annuity payment for this product will begin after one of the insured specified in the contract dies first until the other insured dies as well. The calculation of the annuity premium is usually done by assuming independence between the random variable of remaining life-times of the insured parties. However, this is not relevant to the actual situation because the husband and wife are interrelated with their lives. This study considered this relationship when modelling the joint distribution of the remaining life-times between husband and wife. *Frank's copula* was used to model the joint distribution

of the remaining life-times of husband and wife. It was built from marginal distribution, which was assumed to follow the mortality value in the 2019 Indonesian Mortality Table IV. The mortality value at non-integer ages was assumed to follow a uniform distribution (uniform distribution of death). Furthermore, the joint survival distribution modelled by copula was constructed exactly when husband and wife are married. This study also considered the net single premium of reversionary annuity for several beneficiary cases. In general, the results of the calculation of the net single premium with Frank's copula produced a lower value than the calculation of the assumption of independence for all beneficiary cases. In addition, the purchase time of an annuity also affects the net single premium, which increases up to a certain point of marriage age and then decreases thereafter.

Keywords:

Frank's Copula; Married Couple; Net Single Premium; Reversionary Annuity; Uniform Distribution of Death

Format Sitasi:

F. G. Godfrey, I. G. P. Purnaba and R. Ruhayat, "Penentuan Premi Tunggal Bersih pada Reversionary Annuity untuk Pasangan Suami Istri dengan Model Frank's Copula", *Jambura J. Math.*, vol. 4, No. 2, pp. 277–295, 2022, doi: <https://doi.org/10.34312/jjom.v4i2.13952>

1. Pendahuluan

Salah satu produk asuransi adalah anuitas hidup yang merupakan serangkaian pembayaran yang diberikan ke pihak tertanggung sampai suatu waktu yang telah ditentukan di dalam kontrak anuitas yang biasanya bergantung pada kelangsungan hidup seseorang. Selain produk anuitas hidup *single-life* (mencakup satu orang tertanggung), tersedia juga produk anuitas hidup *multi-life* (mencakup beberapa orang tertanggung). Salah satu contoh produk anuitas *multi-life* adalah *reversionary annuity*, yaitu produk anuitas hidup untuk dua orang tertanggung yang pembayaran anuitasnya akan dimulai setelah salah satu tertanggung yang telah ditentukan di kontrak meninggal terlebih dahulu sampai pihak tertanggung lainnya meninggal juga. Studi mengenai *reversionary annuity* relevan ketika mempelajari asuransi untuk janda/duda dan anak yatim piatu [1].

Salah satu cara untuk menilai harga suatu anuitas adalah dengan menentukan premi tunggal bersih produk anuitas tersebut. Perhitungan premi tunggal bersih untuk anuitas hidup *multi-life* memerlukan sebaran bersama dari sisa waktu hidup para tertanggung di dalam asuransi tersebut. Secara tradisional, estimasi peluang sisa waktu hidup bersama dilakukan dengan mengasumsikan kebebasan sisa waktu hidup para tertanggung. Dengan asumsi ini, peluang kelangsungan hidup bersama adalah perkalian dari peluang kelangsungan hidup setiap pihak tertanggung. Asumsi ini menyederhanakan estimasi bersama menjadi suatu masalah estimasi individu [2]. Namun hal ini tidak relevan dengan apa yang sebenarnya terjadi di kehidupan. Salah satu contoh kasus kelangsungan hidup dari pihak-pihak tertanggung yang tidak saling bebas adalah asuransi yang tertanggungnya adalah pasangan suami istri. Hal ini dikarenakan suami dan istri terpapar oleh risiko yang hampir sama karena sebagian besar waktunya dihabiskan bersama [3].

Studi lebih lanjut mengindikasikan bahwa "*broken heart syndrome*" ataupun "*widowhood effect*" dapat menaikkan tingkat kematian setelah pasangannya meninggal [4–7]. Studi-studi terdahulu menyimpulkan bahwa terdapat kenaikan tingkat risiko kematian bagi pasangan yang berduka dalam kurun waktu kurang lebih 6 bulan pertama setelah pasangannya meninggal [4–7]. Studi yang dilakukan Elwert dan Christakis [8] juga mendapatkan hasil bahwa meninggalnya pasangan menaikkan tingkat kematian pada

semua penyebab kematian untuk pasangan yang sedang berduka atau ditinggalkan. Selain itu, studi terkait ilmu aktuaria pada perhitungan tingkat mortalitas yang dilakukan oleh Margus [9] sejalan dengan studi sebelumnya terkait "*widowhood effect*". Hasilnya mengindikasikan bahwa individu yang sudah menikah dan pasangannya masih hidup memiliki tingkat mortalitas lebih rendah dibandingkan individu yang sedang lajang, namun individu yang pasangannya sudah meninggal memiliki tingkat mortalitas lebih tinggi. Hasil-hasil studi tersebut mengindikasikan perlunya model sebaran bersama yang menangkap keterkaitan antarpihak tertanggung, yaitu pasangan suami istri, pada saat perhitungan premi.

Studi-studi terkait perhitungan harga asuransi, sebagian besar, menggunakan model *copula* untuk memodelkan sebaran bersama dari pihak tertanggung yang memperhitungkan keterkaitan antarpihak tertanggungnya. Beberapa contoh studi tersebut ialah Frees *et al.* [2] yang menggunakan model *Frank's copula* dengan fungsi sebaran marginal Gompertz untuk menilai anuitas hidup, Youn *et al.* [10] yang menggunakan *Gumbel-Hougaard's copula* dengan fungsi sebaran marginal Weibull untuk menentukan harga dari asuransi jiwa *joint-life*, dan Luciano *et al.* [11] yang menggunakan model *1-Parameter Archimedean copula* dan *2-Parameter Archimedean copula* untuk menentukan harga *reversionary annuity*. Studi-studi tersebut menunjukkan bahwa terdapat perbedaan harga premi suatu produk asuransi *multi-life* antara perhitungan dengan asumsi kebebasan dan dengan asumsi keterkaitan di mana perbedaannya bergantung pada jenis produk asuransinya.

Penelitian ini juga mengaplikasikan model *copula* untuk memodelkan sebaran bersama dari pihak-pihak tertanggung yang dibangun dari suatu sebaran marginal sisa waktu hidup dari masing-masing pihak, yaitu suami dan istri. Namun, kali ini sebaran marginal suami dan istri langsung menggunakan nilai mortalitas pada Tabel Mortalitas Indonesia IV tahun 2019 di mana nilai mortalitas pada usia *non-integer* dihitung menggunakan asumsi *uniform distribution of death (UDD)*. Selanjutnya, muncul pertanyaan lain terkait pemodelan *copula* tersebut, yaitu pada umur-umur berapa sebaiknya model *copula* tersebut diterapkan? Carriere [12] merekomendasikan untuk menerapkan model *copula* tepat pada umur dari pihak-pihak yang bersangkutan menikah. Hal ini masuk akal karena kedua belah pihak baru akan saling bergantung hidupnya setelah hari pernikahan. Konsep tersebut digunakan pada penelitian ini saat memodelkan sebaran bersama dengan model *copula*.

Prosedur pada studi-studi sebelumnya sebagian besar diawali dengan mengestimasi sebaran marginal tertentu (biasanya sebaran Gompertz-Makeham atau Weibull) bagi masing-masing pihak, suami dan istri, sebelum dimodelkan sebaran bersamanya dengan *copula*. Namun hal ini dapat menjadi hambatan karena keterbatasan data mengenai waktu hidup pasangan suami istri yang menikah pada kombinasi usia waktu tertentu. Tujuan utama pada penelitian ini adalah untuk memberikan prosedur alternatif untuk menentukan sebaran bersama bagi pasangan suami istri dengan hanya bermodalkan pada suatu tabel mortalitas. Oleh sebab itu, berdasarkan sebaran bersama tersebut dapat dihitung pula nilai premi tunggal bersih dari suatu produk asuransi, yang kali ini produk asuransinya adalah *reversionary annuity*. Selain itu, akan dianalisis juga pengaruh waktu pembelian anuitas yang dibeli tepat pada saat hari pernikahan atau beberapa tahun setelah pernikahan (tepat pada saat ulang tahun pernikahan) dan juga pengaruh pihak penerima manfaat yang telah didefinisikan pada kontrak.

2. Metode

Data pada penelitian ini adalah data mortalitas yang terdapat pada Tabel Mortalitas Indonesia IV tahun 2019 (TMI IV). Data yang digunakan adalah nilai-nilai peluang kematian dalam satu tahun ke depan bagi laki-laki berusia x yang dinotasikan $q_x^{m(TMI)}$ dan nilai-nilai peluang kematian dalam satu tahun ke depan bagi perempuan berusia x yang dinotasikan $q_x^{f(TMI)}$.¹ Selain itu, terdapat *limiting age* hingga usia $\omega = 112$ bagi laki-laki maupun perempuan sehingga nilai pada tabel tersebut tersedia untuk usia $x \in \{0, 1, 2, \dots, 111\}$. Pada penelitian ini, diasumsikan bahwa pihak tertanggung pada *reversionary annuity* adalah pasangan suami istri yang pernikahannya terjadi ketika suami berusia tepat 26 tahun dan istri berusia tepat 24 tahun.

