JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS
Jambura J. Math. Vol. 4, No. 2, pp. 306–322, July 2022
*Journal Homepage: http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom*
*DOI: https://doi.org/10.34312/jjom.v4i2.14176*

# Bilangan Invers Dominasi Total Pada *Triangular Snake Graph*, *Line Triangular Snake Graph*, dan *Shadow Triangular Snake Graph*

**Nurhamzah[1*], Nilamsari Kusumastuti[2], Fransiskus Fran[3]**

[1,2,3]*Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Tanjungpura, Jl. Prof. Dr. Hadari Nawawi, Kota Pontianak 78124, Kalimantan Barat, Indonesia*

[*]*Corresponding author. Email: nurhamzah23@student.untan.ac.id*

## ABSTRAK

Diberikan graf $G=(V(G),E(G))$ merupakan graf terhubung, dengan $V(G)$ adalah himpunan simpul dan $E(G)$ adalah himpunan sisi. Himpunan $D_t(G)$ disebut himpunan dominasi total pada $G$, jika setiap simpul $v\in V(G)$ bertetangga dengan salah satu simpul di $D_t(G)$. Lebih lanjut, $D_t(G)$ harus memenuhi sifat $N(D_t)=V(G)$ dengan $N(D_t)$ merupakan himpunan persekitaran terbuka dari $D_t(G)$. Dimisalkan $D_t(G)$ merupakan himpunan dominasi total dengan kardinalitas minimum. Jika $V(G)-D_t(G)$ memuat himpunan dominasi total $D_t^{-1}(G)$, maka $D_t^{-1}(G)$ disebut himpunan invers dominasi total relatif terhadap $D_t(G)$. Kardinalitas minimum dari himpunan invers dominasi total disebut bilangan invers dominasi total, dinotasikan dengan $\gamma_t^{-1}(G)$. Pada penelitian ini dibahas tentang bilangan invers dominasi total pada *triangular snake graph* $(T_n)$, *line triangular snake graph* $(L(T_n))$, dan *shadow triangular snake graph* $(D_2(T_n))$. Graf $T_n$ adalah graf yang diperoleh dari graf lintasan $(P_n)$ dengan mengganti setiap sisi lintasan dengan graf sikel $(C_3)$. Graf $L(T_n)$ adalah graf dengan himpunan simpul pada $L(T_n)$ merupakan himpunan sisi pada $T_n$, atau $V(L(T_n))=E(T_n)$. Graf $D_2(T_n)$ adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan dua salinan graf $T_n$, yaitu $T_n'$ dan $T_n''$. Hasil dari penelitian ini diperoleh, bahwa graf $T_n$ tidak memiliki bilangan invers dominasi total, $\gamma_t^{-1}(L(T_n))=n$ untuk $n=4,6,8$, $\gamma_t^{-1}(L(T_n))=n-1$ untuk $n=3,5,7$ atau $n\geq 9$ dengan $n\in\mathbb{N}$, dan $\gamma_t^{-1}(D_2(T_n))=\left\lfloor \frac{2n}{3}\right\rfloor$ untuk $n\geq 3$ dengan $n\in\mathbb{N}$.

**Kata Kunci:**
Bilangan Dominasi Total; Himpunan Invers Dominasi Total; Himpunan Persekitaran

## *ABSTRACT*

*Let $G=(V(G),E(G))$ be a connected graph, where $V(G)$ is the set of vertices and $E(G)$ is the set of edges. The set $D_t(G)$ is called the total domination set in $G$ if every vertex $v\in V(G)$ is adjacent to at least one vertex in $D_t(G)$. Furthermore, $D_t(G)$ must satisfy the property $N(D_t)=V(G)$, where $N(D_t)$ is an open neighborhood set of $D_t(G)$. Suppose that $D_t(G)$ is the total domination set with minimum cardinality. If $V(G)-D_t(G)$ contains a total domination set $D_t^{-1}(G)$, then $D_t^{-1}(G)$ is the inverse set of total domination relative to the total domination set $D_t(G)$. The inverse's number of the total domination set denotes the minimum cardinality of the inverse set of total domination. This number is denoted by $\gamma_t^{-1}(G)$. This article discusses the inverse's number of total domination of the triangular snake graph $(T_n)$, line triangular snake graph $(L(T_n))$, and shadow triangular snake graph $(D_2(T_n))$. Graph $T_n$ is a graph obtained from the path graph $(P_n)$ by replacing each side of the path with a cycle graph $(C_3)$. Graph $L(T_n)$ is a graph where the vertex set in $L(T_n)$ is the edge set on $T_n$,*


Received: 28 April 2022 | Accepted: 6 June 2022 | Online: 16 June 2022

*or $V(L(T_n)) = E(T_n)$. Graph $D_2(T_n)$ is a graph obtained by combining two copies of a graph $T_n$, namely $T'_n$ and $T''_n$. This research shows that the graph $T_n$ does not have an inverse of domination total, $\gamma_t^{-1}(L(T_n)) = n$ for $n = 4, 6, 8$, $\gamma_t^{-1}(L(T_n)) = n - 1$ for $n = 3, 5, 7$, or $n \geq 9$ with $n \in \mathbb{N}$, and $\gamma_t^{-1}(D_2(T_n)) = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ for $n \geq 3$ with $n \in \mathbb{N}$.*

***Keywords:***
*Total Domination Number; Inverse Total Domination; Open Neighborhood*

**Format Sitasi:**

N. Nurhamzah, N. Kusumastuti, and F. Fran, "Bilangan Invers Dominasi Total Pada *Triangular Snake Graph*, *Line Triangular Snake Graph*, dan *Shadow Triangular Snake Graph*", *Jambura J. Math.*, vol. 4, No. 2, pp. 306–322, 2022, doi: https://doi.org/10.34312/jjom.v4i2.14176

## 1. Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu pokok bahasan didalam bidang matematika diskret yang mempelajari tentang graf. Graf merupakan teori yang diperkenalkan oleh Leonhard Euler, seorang matematikawan Swiss pada tahun 1736 [1]. Semenjak diperkenalkan, topik-topik dalam teori graf terus mengalami perkembangan salah satunya tentang himpunan dominasi. Sejarah himpunan dominasi berawal ketika penggemar catur Eropa mulai mempelajari masalah "dominasi ratu" [2]. Pada tahun 1862, de Jaenisch berusaha menentukan jumlah minimum ratu yang dapat ditempatkan di papan catur $8 \times 8$ sedemikian sehingga setiap kotak ditempati oleh seorang ratu dalam satu gerakan. Kemudian himpunan dominasi digunakan untuk menentukan jumlah minimum ratu sehingga setiap ratu bisa mendominasi atau menyerang setiap posisi dengan sekali perpindahan pada papan catur tersebut. Saat ini, topik mengenai himpunan dominasi terus dikembangkan dengan berbagai macam jenis himpunan dominasi, diantaranya himpunan dominasi total, himpunan dominasi invers, dan himpunan invers dominasi total.

Diberikan graf $G = (V(G), E(G))$ merupakan graf terhubung dengan $V(G)$ merupakan himpunan simpul dan $E(G)$ merupakan himpunan sisi. Jika setiap simpul dari $V(G) - D(G)$ saling bertetangga setidaknya dengan satu simpul di himpunan $D(G)$, maka $D(G)$ disebut dengan himpunan dominasi pada graf G [3]. Sedangkan, himpunan invers dominasi adalah jika $V(G) - D(G)$ dengan $D(G)$ merupakan himpunan dominasi dengan kardinalitas minimum memuat suatu himpunan dominasi, dimisalkan $D^{-1}(G)$, maka $D^{-1}(G)$ disebut himpunan invers yang terkait dengan $D(G)$ [3].

Himpunan $D_t(G)$ disebut himpunan dominasi total dalam graf $G$ jika setiap simpul $v \in V(G)$ bertetangga dengan salah satu elemen $D_t(G)$ sehingga memenuhi $N(D_t) = V(G)$ [4]. Dimisalkan $D_t(G)$ merupakan himpunan dominasi total dengan kardinalitas minimum. Jika $V(G) - D_t(G)$ memuat himpunan dominasi total $D_t^{-1}(G)$, maka $D_t^{-1}(G)$ disebut himpunan invers dominasi total relatif terhadap himpunan dominasi total $D_t(G)$. Kardinalitas minimum dari himpunan invers dominasi total disebut bilangan invers dominasi total yang dinotasikan $\gamma_t^{-1}(G)$ [5].

Kajian mengenai bilangan dominasi, dominasi total dan bilangan invers dominasi total pada bentuk graf tertentu telah menarik minat banyak peneliti [5–10]. Meskipun demikian, sejak diperkenalkan pada tahun 2007, penelitian tentang bilangan invers dominasi total masih sangat terbuka, khususnya mengenai himpunan invers dominasi total pada hasil operasi pada suatu graf. Dengan melakukan suatu operasi pada graf, ada kemungkinan bahwa pada bentuk awal graf tersebut tidak memiliki bilangan invers dominasi total, tetapi graf hasil operasinya dapat ditentukan bilangan invers dominasi totalnya. Oleh karena itu pada penelitian ini akan dikaji mengenai bilangan invers dominasi total pada graf hasil operasinya.

Berdasarkan penelitian Kulli, dkk [5] mengenai bilangan invers dominasi total, didapat bahwa pada graf $C_3$ tidak memiliki himpunan invers dominasi total, sehingga bilangan invers dominasi totalnya tidak dapat ditentukan. Untuk itu, konsep bilangan invers dominasi total diterapkan pada graf *triangular snake graph* $(T_n)$ dan operasinya yaitu *line* dan *shadow*, karena graf $T_n$, merupakan graf yang terbentuk dari mengubah sisi pada graf lintasan $(P_n)$ dengan graf $C_3$. Selanjutnya dengan melakukan opersi *line* dan *shadow* pada graf $T_n$ ingin dikaji bilangan invers dominasi total dari graf yang terbentuk.

## 2. Metode

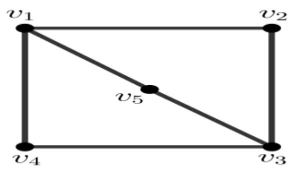
Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur (kajian teori) dari beberapa buku dan artikel yang terkait sebagai landasan teori mengenai teori graf secara umum dan berlanjut pada fokus teori yaitu bilangan invers dominasi total dalam suatu graf. Konsep tersebut diterapkan pada graf $T_n$, $L(T_n)$, dan $D_2(T_n)$.

Sebelum melangkah dalam pembahasan, berikut ini dibahas tentang landasan teori yang diperlukan pada pembahasan.

**Definisi 1.** [11] Diberikan graf $G = (V(G), E(G))$. Persekitaran terbuka dari sebuah simpul $v$ dinotasikan dengan $N(v)$ adalah himpunan semua simpul yang bertetangga dengan simpul $v$, atau $N(v) = \{x \in V(G) \mid vx \in E(G)\}$.