2.1. Model Sebaran Survival Marginal

Sebaran kelangsungan hidup bagi para pihak diasumsikan mengikuti nilai mortalitas pada TMI IV di mana nilai mortalitas pada usia *non-integer* diinterpolasi dengan asumsi *uniform distribution of death (UDD)*.

2.1.1. Model Sebaran Survival Single-Life TMI IV dengan Asumsi UDD

Misalkan (x) menyatakan individu yang berusia x , maka T_x adalah peubah acak kontinu bagi waktu hingga kematian bagi (x) . Sebaran *survival* marginal bagi (x) dapat dinyatakan sebagai peluang bagi (x) akan tetap bertahan hidup paling tidak hingga mencapai usia $x+t$ yang dapat ditulis sebagai

$${}_t p_x = S_{T_x}(t) = \Pr(T_x > t) \tag{1}$$

untuk $0 \leq t \leq \omega - x$. Sebaran *survival* marginal pada Persamaan (1) dapat dievaluasi untuk nilai-nilai x dan t yang bernilai *integer* menggunakan nilai mortalitas pada TMI IV yang dapat ditulis sebagai

$${}_t p_x = \prod_{i=0}^{t-1} p_{x+i}^{(TMI)} = \prod_{i=0}^{t-1} (1 - q_{x+i}^{(TMI)}) \tag{2}$$

untuk $x = 0, 1, 2, \dots, \omega - 1$ dan $t = 1, 2, \dots, \omega - x$. Di samping itu, berdasarkan asumsi *UDD*, sebaran *survival* marginal bagi (x) dapat ditulis sebagai

$${}_t p_x = 1 - {}_t q_x = 1 - t q_x^{(TMI)} \tag{3}$$

untuk $x = 0, 1, \dots, \omega - 1$ dan $0 \leq t \leq 1$ [13]. Menggunakan Persamaan (2) dan (3) akan didapatkan persamaan umum sebaran *survival* marginal bagi (x) , yaitu

¹ Notasi superscript *m* menyatakan *male* (laki – laki) sehingga juga merujuk pada suami sementara superscript *f* menyatakan *female* (perempuan) sehingga juga merujuk pada istri. Sementara itu, superscript (TMI) menyatakannilai mortalitas berdasarkan Tabel Mortalitas Indonesia IV.

$${}_t p_x = \begin{cases} (1 - tq_x^{(TMI)}), & 0 \leq t \leq 1 \\ p_x (1 - (t-1)q_{x+1}^{(TMI)}), & 1 < t \leq 2 \\ 2p_x (1 - (t-2)q_{x+2}^{(TMI)}), & 2 < t \leq 3 \\ \vdots \\ \omega - x - 1 p_x (1 - (t - (\omega - x - 1))q_{\omega-1}^{(TMI)}), & \omega - x - 1 < t \leq \omega - x \end{cases}$$

$${}_t p_x = {}_{\lfloor t \rfloor} p_x (1 - (t - \lfloor t \rfloor)q_{x+\lfloor t \rfloor}^{(TMI)}), \quad 0 \leq t \leq \omega - x$$

sehingga dapat dinyatakan sebagai

$${}_t p_x = \left[\prod_{i=0}^{\lfloor t \rfloor - 1} (1 - q_{x+i}^{(TMI)}) \right] [1 - (t - \lfloor t \rfloor)q_{x+\lfloor t \rfloor}^{(TMI)}] \tag{4}$$

untuk $x = 0, 1, \dots, \omega - 1$ dan $0 \leq t \leq \omega - x$.

2.1.2. Model Sebaran *Survival* Marginal Laki-laki 26 Tahun dan Perempuan 24 Tahun

Misalkan (26^m) dan (24^f) berturut-turut menyatakan laki-laki yang berusia 26 tahun dan perempuan yang berusia 24 tahun, maka T_{26}^m dan T_{24}^f adalah peubah acak kontinu bagi waktu hingga kematian bagi (26^m) dan (24^f) . Berdasarkan sub-subbab 2.1.1, sebaran *survival* marginal bagi (26^m) akan tetap bertahan hidup paling tidak hingga mencapai usia $26+t$ dapat dinyatakan seperti pada Persamaan (1) dan (4) yaitu

$$\begin{aligned} \Pr(T_{26}^m > t) &= S_{T_{26}^m}(t) \\ &= {}_t p_{26}^m = \left[\prod_{i=0}^{\lfloor t \rfloor - 1} (1 - q_{26+i}^{m(TMI)}) \right] [1 - (t - \lfloor t \rfloor)q_{26+\lfloor t \rfloor}^m] \end{aligned} \tag{5}$$

untuk $0 \leq t \leq 86$ ($\omega - x = 112 - 26 = 86$). Sementara itu, sebaran *survival* marginal bagi (24^f) akan tetap bertahan hidup paling tidak hingga mencapai usia $24+t$ dinyatakan dengan

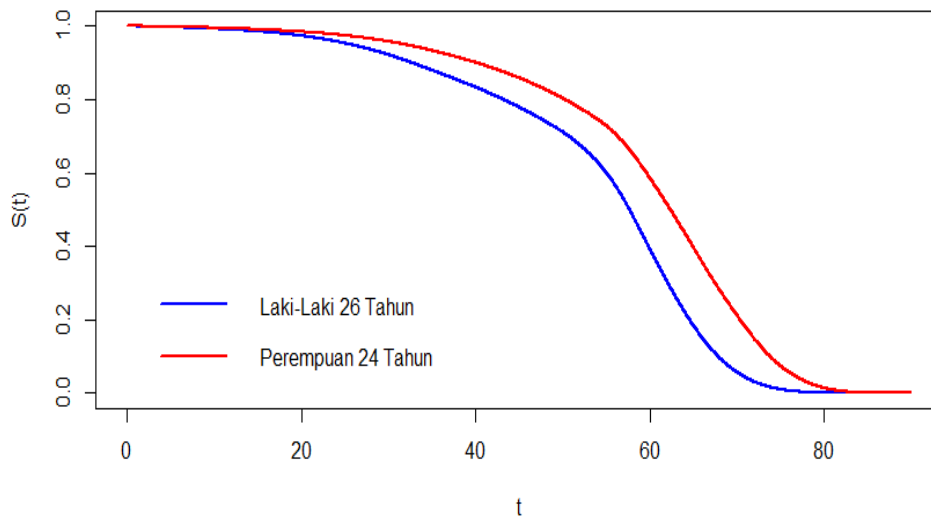
$$\begin{aligned} \Pr(T_{24}^f > t) &= S_{T_{24}^f}(t) \\ &= {}_t p_{24}^f = \left[\prod_{i=0}^{\lfloor t \rfloor - 1} (1 - q_{24+i}^{f(TMI)}) \right] [1 - (t - \lfloor t \rfloor)q_{24+\lfloor t \rfloor}^f] \end{aligned} \tag{6}$$

untuk $0 \leq t \leq 88$ ($\omega - x = 112 - 24 = 88$). Grafik sebaran *survival* marginal bagi laki-laki 26 tahun dan perempuan 24 tahun diberikan pada Gambar 1.

2.2. Model Sebaran *Survival* Bersama

Sebaran kelangsungan hidup bersama dari para pihak akan dimodelkan dengan asumsi kebebasan dan dengan asumsi keterkaitan menggunakan *Frank's copula survival*. Pemodelan sebaran bersama menggunakan empat nilai ukuran keterkaitan *Kendall's tau*,

yaitu $\tau = 0$ untuk keterkaitan yang saling bebas, $\tau = 0.25$ untuk keterkaitan lemah, $\tau = 0.50$ untuk keterkaitan sedang, dan $\tau = 0.75$ untuk keterkaitan kuat.