**Definisi 2.** [11] Diberikan graf $G = (V(G), E(G))$. Untuk suatu $S \subseteq V(G)$, himpunan $N(S)$ yang didefinisikan sebagai $N(S) = \cup_{v \in S} N(v)$ disebut himpunan persekitaran terbuka dari simpul $G$.

**Contoh 1.** Diberikan sebuah graf $G$ dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ yang direpresentasikan pada Gambar 1.




**Gambar 1.** Graf $G$ dengan 5 simpul

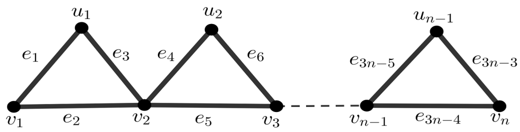
Berdasarkan Definisi 1, diperoleh persekitaran terbuka dari setiap simpul $v$ pada graf $G$ yaitu $N(v_1) = \{v_2, v_4, v_5\}$, $N(v_2) = \{v_1, v_3\}$, $N(v_3) = \{v_2, v_4, v_5\}$, $N(v_4) = \{v_1, v_3\}$, $N(v_5) = \{v_1, v_3\}$.

Misalkan dipilih $S \subseteq V(G)$ dengan $S=\{v_1, v_5\}$, diperoleh himpunan persekitaran terbuka dari simpul $G$ yaitu

$$\begin{aligned} N(S) &= N(v_1) \cup N(v_5) \\ &= \{v_2, v_4, v_5\} \cup \{v_1, v_3\} \\ &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \end{aligned}$$

**Definisi 3.** [12] *Triangular snake graph* $(T_n)$ dengan $n \geq 3$, adalah graf yang diperoleh dari graf lintasan $(P_n)$ dengan mengganti setiap sisi pada graf lintasan dengan graf sikel $(C_3)$.

Bentuk graf $T_n$ dapat dilihat pada Gambar 2.

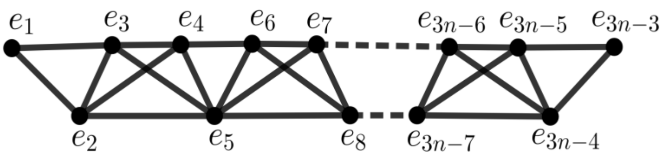



**Gambar 2.** Graf $T_n$

Berikut diberikan definisi graf $L\left(T_n\right)$, yang mengacu pada definisi *line* untuk suatu graf secara umum pada [13].

**Definisi 4.** Dimisalkan graf $T_n$ dengan himpunan simpul $V(T_n)$ dan himpunan sisi $E(T_n)$. *Line triangular snake graph* $L(T_n)$ adalah graf dengan $V(L(T_n\ )) = E(T_n)$ dan simpul di graf $L\left(T_n\right)$ akan bertetangga jika dan hanya jika sisi-sisi yang bersesuaian saling terkait di graf $T_n$.

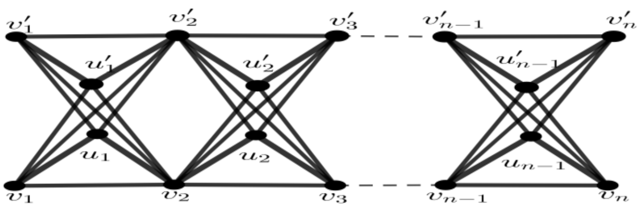
Bentuk graf $L\left(T_n\right)$ dapat dilihat pada Gambar 3.




**Gambar 3.** Graf $L(T_n)$

**Definisi 5.** [14] Graf *shadow* dari *triangular snake graph* dinotasikan $D_2(T_n)$ adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan dua salinan graf $T_n$, dimisalkan $T_n'$ dan $T_n''$. Setiap simpul di $T_n'$ dan $T_n''$ akan saling bertetangga jika kedua simpul tersebut bertetangga di graf $T_n$.

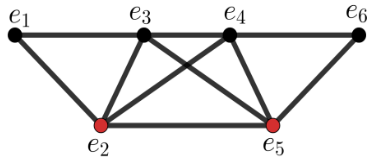
Bentuk graf $D_2\left(T_n\right)$ dapat dilihat pada Gambar 4.




**Gambar 4.** Graf $D_2(T_n)$

**Definisi 6.** [4] Diberikan graf $G = \left(V\left(G\right), E\left(G\right)\right)$ dengan tidak ada simpul terpencil dan himpunan $D_t(G) \subseteq V(G)$ dengan $D_t(G) \neq \emptyset$. Himpunan $D_t(G)$ disebut himpunan dominasi total dalam graf $G$ jika setiap simpul $v \in V(G)$ bertetangga dengan salah satu elemen $D_t(G)$ sehingga memenuhi $N\left(D_t\right) = V(G)$. Bilangan dominasi total dinotasikan dengan $\gamma_t\left(G\right)$ yaitu kardinalitas minimum dari himpunan dominasi total $D_t\left(G\right)$.

**Contoh 2.** Diberikan graf $L\left(T_3\right)$ dengan $V\left(L\left(T_3\right)\right) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, $\left|V\left(L\left(T_3\right)\right)\right| = 6$ dan $\left|E\left(L\left(T_3\right)\right)\right| = 10$ yang diilustrasikan pada Gambar 5.




**Gambar 5.** Graf $L(T_3)$ dengan himpunan dominasi total

Berdasarkan Gambar 5, diketahui bahwa $N(e_1) = \{e_2, e_3\}$, $N(e_2) = \{e_1, e_3, e_4, e_5\}$, $N(e_3) = \{e_1, e_2, e_4, e_5\}$, $N(e_4) = \{e_2, e_3, e_5, e_6\}$, $N(e_5) = \{e_2, e_3, e_4, e_6\}$ dan $N(e_6) = \{e_4, e_5\}$. Berdasarkan persekitaran terbuka setiap simpul pada $V(L(T_3))$ didapat $D_t(L(T_3)) = \{e_2, e_5\}$ merupakan himpunan dominasi total dengan kardinalitas minimum pada graf $L(T_3)$, sehingga diperoleh $\gamma_t(L(T_3)) = 2$.

Berdasarkan penelitian Murti, dkk [15] diperoleh himpunan dominasi total dengan kardinalitas minimum pada graf $T_n$ sebagai berikut:

$$D_t(T_n) = \left\{v_2, v_3, v_5, v_6, \ldots, v_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, v_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}\right\} \text{ untuk } n \equiv 0 \ (mod\ 3) \text{ atau } n \equiv 1 \ (mod\ 3) \quad (1)$$

$$D_t(T_n) = \left\{v_2, v_3, v_5, v_6, \ldots, v_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, v_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}\right\} \cup \{v_{n-1}\} \text{ untuk } n \equiv 2 \ (mod\ 3). \quad (2)$$

Berdasarkan penelitian Murti, dkk [15] diperoleh himpunan dominasi total dengan kardinalitas minimum pada graf $L(T_n)$ sebagai berikut:

$$D_t(L(T_n)) = \{e_2, e_5, e_{11}, e_{14}, \ldots, e_{3n-7}, e_{3n-4}\} \text{ untuk } n \equiv 0 \ (mod\ 3) \quad (3)$$

$$D_t(L(T_n)) = \{e_2, e_5, e_{11}, e_{14}, \ldots, e_{3n-10}, e_{3n-7}\} \cup \{e_{3n-4}\} \text{ untuk } n \equiv 1 \ (mod\ 3) \quad (4)$$

$$D_t(L(T_n)) = \{e_2, e_5, e_{11}, e_{14}, \ldots, e_{3n-13}, e_{3n-10}\} \cup \{e_{3n-4}\} \cup \{e_{3n-7}\} \text{ untuk } n \equiv 2 \ (mod\ 3). \quad (5)$$

**Lemma 1.** *[15] Graf $T_n$ dengan $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, bilangan dominasi total pada $T_n$ adalah $\gamma_t(L(T_n)) = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$.*

**Lemma 2.** *[15] Graf $L(T_n)$ dengan $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, bilangan dominasi total pada $L(T_n)$ adalah $\gamma_t(L(T_n)) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$.*

**Definisi 7.** [5] Dimisalkan $D_t(G) \subseteq V(G)$ merupakan himpunan dominasi total dengan kardinalitas minimum dari graf $G$. Jika $V(G) - D_t(G)$ memuat himpunan dominasi total $D_t^{-1}(G)$, maka $D_t^{-1}(G)$ disebut himpunan invers dominasi total yang relatif terhadap himpunan dominasi total $D_t(G)$. Bilangan invers dominasi total $\left(\gamma_t^{-1}(G)\right)$ merupakan kardinalitas minimum dari himpunan invers dominasi total.

Berdasarkan Definisi 7, bilangan invers dominasi total pada graf $G$ dapat dicari dengan langkah sebagai berikut:

1. Menentukan $D_t(G)$ dengan kardinalitas minimum pada graf $G$;
2. Mencari himpunan dominasi total yang termuat pada $V(G) - D_t(G)$, jika ada maka himpunan dominasi total yang termuat pada $V(G) - D_t(G)$ disebut himpunan invers dominasi total $\left(D_t^{-1}(G)\right)$;
3. Jika Langkah 2 dipenuhi, selanjutnya menentukan $D_t^{-1}(G)$ dengan kardinalitas minimum, sehingga diperoleh $\gamma_t^{-1}(G)$.

**Contoh 3.** Berdasarkan Gambar 5 dan Contoh 2, diperoleh himpunan dominasi total minimum pada $L(T_3)$ yaitu

$$D_t(L(T_3)) = \{e_2, e_5\}$$

sehingga $V(L(T_3)) - D_t(L(T_3)) = \{e_1, e_3, e_4, e_6\}$. Selanjutnya dicari $D_t^{-1}(L(T_3))$ yang termuat pada $V(L(T_3)) - D_t(L(T_3))$, dengan cara mencari $\bigcup_{i\in J} N(e_i)$ untuk $J = \{1, 3, 4, 6\}$ dengan kardinalitas minimum sedemikian sehingga

$$\bigcup_{i\in J} N(e_i) = V(L(T_3)).$$

Selanjutnya diperoleh $N(e_3) \cup N(e_4) = V(L(T_3))$. Dengan demikian, diperoleh himpunan invers dominasi total dengan kardinalitas minimum pada graf $L(T_3)$ adalah $D_t^{-1}(L(T_3)) = \{e_3, e_4\}$, maka didapat $\gamma_t^{-1}(L(T_3)) = 2$.