Gambar 1. Grafik sebaran *survival* marginal laki-laki 26 tahun dan perempuan 24 tahun

2.2.1. Model Sebaran *Survival* Bersama Asumsi Saling Bebas

Misalkan (x) dan (y) berturut-turut menyatakan individu yang berusia x dan y , maka T_x dan T_y berturut-turut adalah peubah acak kontinu bagi waktu hingga kematian bagi (x) dan (y) . Sebaran *survival* bersama bagi (x) dan (y) dapat dinyatakan sebagai peluang bersama (x) dan (y) akan tetap bertahan hidup paling tidak hingga masing-masing mencapai usia $x+t_x$ dan $y+t_y$ yang dapat ditulis sebagai

$$S_{T_x, T_y}(t_x, t_y) = \Pr(T_x > t_x \wedge T_y > t_y) \tag{7}$$

untuk $0 \leq t_x \leq \omega - x$ dan $0 \leq t_y \leq \omega - y$. Jika T_x dan T_y diasumsikan saling bebas, sebaran *survival* bersamanya pada Persamaan (7) dapat dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} S_{T_x, T_y}(t_x, t_y) &= \Pr(T_x > t_x \wedge T_y > t_y) \\ &= \Pr(T_x > t_x) \Pr(T_y > t_y) \\ &= S_{T_x}(t_x) S_{T_y}(t_y) \end{aligned}$$

sehingga dapat ditulis sebagai

$$S_{T_x, T_y}(t_x, t_y) = (t_x p_x) (t_y p_y) \tag{8}$$

untuk $0 \leq t_x \leq \omega - x$ dan $0 \leq t_y \leq \omega - y$.

2.2.2. Model Sebaran *Survival* Bersama dengan *Frank's Copula Survival*

Frank's copula merupakan salah satu jenis *Archimedean copula*² dengan fungsi pembangkit yang dapat ditulis sebagai

$$\phi(t; \theta) = -\ln \left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right) \quad (9)$$

sehingga fungsi ϕ pada Persamaan (9) membangkitkan sebuah *bivariate copula* berikut

$$C(u, v; \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right) \quad (10)$$

untuk $\theta \neq 0$ dan $0 \leq u, v \leq 1$. Nilai parameter θ dapat ditentukan melalui hubungan antara ukuran keterkaitan *Kendall's* τ dengan parameter *Archimedean copula*. Misalkan X dan Y merupakan peubah acak kontinu dengan *Archimedean copula* C yang dibangkitkan dari fungsi pembangkit ϕ . Ukuran keterkaitan *Kendall's* τ adalah sebagai berikut

$$\tau_{X,Y} = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(t; \theta)}{\frac{d}{dt} \phi(t; \theta)} dt. \quad (11)$$

Lebih lanjut, *Frank's copula* merupakan satu-satunya *Archimedean copula* yang memiliki sifat *radial symmetry* sehingga fungsi $C = \bar{C}$ [14]. Akibatnya, fungsi *bivariate copula survival* dari *Frank's copula* dapat ditulis seperti pada Persamaan (10) sebagai

$$\bar{C}(u, v; \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right) \quad (12)$$

untuk $\theta \neq 0$ dan $0 \leq u, v \leq 1$. Lalu, Nelsen [14] membuktikan bahwa teorema Sklar³ juga berlaku untuk fungsi sebaran *survival* bersama, yaitu misalkan $S_{X,Y}$ adalah suatu fungsi sebaran *survival* bersama bagi X dan Y dengan sebaran *survival* marginal S_X dan S_Y , maka terdapat sebuah *copula survival* \bar{C} sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku

$$S_{X,Y}(x, y) = \bar{C}(S_X(x), S_Y(y)). \quad (13)$$

Berdasarkan teorema pada Persamaan (13) dan dengan menggunakan *Frank's copula survival* pada Persamaan (12), fungsi sebaran *survival* bersama bagi T_x dan T_y dapat dinyatakan dengan

² Jika terdapat fungsi pembangkit ϕ yang membangkitkan sebuah *bivariate copula* berikut $C(u, v) = \begin{cases} \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v)), & \phi(u) + \phi(v) \leq \phi(0) \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$ untuk $0 \leq u, v \leq 1$, maka fungsi *copula* C tersebut disebut *Archimedean copula*.

³ Misalkan $F_{X,Y}$ adalah suatu fungsi sebaran kumulatif bersama bagi X dan Y dengan sebaran kumulatif marginal F_X dan F_Y , maka terdapat sebuah *copula* C sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku $F_{X,Y}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$.

$$S_{T_x, T_y}(t_x, t_y) = \bar{C}(S_{T_x}(t_x), S_{T_y}(t_y)) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta(S_{T_x}(t_x))} - 1)(e^{-\theta(S_{T_y}(t_y))} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right)$$

sehingga dapat ditulis sebagai

$$S_{T_x, T_y}(t_x, t_y) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta(t_x p_x)} - 1)(e^{-\theta(t_y p_y)} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right). \quad (14)$$

untuk $0 \leq t_x \leq \omega - x$ dan $0 \leq t_y \leq \omega - y$, asalkan diketahui sebaran *survival* marginal bagi T_x dan T_y , yaitu S_{T_x} dan S_{T_y} .

2.2.3. Model Sebaran *Survival* Bersama Pasangan Suami Istri

Karena pihak bertanggung adalah suami istri yang menikah saat suami berusia tepat 26 tahun dan istri berusia tepat 24 tahun, pemodelan sebaran *survival* bersama akan dibangun dari sebaran *survival* marginal laki-laki 26 tahun (${}_t p_{26}^m$) dan perempuan 24 tahun (${}_t p_{24}^f$)⁴. Sebaran *survival* bersama mereka dapat dinyatakan sebagai peluang bersama (26^m) dan (24^f) masing-masing akan tetap bertahan hidup paling tidak hingga usia masing-masing mencapai $26+t_m$ dan $24+t_f$ yang dapat ditulis sebagai

$$S_{T_{26}^m, T_{24}^f}(t_m, t_f) = \Pr(T_{26}^m > t_m \wedge T_{24}^f > t_f) \quad (15)$$

untuk $0 \leq t_m \leq 86$ dan $0 \leq t_f \leq 88$.

Berdasarkan sub-subbab 2.2.1, jika T_{26}^m dan T_{24}^f diasumsikan saling bebas, Persamaan (15) dapat ditulis seperti pada Persamaan (8), yaitu

$$S_{T_{26}^m, T_{24}^f}(t_m, t_f) = ({}_t p_x^m) ({}_t p_y^f) \quad (16)$$

untuk $0 \leq t_m \leq 86$ dan $0 \leq t_f \leq 88$ di mana ${}_t p_x^m$ diberikan pada Persamaan (5) dan ${}_t p_y^f$ diberikan pada Persamaan (6).

Berdasarkan sub-subbab 2.2.2, jika T_{26}^m dan T_{24}^f diasumsikan saling berkaitan dan dimodelkan dengan *Frank's copula survival*, Persamaan (15) dapat ditulis seperti pada persamaan (14), yaitu

⁴ Kelangsungan hidup pihak suami dan istri akan saling berkaitan setelah mereka menikah (sebelum pernikahan, kelangsungan hidup mereka saling bebas karena belum hidup bersama). Hal ini juga diterapkan pada studi yang dilakukan oleh Debicka, et al. [16], di mana pemodelan copula diterapkan saat pertama kali mereka bertemu (pada studi ini tepat pada saat menikah).

$$S_{T_{26}^m, T_{24}^f}(t_m, t_f) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{\left(e^{-\theta(t_m p_x^m)} - 1 \right) \left(e^{-\theta(t_f p_y^f)} - 1 \right)}{e^{-\theta} - 1} \right) \quad (17)$$

untuk $0 \leq t_m \leq 86$ dan $0 \leq t_f \leq 88$ di mana ${}_m p_x^m$ diberikan pada Persamaan (5) dan ${}_f p_y^f$ diberikan pada Persamaan (6), dengan nilai θ ditentukan berdasarkan beberapa nilai *Kendall's* τ yang telah diasumsikan menggunakan hubungan antara *Kendall's* τ dan parameter *Archimedian copula* seperti yang telah dinyatakan pada Persamaan (11). Hasil perhitungan parameter berdasarkan beberapa nilai *Kendall's* τ disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Hasil perhitungan parameter *Frank's Copula*

Ukuran Keterkaitan	$\tau^*)$	$\theta^{**})$
Saling Bebas	0.00	— ^{***)}
Keterkaitan Lemah	0.25	2.37757
Keterkaitan Sedang	0.50	5.74756
Keterkaitan Kuat	0.75	14.14028

*) τ menyatakan nilai korelasi *Kendall's tau* yang diasumsikan.

***) θ merupakan parameter pada *Frank's copula*.

****) Karena $\tau = 0$ tidak terdefinisi untuk *Frank's copula* (tidak menghasilkan *independence copula*), kasus saling bebas akan langsung menggunakan Persamaan (16).