Bilangan invers dominasi total pada suatu graf belum tentu ada, artinya tidak semua graf memiliki himpunan invers dominasi total. Diandaikan suatu graf memiliki bilangan invers dominasi total untuk suatu $n$. Rumusan bilangan invers tersebut juga belum tentu dapat digunakan untuk menentukan pola bilangan invers dominasi total secara umum pada graf tersebut. Oleh sebab itu, pada penelitian ini dicari bilangan invers dominasi total pada graf $T_n$, $L(T_n)$, dan $D_2(T_n)$, kemudian membentuk dugaan sementara mengenai pola bilangan invers dominasi total dan membuktikan pola yang diperoleh. Berdasarkan Definisi 11, langkah-langkah yang digunakan untuk mencari bilangan invers dominasi total pada graf $T_n$, $L(T_n)$, dan $D_2(T_n)$ dengan $n \geq 3$ dan $n \in \mathbb{N}$ sebagai berikut:

1. Menentukan $D_t(G)$ dengan kardinalitas minimum pada graf $T_n$, $L(T_n)$, dan $D_2(T_n)$ dengan $n \geq 3$ dan $n \in \mathbb{N}$, dimulai dari $n = 3$;
2. Mencari himpunan dominasi total yang termuat pada $V(G) - D_t(G)$, jika ada maka himpunan dominasi total yang termuat pada $V(G) - D_t(G)$ disebut himpunan invers dominasi total $\left(D_t^{-1}(G)\right)$;
3. Jika Langkah 2 terpenuhi, selanjutnya mencari $D_t^{-1}(G)$ untuk beberapa nilai $n$ lainnya, sehingga dapat membentuk dugaan sementara pola bilangan invers dominasi total $\left(\gamma_t^{-1}\right)$ pada graf $T_n$, $L(T_n)$, dan $D_2(T_n)$;
4. Membuktikan dugaan pola bilangan invers dominasi total pada graf $T_n$, $L(T_n)$, dan $D_2(T_n)$ dengan $n \geq 3$ dan $n \in \mathbb{N}$;
5. Jika terbukti maka diperoleh $\gamma_t^{-1}$ pada graf $T_n$, $L(T_n)$, dan $D_2(T_n)$ dengan $n \geq 3$ dan $n \in \mathbb{N}$.

## 3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan dibahas mengenai bilangan invers dominasi total pada graf $T_n$, $L(T_n)$, dan $D_2(T_n)$.

### *3.1. Bilangan Invers Dominasi Total pada Triangular Snake Graph*

Bilangan invers dominasi total pada graf $T_n$ dapat dicari dengan menggunakan langkah-langkah yang telah dijelaskan pada metode penelitian. Pertama, menentukan himpunan invers dominasi total pada graf $T_3$. Berdasarkan Persamaan (1), diperoleh himpunan dominasi total dengan kardinalitas minimum $D_t(T_3) = \{v_2,\ v_3\}$, sehingga $V(T_3) - D_t(T_3) = \{v_1,\ u_1,\ u_2\}$ tidak memuat $D_t^{-1}$, karena graf dengan himpunan simpul $V(T_3) - D_t(T_3)$ memuat simpul terpencil yaitu $u_2$, akibatnya graf $T_3$ tidak memiliki himpunan invers dominasi total. Begitu juga pada graf $T_4$, berdasarkan Persamaan (2) diketahui $D_t(T_4) = \{v_2,\ v_3\}$, sehingga $V(T_4) - D_t(T_4) = \{v_1, v_4,\ u_1,\ u_2, u_3\}$ tidak memuat $D_t^{-1}$, karena graf dengan himpunan simpul $V(T_4) - D_t(T_4)$memuat simpul terpencil yaitu $u_2$, akibatnya graf $T_4$ tidak memiliki himpunan invers dominasi total.

Berdasarkan pola yang diperoleh maka dapat disimpulkan bahwa secara umum, untuk sebarang graf $T_n$ dengan $n \geq 3$ untuk $n \in \mathbb{N}$, jika diambil $D_t(T_n)$ dengan kardinalitas minimum, maka graf dengan himpunan simpul $V(T_n) - D_t(T_n)$ akan selalu memiliki simpul terpencil, sehingga tidak terdapat himpunan invers dominasi total, dengan kata lain graf $T_n$ tidak memiliki $\gamma_t^{-1}(T_n)$.

### *3.2. Bilangan Invers Dominasi Total pada Line Triangular Snake Graph*

Bilangan invers dominasi total pada *Line Triangular Snake Graph* dinyatakan pada Teorema 1.

**Teorema 1.** *Jika $L(T_n)$ merupakan line triangular snake graph dengan $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ maka*

$$\gamma_t^{-1}(L(T_n)) = \begin{cases} n, & n = 4,6,8 \\ n-1, & n = 3,5,7 \text{ atau } n \geq 9. \end{cases}$$

***Bukti.*** Diberikan *line triangular snake graph* $L(T_n)$ untuk $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$ dengan $V(L(T_n)) = \{e_1, e_2, e_3, \ldots,\ e_{3n-3}\}$, sehingga diperoleh $|V(L(T_n))| = 3n-3$ dan $|E(L(T_n))| = 7n-11$. Perhatikan, simpul $e_1$ dan $e_{3n-3}$ hanya bertetangga dengan 2 simpul disekitarnya, atau $N(e_1) = \{e_2, e_3\}$ dan $N(e_{3n-3}) = \{e_{3n-4}, e_{3n-5}\}$. Simpul $e_2$ dan $e_{3n-4}$ bertetangga dengan 4 simpul disekitarnya, atau $N(e_2) = \{e_1, e_3, e_4, e_5\}$ dan $N(e_{3n-4}) = \{e_{3n-7}, e_{3n-6},\ e_{3n-5}, e_{3n-3}\}$. Simpul $e_i$, dengan $i = 5, 8, \ldots, 3n-7$, bertetangga dengan 6 simpul disekitarnya, atau $N(e_i) = \{e_{i-3},\ e_{i-2}, e_{i-1}, e_{i+1},\ e_{i+2}, e_{i+3}\}$. Simpul $e_j$, dengan $j = 3, 4, 6, 7, 9, \ldots, 3n-5$, bertetangga dengan 4 simpul disekitarnya, atau $N(e_j) = \{e_{j-1}, e_{j-2}, e_{j+1}, e_{j+2}\}$.

Akan dibuktikan bahwa:

$$\gamma_t^{-1}(L(T_n)) = \begin{cases} n, & n = 4,6,8 \\ n-1, & n = 3,5,7 \text{ atau } n \geq 9. \end{cases}$$

1. **Untuk $n = 4, 6, 8$**
   (a) Untuk $n = 4$

Untuk $n = 4$, diketahui $V(L(T_4)) = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_9\}$ dan berdasarkan Persamaan (4) diketahui $D_t(L(T_4)) = \{e_2, e_5, e_8\}$ sehingga didapat $V(L(T_4)) - D_t(L(T_4)) = \{e_1, e_3, e_4, \ e_6, e_7, \ e_9\}$. Persekitaran terbuka dari setiap simpul pada $V(L(T_4)) - D_t(L(T_4))$ sebagai berikut:

$$\begin{array}{lcllcl} N(e_1) & = & \{e_2, e_3\} & N(e_6) & = & \{e_4, \ e_5, e_7, e_8\} \\ N(e_3) & = & \{e_1, e_2, e_4, e_5\} & N(e_7) & = & \{e_5, e_6, e_8, e_9\} \\ N(e_4) & = & \{e_2, e_3, \ e_5, e_6\} & N(e_9) & = & \{e_7, e_8\} \end{array}$$

Berdasarkan persekitaran terbuka setiap simpul pada $V(L(T_4)) - D_t(L(T_4))$, dipilih

$$D_t^{-1}(L(T_4)) \subseteq V(L(T_4)) - D_t(L(T_4))$$

dengan

$$D_t^{-1}(L(T_4)) = \{e_3, e_4, e_6, e_7\}$$

sehingga

$$\begin{aligned} N\left(D_t^{-1}\right) &= N(e_3) \cup N(e_4) \cup N(e_6) \cup N(e_7) \\ &= \{e_1, e_2, e_4, e_5\} \cup \{e_2, e_3, e_5, e_6\} \cup \{e_4, \ e_5, e_7, e_8\} \cup \{e_5, e_6, e_8, e_9\} \\ &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, \ldots, e_9\} = V(L(T_4)) \end{aligned}$$

Didapat $N\left(D_t^{-1}(L(T_4))\right) = V(L(T_4))$, maka $D_t^{-1}(L(T_4))$ merupakan himpunan invers dominasi total yang menghasilkan $\gamma_t^{-1}(L(T_4)) \leq 4$. Perhatikan bahwa untuk setiap $e_i \in D_t^{-1}(L(T_4))$, terdapat $x \in N(e_i)$ sedemikian sehingga $x \notin N(e_j)$, untuk setiap $j \neq i$ dan $e_j \in D_t^{-1}(L(T_4))$. Oleh karena itu, jika salah satu elemen dari $D_t^{-1}(L(T_4))$ dikeluarkan berakibat $x$ tidak terdominasi atau $N\left(D_t^{-1}(L(T_4))\right) \neq V((L(T_4))$. Kontradiksi dengan $D_t^{-1}(L(T_4))$ himpunan invers dominasi total. Didapat kardinalitas minimum dari $D_t^{-1}(L(T_4))$ adalah 4.

(b) Untuk $n = 6$

Untuk $n = 6$, diketahui $V(L(T_6)) = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{15}\}$ dan berdasarkan Persamaan (3), diketahui $D_t(L(T_6)) = \{e_2, e_5, e_{11}, e_{14}\}$ sehingga $V(L(T_6)) - D_t(L(T_6)) = \{e_1, e_3, \ e_4, \ e_6, \ldots, \ e_{10}, e_{12}, \ e_{13}, e_{15}\}$. Persekitaran terbuka dari setiap simpul pada $V(L(T_6)) - D_t(L(T_6))$ sebagai berikut:

$$\begin{array}{lcllcl} N(e_1) & = & \{e_2, e_3\} & N(e_9) & = & \{e_7, e_8, e_{10}, e_{11}\} \\ N(e_3) & = & \{e_1, e_2, e_4, e_5\} & N(e_{10}) & = & \{e_8, e_9, e_{11}, e_{12}\} \\ N(e_4) & = & \{e_2, e_3, e_5, e_6\} & N(e_{12}) & = & \{e_{10}, e_{11}, e_{13}, e_{14}\} \\ N(e_6) & = & \{e_4, e_5, e_7, e_8\} & N(e_{13}) & = & \{e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{15}\} \\ N(e_7) & = & \{e_5, e_6, e_8, e_9\} & N(e_{15}) & = & \{e_{13}, e_{14}\} \\ N(e_8) & = & \{e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\} & & & \end{array}$$

Berdasarkan persekitaran terbuka setiap simpul pada $V(L(T_6)) - D_t(L(T_6))$, dipilih $D_t^{-1}(L(T_6)) = \{e_3, e_4, e_9, e_{10}, e_{12}, e_{13}\}$ sehingga

$$\begin{aligned} N\left(D_t^{-1}\left(L\left(T_6\right)\right)\right) &= N\left(e_3\right) \cup N\left(e_4\right) \cup N\left(e_9\right) \cup N\left(e_{10}\right) \cup N\left(e_{12}\right) \cup N\left(e_{13}\right) \\ &= \{e_1, e_2, e_4, e_5\} \cup \{e_2, e_3, e_5, e_6\} \cup \{e_7, e_8, e_{10}, e_{11}\} \cup \\ &\quad \{e_8, e_9, e_{11}, e_{12}\} \cup \{e_{10}, e_{11}, e_{13}, e_{14}\} \cup \{e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{15}\} \\ &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \ldots, e_{15}\} \\ &= V\left(L\left(T_6\right)\right) \end{aligned}$$