2.3. Premi Tunggal Bersih *Reversionary Annuity*

Perhitungan premi tunggal bersih *reversionary annuity* menggunakan tingkat bunga kontinu tahunan yang konstan sebesar $\delta = 5\%$ per tahun dan manfaat dibayarkan secara kontinu ke pihak penerima manfaat dengan tingkat pembayaran sebesar 1 satuan/tahun. Lebih lanjut, pembelian anuitas tersebut dilakukan tepat saat hari pernikahan (yaitu saat suami dan istri berturut-turut berusia 26 dan 24) atau beberapa tahun setelah hari pernikahan (yaitu saat suami dan istri berusia $26 + s$ dan $24 + s$). Usia $26 + s$ dan $24 + s$ merupakan usia suami dan istri saat membeli anuitas, sementara s merupakan selisih usia antara usia saat pernikahan dan usia saat membeli anuitas (atau s sama saja dengan usia pernikahan). Penelitian ini menghitung premi tunggal bersih *reversionary annuity* hingga usia pernikahan saat pembelian anuitas mencapai usia 84 tahun, sehingga nilai s yang mungkin adalah $s = 0, 1, 2, \dots, 84$. Penelitian ini juga memperhitungkan premi tunggal bersih pada *reversionary annuity* untuk tiga kasus penerima manfaat berikut:

1. Kasus pertama, premi tunggal bersih *reversionary annuity* di mana manfaatnya diberikan kepada pihak istri setelah kematian pihak suami.
2. Kasus kedua, premi tunggal bersih *reversionary annuity* di mana manfaatnya diberikan kepada pihak suami setelah kematian pihak istri.
3. Kasus ketiga, premi tunggal bersih *reversionary annuity* di mana manfaatnya diberikan kepada pihak terakhir yang masih bertahan hidup setelah kematian pertama dari salah satu pihak.

Sebelum menentukan premi tunggal bersih *reversionary annuity* untuk beberapa kasus di

atas, diberikan formula umum premi tunggal bersih *reversionary annuity*. Misalkan pada suatu kontrak *reversionary annuity*, di mana pihak tertanggungnya adalah (x) dan (y), pihak yang berhak menerima manfaat adalah (y) setelah kematian (x).⁵ Premi tunggal bersih bagi kontrak tersebut dinyatakan sebagai

$$\bar{a}_{x|y} = \bar{a}_y - \bar{a}_{xy}. \tag{18}$$

Secara umum, berdasarkan Persamaan (18), untuk menentukan premi tunggal bersih *reversionary annuity*, kita hanya perlu menentukan premi tunggal bersih anuitas hidup bagi pihak yang berhak menerima manfaat (pada kontrak ini adalah (y) sehingga premi tunggal bersihnya adalah \bar{a}_y) dikurangi premi tunggal bersih anuitas hidup status *joint-life*,⁶ yaitu \bar{a}_{xy} . Lebih khusus, premi tunggal bersih suatu anuitas hidup dihitung dengan

$$\bar{a}_x = \int_{\forall t} e^{-\delta t} {}_t p_x dt \tag{19}$$

yaitu faktor diskon pada waktu t dikali fungsi sebaran *survival* bagi status yang dimaksud (pada Persamaan (19) dimaksudkan untuk (x) sehingga sebaran *survival*-nya ialah ${}_t p_x$) lalu diintegrasikan pada semua nilai t yang mungkin.

Berdasarkan pernyataan di atas, penentuan premi tunggal bersih *reversionary annuity* pada penelitian ini terlebih dahulu perlu ditentukan premi tunggal bersih anuitas hidup status *joint-life* bagi pasangan suami istri tersebut yang pembelian anuitasnya tepat terjadi pada s tahun setelah hari pernikahan [15]. Karena *reversionary annuity* sejatinya merupakan produk anuitas hidup yang melibatkan lebih dari satu pihak tertanggung, maka pada saat pembelian anuitas tersebut perlu dijamin bahwa suami dan istri keduanya masih tetap bertahan hidup hingga waktu pembelian anuitas tersebut (keduanya masih hidup selama s tahun setelah hari pernikahan). Jadi, fungsi sebaran *survival* bagi status *joint-life* pasangan suami istri tersebut dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} {}_t P_{(26+s)^m:(24+s)^f} &= \Pr \left(T_{(26+s)^m:(24+s)^f} > t \mid T_{26}^m > s \wedge T_{24}^f > s \right)^7 \\ &= \Pr \left(T_{26^m:24^f} > s + t \mid T_{26}^m > s \wedge T_{24}^f > s \right) \\ &= \Pr \left(T_{26}^m > s + t \wedge T_{24}^f > s + t \mid T_{26}^m > s \wedge T_{24}^f > s \right) \\ &= \frac{\Pr \left(T_{26}^m > s + t \wedge T_{24}^f > s + t \right)}{\Pr \left(T_{26}^m > s \wedge T_{24}^f > s \right)} \end{aligned}$$

⁵ Kontrak ini bisa hangus jika pihak yang meninggal pertama adalah (y), sehingga (x) tidak akan menerima manfaat walaupun masih hidup.

⁶ (xy) menyatakan status *joint – life* yang pesertanya adalah (x) dan (y), yaitu status yang tetap bertahan jika semua peserta yang terlibat di dalam status tersebut semuanya masih bertahan hidup [15]. T_{xy} merupakan peubah acak waktu hingga kegagalan status tersebut dan sebaran *survival* status tersebut dinyatakan sebagai ${}_t p_{xy} = \Pr (T_{xy} > t) = \Pr (T_x > t \wedge T_y > t) = S_{T_x, T_y} (t, t)$ untuk $0 \leq t \leq \min \{ \omega - x, \omega - y \}$.

⁷Pada Kenyatannya ${}_t P_{(26+s)^m:(24+s)^f} = \Pr \left(T_{(26+s)^m:(24+s)^f} > t \mid T_{26}^m > s \wedge T_{24}^f > s \right) = \Pr \left(T_{(26+s)^m:(24+s)^f} > t \right)$.

sehingga dapat ditulis sebagai

$${}_tP_{(26+s)^m:(24+s)^f} = \frac{S_{T_{26}^m, T_{24}^f}(s+t, s+t)}{S_{T_{26}^m, T_{24}^f}(s, s)} \quad (20)$$

untuk $0 \leq t \leq 86 - s$ di mana $S_{T_{26}^m, T_{24}^f}(t_m, t_f)$ diberikan pada Persamaan (16) jika menggunakan asumsi saling bebas dan Persamaan (17) jika menggunakan asumsi saling berkaitan. Menggunakan fungsi sebaran *survival* status *joint-life* pada Persamaan (20), premi tunggal bersih anuitas hidup yang memberikan pembayaran secara kontinu dengan tingkat 1 satuan/tahun selama sepasang suami dan istri masih hidup (status *joint-life*) di mana anuitas dibeli pada saat suami berusia tepat $26 + s$ dan istri berusia tepat $24 + s$ dapat dihitung dengan rumus berikut:

$$\bar{a}_{(26+s)^m:(24+s)^f} = \int_0^{86-s} e^{-\delta t} {}_tP_{(26+s)^m:(24+s)^f} dt \quad (21)$$

untuk $s = 0, 1, 2, \dots, 84$.

2.3.1. Premi Tunggal Bersih *Reversionary Annuity* Kasus 1

Sebelum menentukan premi tunggal bersih *reversionary annuity* kasus 1 di mana penerima manfaatnya adalah istri (setelah suami meninggal), perlu ditentukan premi tunggal bersih dari anuitas hidup *single-life* untuk pihak istri. Perhitungan premi tunggal bersih anuitas seumur hidup bagi pihak istri membutuhkan fungsi sebaran marginal *survival* bagi pihak istri di usia saat membeli anuitas. Lebih lanjut, seperti yang telah dijelaskan pada subbab 2.3, saat membeli suatu anuitas hidup yang melibatkan pihak tertanggung lebih dari satu, jelas bahwa semua pihak tersebut haruslah tetap hidup pada saat pembelian anuitas yang dalam penelitian ini adalah pasangan suami istri. Akibatnya, fungsi sebaran marginal *survival* bagi pihak istri ketika pembelian anuitas dilakukan s tahun setelah hari pernikahan adalah

$$\begin{aligned} {}_tP_{24+s|T_{26}^m > s}^f &= \Pr(T_{24+s}^f > t \mid T_{26}^m > s) \\ &= \Pr(T_{24}^f > s+t \mid T_{26}^m > s \wedge T_{24}^f > s) \\ &= \frac{\Pr(T_{26}^m > s \wedge T_{24}^f > s+t)}{\Pr(T_{26}^m > s \wedge T_{24}^f > s)} \end{aligned}$$

sehingga dapat ditulis sebagai

$$\bar{a}_{(26+s)^m:(24+s)^f} = \int_0^{86-s} e^{-\delta t} {}_tP_{(26+s)^m:(24+s)^f} dt \quad (22)$$

untuk $0 \leq t \leq 88 - s$ di mana $S_{T_{26}^m, T_{24}^f}(t_m, t_f)$ diberikan pada Persamaan (16) jika menggunakan asumsi saling bebas dan Persamaan (17) jika menggunakan asumsi saling berkaitan. Menggunakan fungsi sebaran marginal *survival* bagi pihak istri pada Persamaan (22), premi tunggal bersih anuitas hidup yang memberikan pembayaran

secara kontinu dengan tingkat 1 satuan/tahun untuk seorang istri berumur $24 + s$ di mana suaminya masih hidup pada saat pembelian anuitas dapat dihitung dengan rumus berikut:

$$\bar{a}_{24+s}^f = \int_0^{88-s} e^{-\delta t} {}_t p_{24+s}^f |_{T_{26}^m > s} dt. \tag{23}$$

Berdasarkan konsep pada Persamaan (18), premi tunggal bersih *reversionary annuity* kasus 1 dapat dihitung menggunakan hasil perhitungan premi tunggal bersih pada Persamaan (21) dan (23), sehingga menghasilkan

$$\bar{a}_{(26+s)^m | (24+s)^f} = \bar{a}_{24+s}^f - \bar{a}_{(26+s)^m : (24+s)^f} \tag{24}$$

untuk $s = 0, 1, 2, \dots, 84$.