Didapat $N\left(D_t^{-1}\left(L\left(T_6\right)\right)\right) = V\left(L\left(T_6\right)\right)$, maka $D_t^{-1}\left(L\left(T_6\right)\right)$ merupakan himpunan invers dominasi total. Sehingga diperoleh $\gamma_t^{-1}\left(L\left(T_6\right)\right) \leq 6$. Perhatikan bahwa untuk setiap $e_i \in D_t^{-1}\left(L\left(T_6\right)\right)$, terdapat $x \in N\left(e_i\right)$ sedemikian sehingga $x \notin N(e_j)$, untuk setiap $j \neq i$ dan $e_j \in D_t^{-1}\left(L\left(T_6\right)\right)$. Oleh karena itu, jika salah satu elemen dari $D_t^{-1}\left(L\left(T_6\right)\right)$ dikeluarkan berakibat $x$ tidak terdominasi atau $N\left(D_t^{-1}\left(L\left(T_6\right)\right)\right) \neq V((L\left(T_6\right))$. Kontradiksi dengan $D_t^{-1}\left(L\left(T_6\right)\right)$ himpunan invers dominasi total. Didapat kardinalitas minimum dari $D_t^{-1}\left(L\left(T_6\right)\right)$ adalah 6.

(c) Untuk $n = 8$

Untuk $n = 8$, diketahui $V\left(L\left(T_8\right)\right) = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{21}\}$ dan berdasarkan Persamaan (5) diketahui $D_t\left(L\left(T_8\right)\right) = \{e_2, e_5, e_{11}, e_{14}, e_{17}, e_{20}\}$ sehingga $V\left(L\left(T_8\right)\right) - D_t\left(L\left(T_8\right)\right) = \{e_1, e_3, e_4, e_6, \ldots, e_{10}, e_{12}, e_{13}, e_{15}, e_{16}, e_{18}, e_{19}, e_{21}\}$. Persekitaran terbuka dari setiap simpul pada $V\left(L\left(T_8\right)\right) - D_t\left(L\left(T_8\right)\right)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} N\left(e_1\right) &= \{e_2, e_3\} & N\left(e_{12}\right) &= \{e_{10}, e_{11}, e_{13}, e_{14}\} \\ N\left(e_3\right) &= \{e_1, e_2, e_4, e_5\} & N\left(e_{13}\right) &= \{e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{15}\} \\ N\left(e_4\right) &= \{e_2, e_3, e_5, e_6\} & N\left(e_{15}\right) &= \{e_{13}, e_{14}, e_{16}, e_{17}\} \\ N\left(e_6\right) &= \{e_4, e_5, e_7, e_8\} & N\left(e_{16}\right) &= \{e_{14}, e_{15}, e_{17}, e_{18}\} \\ N\left(e_7\right) &= \{e_5, e_6, e_8, e_9\} & N\left(e_{18}\right) &= \{e_{16}, e_{17}, e_{19}, e_{20}\} \\ N\left(e_8\right) &= \{e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\} & N\left(e_{19}\right) &= \{e_{17}, e_{18}, e_{20}, e_{21}\} \\ N\left(e_9\right) &= \{e_7, e_8, e_{10}, e_{11}\} & N\left(e_{21}\right) &= \{e_{19}, e_{20}\} \\ N\left(e_{10}\right) &= \{e_8, e_9, e_{11}, e_{12}\} \end{aligned}$$

Berdasarkan persekitaran terbuka setiap simpul pada $V\left(L\left(T_8\right)\right) - D_t\left(L\left(T_8\right)\right)$, dipilih $D_t^{-1}\left(L\left(T_8\right)\right) \subseteq V\left(L\left(T_8\right)\right) - D_t\left(L\left(T_8\right)\right)$ dengan $D_t^{-1}\left(L\left(T_8\right)\right) = \{e_3, e_4, e_9, e_{10}, e_{15}, e_{16}, e_{18}, e_{19}\}$ sehingga

$$\begin{aligned} N\left(D_t^{-1}\left(L\left(T_8\right)\right)\right) &= N\left(e_3\right) \cup N\left(e_4\right) \cup N\left(e_9\right) \cup N\left(e_{10}\right) \cup N\left(e_{15}\right) \cup \\ &\quad N\left(e_{16}\right) \cup N\left(e_{18}\right) \cup N\left(e_{19}\right) \\ &= \{e_1, e_2, e_4, e_5\} \cup \{e_2, e_3, e_5, e_6\} \cup \{e_7, e_8, e_{10}, e_{11}\} \cup \\ &\quad \{e_8, e_9, e_{11}, e_{12}\} \cup \{e_{13}, e_{14}, e_{16}, e_{17}\} \cup \{e_{14}, e_{15}, e_{17}, e_{18}\} \\ &\quad \cup \{e_{16}, e_{17}, e_{19}, e_{20}\} \cup \{e_{17}, e_{18}, e_{20}, e_{21}\} \\ &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \ldots, e_{21}\} \\ &= V\left(L\left(T_8\right)\right) \end{aligned}$$

Didapat $N\left(D_t^{-1}\left(L\left(T_8\right)\right)\right) = V\left(L\left(T_8\right)\right)$, maka $D_t^{-1}\left(L\left(T_8\right)\right)$ merupakan himpunan invers dominasi total. Sehingga, diperoleh $\gamma_t^{-1}\left(L\left(T_8\right)\right) \leq 8$.