2.3.2. Premi Tunggal Bersih *Reversionary Annuity* Kasus 2

Sejalan seperti pada subbab 2.3.1, fungsi sebaran marginal *survival* bagi pihak suami ketika pembelian anuitas dilakukan s tahun setelah hari pernikahan adalah

$$\begin{aligned} {}_t p_{26+s}^m |_{T_{24}^f > s} &= \Pr \left(T_{26+s}^m > t \mid T_{24}^f > s \right) \\ &= \Pr \left(T_{26}^m > s + t \mid T_{26}^m > s \wedge T_{24}^f > s \right) \\ &= \frac{\Pr \left(T_{26}^m > s + t \wedge T_{24}^f > s \right)}{\Pr \left(T_{26}^m > s \wedge T_{24}^f > s \right)} \end{aligned}$$

sehingga dapat ditulis sebagai

$${}_t p_{26+s}^m |_{T_{24}^f > s} = \frac{S_{T_{26}^m, T_{24}^f}(s + t, s)}{S_{T_{26}^m, T_{24}^f}(s, s)} \tag{25}$$

untuk $0 \leq t \leq 86 - s$ di mana $S_{T_{26}^m, T_{24}^f}(t_m, t_f)$ diberikan pada Persamaan (16) jika menggunakan asumsi saling bebas dan Persamaan (17) jika menggunakan asumsi saling berkaitan. Menggunakan fungsi sebaran marginal *survival* bagi pihak suami pada Persamaan (25), premi tunggal bersih anuitas hidup yang memberikan pembayaran secara kontinu dengan tingkat 1 satuan/tahun untuk seorang suami berumur $26 + s$ di mana istrinya masih hidup pada saat pembelian anuitas dapat dihitung dengan rumus berikut:

$$\bar{a}_{26+s}^m = \int_0^{86-s} e^{-\delta t} {}_t p_{26+s}^m |_{T_{24}^f > s} dt. \tag{26}$$

Berdasarkan konsep pada Persamaan (18), premi tunggal bersih *reversionary annuity* kasus 2 dapat dihitung menggunakan hasil perhitungan premi tunggal bersih pada Persamaan (21) dan (26), sehingga menghasilkan

$$\bar{a}_{(24+s)^f | (26+s)^m} = \bar{a}_{24+s}^m - \bar{a}_{(26+s)^m : (24+s)^f} \tag{27}$$

untuk $s = 0, 1, 2, \dots, 84$.

2.3.3. Premi Tunggal Bersih *Reversionary Annuity* Kasus 3

Pihak penerima manfaat pada *reversionary annuity* kasus 3 adalah pihak yang terakhir bertahan hidup (status *last-survivor*) [16]⁸. Sejalan seperti pada subbab 2.3.1, perlu ditentukan premi tunggal bersih anuitas hidup status *last-survivor* bagi pasangan suami istri tersebut yang pembelian anuitasnya tepat terjadi pada s tahun setelah hari pernikahan. Akibatnya, fungsi sebaran *survival* bagi status *last-survivor* ketika pembelian anuitas dilakukan s tahun setelah hari pernikahan adalah

$$\begin{aligned} {}_t p_{(26+s)^m : (24+s)^f} &= \Pr \left(T_{(26+s)^m : (24+s)^f} > t \mid T_{26}^m > s \wedge T_{24}^f > s \right) \\ &= \Pr \left(T_{26^m : 24^f} > s + t \mid T_{26}^m > s \wedge T_{24}^f > s \right)^9 \\ &= \Pr \left(T_{26}^m > s + t \vee T_{24}^f > s + t \mid T_{26}^m > s \wedge T_{24}^f > s \right) \\ &\quad \Pr \left(T_{26}^m > s + t \mid T_{26}^m > s \wedge T_{24}^f > s \right) \\ &= +\Pr \left(T_{24}^f > s + t \mid T_{26}^m > s \wedge T_{24}^f > s \right) \\ &\quad -\Pr \left(T_{26}^m > s + t \wedge T_{24}^f > s + t \mid T_{26}^m > s \wedge T_{24}^f > s \right) \\ &= \frac{S_{T_{26}^m, T_{24}^f}(s + t, s)}{S_{T_{26}^m, T_{24}^f}(s, s)} + \frac{S_{T_{26}^m, T_{24}^f}(s, s + t)}{S_{T_{26}^m, T_{24}^f}(s, s)} - \frac{S_{T_{26}^m, T_{24}^f}(s + t, s + t)}{S_{T_{26}^m, T_{24}^f}(s, s)} \end{aligned}$$

sehingga dapat ditulis sebagai

$${}_t p_{(26+s)^m : (24+s)^f} = {}_t p_{26+s}^m |_{T_{24}^f > s} + {}_t p_{24+s}^f |_{T_{26}^m > s} - {}_t p_{(26+s)^m : (24+s)^f} \tag{28}$$

untuk $0 \leq t \leq 88 - s$ dimana $S_{T_{26}^m, T_{24}^f}(t_m, t_f)$ diberikan pada Persamaan (16) jika menggunakan asumsi saling bebas dan Persamaan (17) jika menggunakan asumsi saling berkaitan. Menggunakan fungsi sebaran *survival* status *last-survivor* pada Persamaan (28), premi tunggal bersih anuitas hidup yang memberikan pembayaran secara kontinu dengan tingkat 1 satuan/tahun selama salah satu dari suami atau istri masih hidup (status *last-survivor*) di mana anuitas dibeli pada saat suami berusia tepat $26 + s$ dan istri berusia tepat $24 + s$ dapat dihitung dengan rumus berikut:

⁸ (\overline{xy}) menyatakan status *last-survivor* yang pesertanya adalah (x) dan (y) , yaitu status yang tetap bertahan jika salah satu peserta yang terlibat di dalam status tersebut masih bertahan hidup [16]. $T_{\overline{xy}}$ merupakan peubah acak waktu hingga kegagalan status tersebut dan sebaran *survival* status tersebut dinyatakan sebagai ${}_t p_{\overline{xy}} = \Pr(T_{\overline{xy}} > t) = \Pr(T_x > t \vee T_y > t)$ untuk $0 \leq t \leq \max\{\omega - x, \omega - y\}$.

⁹ ${}_t p_{(26+s)^m : (24+s)^f} \neq \Pr(T_{26^m : 24^f} > s + t \mid T_{26^m : 24^f} > s)$ karena kedua pihak tertanggung (pasangan suami istri) harus tetap hidup dalam s tahun.

$$\bar{a}_{(26+s)^m:(24+s)^f} = \int_0^{88-s} e^{-\delta t} {}_tP_{(26+s)^m:(24+s)^f} dt. \tag{29}$$

Berdasarkan konsep pada Persamaan (18), premi tunggal bersih *reversionary annuity* kasus 3 dapat dihitung menggunakan hasil perhitungan premi tunggal bersih pada Persamaan (21) dan (29), sehingga dihasilkan

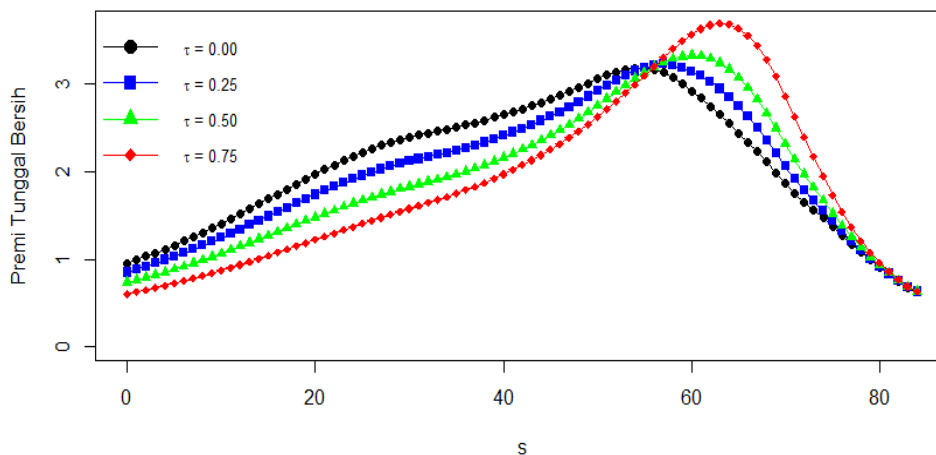
$$\bar{a}_{(26+s)^m:(24+s)^f} \Big|_{(26+s)^m:(24+s)^f} = \bar{a}_{(26+s)^m:(24+s)^f} - \bar{a}_{(26+s)^m:(24+s)^f} \tag{30}$$

untuk $s = 0, 1, 2, \dots, 84$.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Hasil Premi Tunggal Bersih Reversionary Annuity Kasus 1 untuk Semua Ukuran Keterkaitan

Hasil perhitungan premi tunggal bersih *reversionary annuity* kasus 1 untuk tiap semua ukuran keterkaitan *Kendall's tau* (termasuk asumsi saling bebas) menggunakan Persamaan (24) disajikan pada Gambar 2.



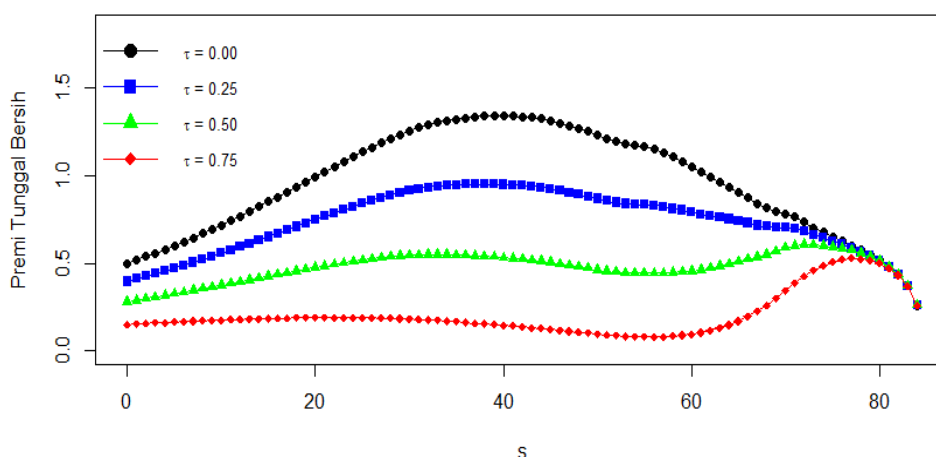
Gambar 2. Grafik hasil perhitungan *reversionary annuity* kasus 1 untuk semua asumsi ukuran keterkaitan

Berdasarkan Gambar 2, terlihat bahwa nilai premi tunggal bersih *reversionary annuity* yang manfaatnya untuk pihak istri (kasus 1) menghasilkan nilai yang lebih tinggi jika menggunakan asumsi kebebasan ($\tau = 0.00$) dibanding dengan menggunakan asumsi saling berkaitan ($\tau = 0.25, 0.50, \text{ dan } 0.75$) pada model *copula* ketika usia pernikahan masih tergolong muda hingga tergolong cukup tua (kira-kira ketika usia pernikahan masih kurang dari 56 tahun). Namun hasil perhitungan saling bebas menghasilkan nilai premi yang terlalu rendah jika usia pernikahan semakin tua (kira-kira ketika usia pernikahan lebih dari atau sama dengan 56 tahun). Selain itu, terlihat juga jika keterkaitan semakin kuat, perhitungan dengan asumsi saling bebas akan semakin jauh nilainya dengan perhitungan yang menggunakan asumsi saling berkaitan pada model

copula. Hal ini terjadi karena jika keterkaitan semakin kuat, maka peluang waktu kematian antara suami dan istri terjadi dalam kurun waktu yang berdekatan akan semakin tinggi, akibatnya periode pemberian manfaat anuitas juga akan semakin pendek. Berdasarkan penjelasan tersebut, jelas bahwa bobot peluang yang diberikan untuk periode pemberian manfaat anuitas yang pendek lebih tinggi, sehingga hasil perhitungan nilai premi tunggal bersih juga akan semakin turun.

3.2. Hasil Premi Tunggal Bersih *Reversionary Annuity* Kasus 2 untuk Semua Ukuran Keterkaitan

Hasil perhitungan premi tunggal bersih *reversionary annuity* kasus 2 untuk tiap semua ukuran keterkaitan *Kendall's tau* (termasuk asumsi saling bebas) menggunakan Persamaan (27) disajikan pada Gambar 3.

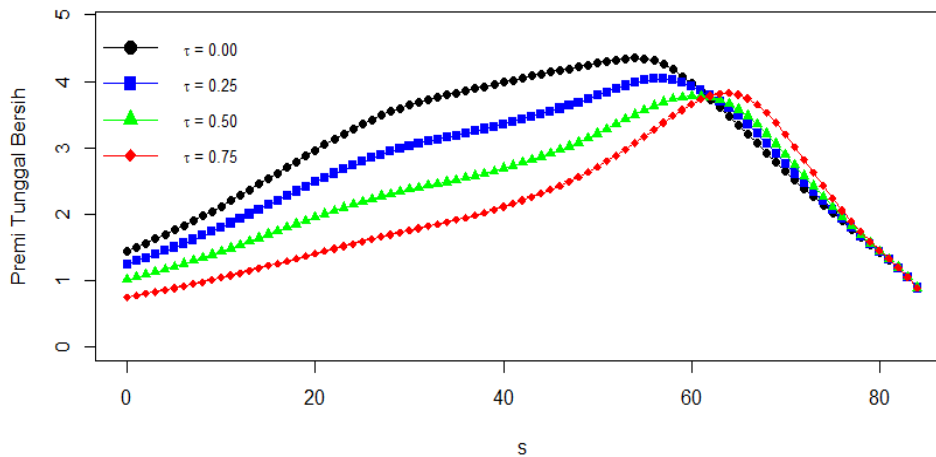


Gambar 3. Grafik hasil perhitungan *reversionary annuity* kasus 2 untuk semua asumsi ukuran keterkaitan

Berdasarkan Gambar 3, terlihat bahwa nilai premi tunggal bersih *reversionary annuity* yang manfaatnya untuk pihak suami (kasus 2) menghasilkan nilai yang lebih tinggi jika menggunakan asumsi kebebasan ($\tau = 0.00$) dibanding dengan menggunakan asumsi saling berkaitan ($\tau = 0.25, 0.50,$ dan 0.75) pada model *copula* untuk semua usia pernikahan. Namun, jika pembelian saat usia pernikahan sudah sangat tua, hasil perhitungan dengan model *copula* akan mendekati hasil perhitungan dengan asumsi kebebasan (kira-kira ketika usia pernikahan lebih dari 70 tahun). Selain itu, terlihat juga jika keterkaitan semakin kuat, perhitungan dengan asumsi saling bebas akan semakin jauh nilainya dengan perhitungan yang menggunakan asumsi saling berkaitan pada model *copula*. Hal ini terjadi karena jika keterkaitan semakin kuat, maka peluang waktu kematian antara suami dan istri terjadi dalam kurun waktu yang berdekatan akan semakin tinggi, akibatnya periode pemberian manfaat anuitas juga akan semakin pendek. Berdasarkan penjelasan tersebut, jelas bahwa bobot peluang yang diberikan untuk periode pemberian manfaat anuitas yang pendek lebih tinggi, sehingga hasil perhitungan nilai premi tunggal bersih juga akan semakin turun.

3.3. Hasil Premi Tunggal Bersih Reversionary Annuity Kasus 3 untuk Semua Ukuran Keterkaitan

Hasil perhitungan premi tunggal bersih *reversionary annuity* kasus 3 untuk tiap semua ukuran keterkaitan *Kendall's tau* (termasuk asumsi saling bebas) menggunakan Persamaan (30) disajikan pada Gambar 4.



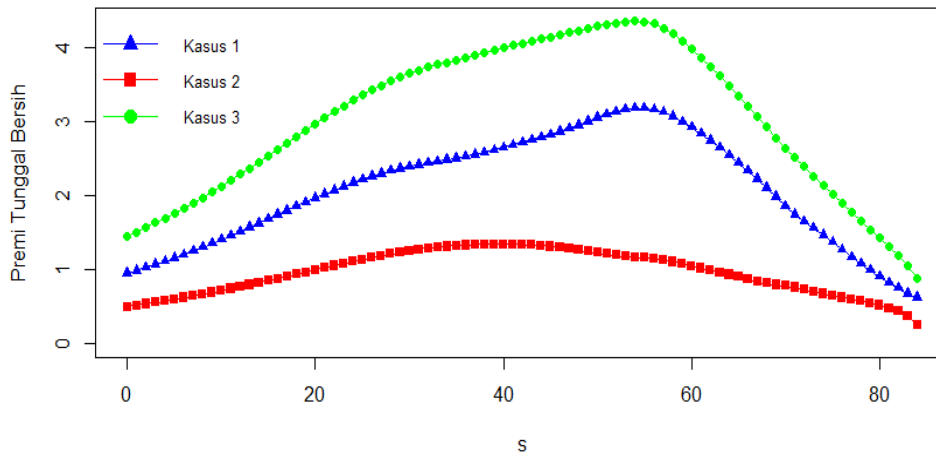
Gambar 4. Grafik hasil perhitungan *reversionary annuity* kasus 3 untuk semua asumsi ukuran keterkaitan

Berdasarkan Gambar 4, terlihat bahwa nilai premi tunggal bersih *reversionary annuity* yang manfaatnya untuk pihak terakhir yang bertahan hidup (kasus 3) menghasilkan nilai yang lebih tinggi jika menggunakan asumsi kebebasan ($\tau = 0.00$) dibanding dengan menggunakan asumsi saling berkaitan ($\tau = 0.25, 0.50,$ dan 0.75) pada model *copula* ketika usia pernikahan masih tergolong muda hingga tergolong cukup tua (kira-kira ketika usia pernikahan masih kurang dari 60 tahun). Namun, jika pembelian saat usia pernikahan sudah sangat tua, hasil perhitungan dengan menggunakan asumsi tidak saling bebas pada model *copula* akan mendekati hasil perhitungan dengan asumsi kebebasan (kira-kira ketika usia pernikahan lebih dari 60 tahun). Selain itu, terlihat juga jika keterkaitan semakin kuat, perhitungan dengan asumsi saling bebas akan semakin jauh nilainya dengan perhitungan yang menggunakan asumsi saling berkaitan pada model *copula*. Hal ini terjadi karena jika keterkaitan semakin kuat, maka peluang waktu kematian antara suami dan istri terjadi dalam kurun waktu yang berdekatan akan semakin tinggi, akibatnya periode pemberian manfaat anuitas juga akan semakin pendek. Berdasarkan penjelasan tersebut, jelas bahwa bobot peluang yang diberikan untuk periode pemberian manfaat anuitas yang pendek lebih tinggi, sehingga hasil perhitungan nilai premi tunggal bersih juga akan semakin turun.

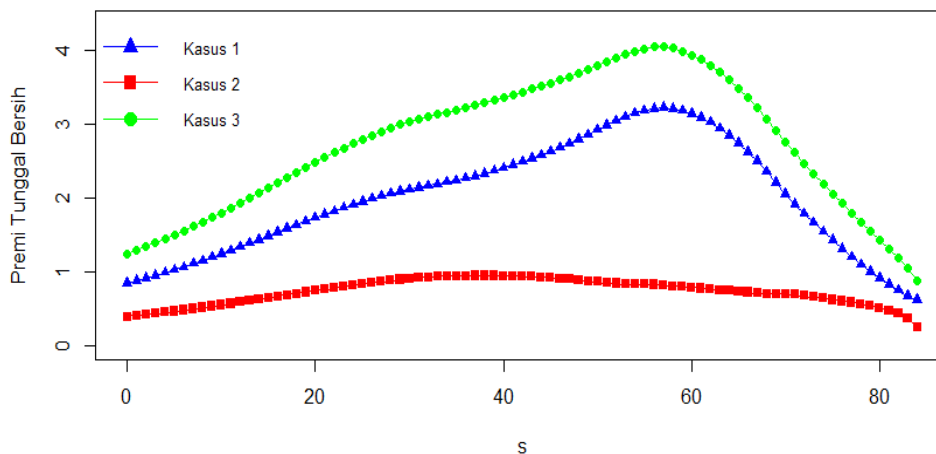
3.4. Hasil Perbandingan Premi Tunggal Bersih Reversionary Annuity Antara Semua Kasus Penerima Manfaat

Pihak penerima manfaat dari suatu produk *reversionary annuity* akan memengaruhi besaran premi tunggal bersih yang dikenakan pada produk tersebut. Karena alasan tersebut, pada sub-bab ini dibahas perbedaan nilai premi antara ketiga kasus yang

dihitung pada subbab 2.3. Perbandingan nilai premi tunggal bersih *reversionary annuity* antara ketiga kasus untuk masing-masing asumsi ukuran keterkaitan dapat dilihat secara eksploratif melalui grafik yang disajikan pada Gambar 5 untuk asumsi kebebasan, Gambar 6 untuk asumsi ukuran keterkaitan yang lemah ($\tau = 0.25$), Gambar 7 untuk asumsi ukuran keterkaitan yang sedang ($\tau = 0.50$), dan Gambar 8 untuk asumsi ukuran keterkaitan yang kuat ($\tau = 0.75$).

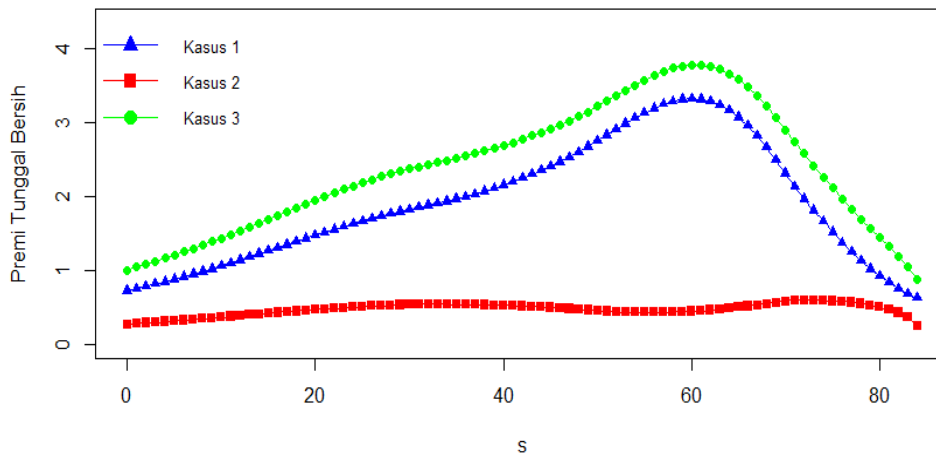


Gambar 5. Grafik hasil perhitungan seluruh kasus *reversionary annuity* dengan asumsi kebebasan ($\tau = 0.00$)

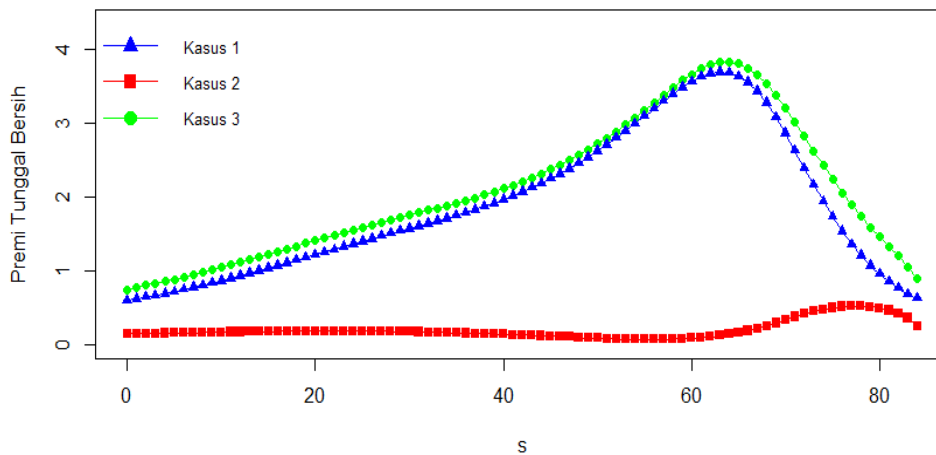


Gambar 6. Grafik hasil perhitungan seluruh kasus *reversionary annuity* dengan asumsi keterkaitan yang lemah ($\tau = 0.25$)

Berdasarkan Gambar 5 hingga Gambar 8, terlihat bahwa nilai premi tunggal bersih *reversionary annuity* tertinggi adalah untuk kasus penerima manfaatnya adalah pihak terakhir yang bertahan hidup (kasus 3). Hal ini masuk akal karena pada kasus ini tidak memerhatikan pihak siapa yang perlu meninggal terlebih dahulu agar manfaat dapat



Gambar 7. Grafik hasil perhitungan seluruh kasus *reversionary annuity* dengan asumsi keterkaitan yang sedang ($\tau = 0.50$)



Gambar 8. Grafik hasil perhitungan seluruh kasus *reversionary annuity* dengan asumsi keterkaitan yang kuat ($\tau = 0.75$)

dibayarkan. Akibatnya, siapa pun pihak yang meninggal pertama (suami atau istri) produk *reversionary annuity* kasus ini akan tetap memberikan manfaat pembayaran ke pihak yang masih bertahan hidup (salah satu dari antara suami atau istri yang masih hidup) sehingga kontrak anuitas tersebut tidak akan hangus. Sementara itu, premi tunggal bersih *reversionary annuity* terendah adalah ketika kasus penerima manfaatnya adalah pihak suami yang bertahan hidup terakhir (kasus 2). Salah satu faktor hal tersebut bisa terjadi adalah karena peluang bertahan hidup laki-laki lebih rendah dibandingkan perempuan. Namun untuk mengkaji faktor lain, perlu dianalisis lebih lanjut mengenai kasus tersebut. Lebih lanjut, ketika ukuran keterkaitan semakin besar, nilai premi tunggal bersih *reversionary annuity* kasus 1 akan semakin dekat nilainya ke

premi tunggal bersih *reversionary annuity* kasus 3 (lihat Gambar 8).

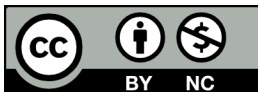
Hal lain yang menarik pada penelitian ini adalah hampir semua nilai premi tunggal bersih *reversionary annuity* pada semua kasus mengalami peningkatan hingga pada suatu titik usia pernikahan tertentu (nilai s tertentu) lalu mengalami penurunan setelahnya. Hal ini bisa disebabkan oleh beberapa faktor yang mengakibatkan besarnya nilai premi tunggal bersih *reversionary annuity* pada beberapa kasus mempunyai pola tersebut. Sebelumnya, perlu diketahui bahwa besarnya nilai premi tunggal bersih *reversionary annuity* ketika suku bunga konstan dipengaruhi oleh dua faktor umum, yaitu seberapa cepat salah satu pihak meninggal (pihak yang perlu meninggal terlebih dahulu agar manfaat dapat diberikan) dan seberapa lama pihak yang menerima manfaat akan tetap bertahan hidup. Kenaikan nilai premi tunggal bersih yang terjadi di rentang usia pernikahan awal lebih disebabkan oleh pihak yang perlu meninggal memiliki peluang kematian dalam waktu dekat yang semakin besar, sehingga kematian pihak tersebut akan semakin cepat dan pada akhirnya nilai sekarang aktuarial dari manfaat anuitas akan semakin kecil faktor diskonnya (sehingga nilai sekarang aktuariannya semakin besar). Sementara itu, penurunan premi tunggal bersih di rentang waktu setelahnya disebabkan oleh sisa waktu hidup dari pihak penerima manfaat semakin pendek sehingga jangka waktu penerimaan manfaatnya semakin pendek juga dan pada akhirnya nilai sekarang aktuarial manfaat anuitasnya akan semakin kecil.

4. Kesimpulan

Sebaran *survival* marginal bagi laki-laki berusia 26 tahun dan perempuan berusia 24 tahun dapat dibangun dari TMI IV dengan asumsi *UDD*. Lebih lanjut, model sebaran bersama kelangsungan hidup pasangan suami istri yang menikah saat suami berusia 26 tahun dan istri berusia 24 tahun juga dapat dibangun dari sebaran marginal tersebut menggunakan asumsi kebebasan dan *Frank's copula* untuk beberapa asumsi nilai ukuran keterkaitan *Kendall's tau*. Model sebaran bersama tersebut dapat digunakan dalam perhitungan premi tunggal bersih *reversionary annuity* di mana pihak tertanggungnya adalah pasangan suami istri. Berdasarkan hasil perhitungan premi tunggal bersih *reversionary annuity* menggunakan model sebaran bersama tersebut, premi berdasarkan asumsi kebebasan cenderung menghasilkan nilai yang lebih tinggi dibandingkan premi yang sebaran bersamanya menggunakan *Frank's copula* (terdapat keterkaitan antar pihak tertanggung), khususnya untuk pembelian anuitas saat usia pernikahan masih muda hingga cukup tua. Jika pembelian anuitas saat usia pernikahan sudah sangat tua, premi dengan asumsi kebebasan cenderung terlalu rendah untuk kasus di mana penerima manfaatnya adalah pihak istri yang bertahan hidup terakhir (kasus 1) dan cenderung serupa untuk kasus lainnya. Selain itu, terlihat juga jika keterkaitan semakin kuat, perhitungan dengan asumsi saling bebas akan semakin jauh nilainya dengan perhitungan dengan model *copula*. Lebih lanjut, berdasarkan perbandingan premi *reversionary annuity* untuk beberapa kasus, nilai premi tunggal bersih *reversionary annuity* tertinggi adalah untuk kasus di mana penerima manfaatnya adalah pihak terakhir yang bertahan hidup (kasus 3). Sementara itu, premi tunggal bersih *reversionary annuity* terendah adalah ketika kasus di mana penerima manfaatnya adalah pihak suami yang bertahan hidup terakhir (kasus 2).

Referensi

- [1] H. U. Gerber, *Life Insurance Mathematics*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1997, doi: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-03460-6>.
- [2] E. W. Frees, J. Carriere, and E. Valdez, "Annuity Valuation with Dependent Mortality," *The Journal of Risk and Insurance*, vol. 63, no. 2, p. 229, jun 1996, doi: <http://dx.doi.org/10.2307/253744>.
- [3] M. Denuit and A. Cornet, "Multilife Premium Calculation with Dependent Future Lifetimes," *Journal of Actuarial Practice*, vol. 7, pp. 147–180, 1999.
- [4] M. Young, "The Mortality of Widowers," *The Lancet*, vol. 282, no. 7305, pp. 454–457, aug 1963, doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S0140-6736\(63\)92193-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0140-6736(63)92193-7).
- [5] C. M. Parkes, B. Benjamin, and R. G. Fitzgerald, "Broken Heart: A Statistical Study of Increased Mortality among Widowers," *BMJ*, vol. 1, no. 5646, pp. 740–743, mar 1969, doi: <http://dx.doi.org/10.1136/bmj.1.5646.740>.
- [6] A. W. Ward, "Mortality of bereavement." *BMJ*, vol. 1, no. 6011, pp. 700–702, mar 1976, doi: <http://dx.doi.org/10.1136/bmj.1.6011.700>.
- [7] C. Jagger and C. J. Sutton, "Death after marital bereavement-is the risk increased?" *Statistics in Medicine*, vol. 10, no. 3, pp. 395–404, mar 1991, doi: <http://dx.doi.org/10.1002/sim.4780100311>.
- [8] F. Elwert and N. A. Christakis, "The Effect of Widowhood on Mortality by the Causes of Death of Both Spouses," *American Journal of Public Health*, vol. 98, no. 11, pp. 2092–2098, nov 2008, doi: <http://dx.doi.org/10.2105/AJPH.2007.114348>.
- [9] P. Margus, "Generalized Frasier Claim Rates Under Survivorship Life Insurance Policies," *North American Actuarial Journal*, vol. 6, no. 2, pp. 76–94, apr 2002, doi: <http://dx.doi.org/10.1080/10920277.2002.10596045>.
- [10] H. Youn and A. Shemyakin, "Statistical Aspects of Joint Life Insurance Pricing," in *Proceedings of Amer. Stat. Assoc.* University of St.Thomas: University of St.Thomas, 1999, pp. 34–38.
- [11] E. Luciano, J. Spreeuw, and E. Vigna, "Spouses' Dependence across Generations and Pricing Impact on Reversionary Annuities," *Risks*, vol. 4, no. 2, p. 16, may 2016, doi: <http://dx.doi.org/10.3390/risks4020016>.
- [12] J. F. Carriere, "Bivariate Survival Models for Coupled Lives," *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 2000, no. 1, pp. 17–32, jan 2000, doi: <http://dx.doi.org/10.1080/034612300750066700>.
- [13] R. J. Cunningham, T. N. Herzog, and R. L. London, *Models for Quantifying Risk*, 5th ed. Winsted (CT): ACTEX Publications, Inc., 2012.
- [14] R. B. Nelsen, *An Introduction to Copulas*, 2nd ed., ser. Springer Series in Statistics. New York, NY: Springer New York, 2006, doi: <http://dx.doi.org/10.1007/0-387-28678-0>.
- [15] J. Dębicka, S. Heilpern, and A. Marciniuk, "Application of Copulas to Modelling of Marriage Reverse Annuity Contract," *Prague Economic Papers*, vol. 29, no. 4, pp. 445–468, aug 2020, doi: <http://dx.doi.org/10.18267/j.pep.745>.
- [16] N. Bowers, H. Gerber, and J. Hickman, *Actuarial Mathematics*, 2nd ed. Schaumburg (IL): The Society of Actuaries, 1997.



This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/). Editorial of JJoM: Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo, Jln. Prof. Dr. Ing. B.J. Habibie, Moutong, Tilongkabila, Kabupaten Bone Bolango, Provinsi Gorontalo 96119, Indonesia.