Perhatikan bahwa untuk setiap $e_i \in D_t^{-1}(L(T_8))$, terdapat $x \in N(e_i)$ sedemikian sehingga $x \notin N(e_j)$, untuk setiap $j \neq i$ dan $e_j \in D_t^{-1}(L(T_8))$. Oleh karena itu, jika salah satu elemen dari $D_t^{-1}(L(T_8))$ dikeluarkan berakibat $x$ tidak terdominasi atau $N\left(D_t^{-1}(L(T_8))\right) \neq V((L(T_8))$. Kontradiksi dengan $D_t^{-1}(L(T_8))$ himpunan invers dominasi total. Didapat kardinalitas minimum dari $D_t^{-1}(L(T_8))$ adalah 8.

2. **Untuk $n = 3, 5, 7$ dan $n \geq 9$**
Pada kasus $n = 3, 5, 7$ dan $n \geq 9$ dibuktikan dengan induksi matematika dan dibagi menjadi 6 kasus, namun pada artikel ini, pembuktiannya hanya dijelaskan untuk 2 kasus, yaitu (i) kasus untuk $n \equiv 0 \ (mod\ 3)$ dan $n$ ganjil, dan (ii) kasus untuk $n \equiv 0 \ (mod\ 3)$ dan $n$ genap.
   (a) **Untuk $n \equiv 0 \ (mod\ 3)$ dan $n$ ganjil**
   Oleh karena $n \equiv 0 \ (mod\ 3)$ dan $n$ ganjil, maka $n = 3(2k+1)$ untuk $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Pertama akan ditunjukkan bahwa $P(k = 0)$ benar. Karena $k = 0$ maka $n = 3$, diketahui $V(L(T_3) = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_6\}$. Berdasarkan Persamaan (3) diperoleh $D_t(L(T_3)) = \{e_2, e_5\}$ sehingga $V(L(T_3)) - D_t(L(T_3)) = \{e_1, e_3, e_4, e_6\}$. Persekitaran terbuka dari setiap simpul pada $V(L(T_3)) - D_t(L(T_3))$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} N(e_1) &= \{e_2, e_3\} \\ N(e_3) &= \{e_1, e_2, e_4, e_5\} \\ N(e_4) &= \{e_2, e_3, e_5, e_6\} \\ N(e_6) &= \{e_4, e_5\} \end{aligned}$$

   Berdasarkan persekitaran terbuka setiap simpul pada $V(L(T_3)) - D_t(L(T_3))$, dipilih $D_t^{-1}(L(T_3)) = \{e_3, e_4\}$, sehingga $N\left(D_t^{-1}(L(T_3))\right) = N(e_3) \cup N(e_4) = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_6\} = V(L(T_3))$. Akibatnya, $D_t^{-1}(L(T_3))$ merupakan himpunan invers dominasi total dengan $\left|D_t^{-1}(L(T_3))\right| = 2$. Oleh karena tidak ada $D_t^{-1}$ lain yang mempunyai kardinalitas kurang dari 2, sehingga diperoleh invers dominasi total.setiap himpunan invers dominasi total di graf ari 2 $\gamma_t^{-1}(L(T_3)) = 2$. Jadi, benar untuk $k = 1$.
   Asumsikan benar untuk $P(k)$ maka $\gamma_t^{-1}(L(T_k)) = 3(2k+1) - 1 = 6k + 2$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $P(k+1)$. Sehingga $\gamma_t^{-1}(L(T_{k+1})) = 3(2(k+1)+1) - 1 = 6k + 8$. Dimisalkan $V(L(T_k)) = \left\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{3(3(2k+1))-3}\right\}$ dan berdasarkan Persamaan (3), diperoleh

$$D_t(L(T_k)) = \left\{e_2, e_5, e_{11}, e_{14}, \ldots, e_{3(3(2k+1))-7}, e_{3(3(2k+1))-4}\right\}$$

   yang merupakan himpunan dominasi total dengan kardinalitas minimum pada $L(T_k)$. Dimisalkan dipilih $D_t^{-1}(L(T_k)) \subseteq V(L(T_k)) - D_t(L(T_k))$ dengan

$$D_t^{-1}(L(T_k)) = \{e_3, e_4, e_9, e_{10}, e_{15}, e_{16}, \ldots, e_{3(3(2k+1))-6}, e_{3(3(2k+1))-5}\}.$$

Perhatikan bahwa $N\left(D_t^{-1}\left(L\left(T_k\right)\right)\right) = V\left(L\left(T_k\right)\right)$, akibatnya $D_t^{-1}\left(L\left(T_k\right)\right)$ merupakan himpunan invers dominasi total pada $L(T_k)$. Indeks simpul dengan urutan ganjil dielemen $D_t^{-1}\left(L\left(T_k\right)\right)$ membentuk suatu barisan aritmatika dengan $u_1 = 3$ dan $b = 6$. Begitu pula untuk indeks simpul dengan urutan genap dielemen $D_t^{-1}\left(L\left(T_k\right)\right)$ membentuk suatu barisan aritmatika dengan $u_1 = 4$ dan $b = 6$, sehingga diperoleh $\left|D_t^{-1}\left(L\left(T_k\right)\right)\right| = 6k+2$. Berdasarkan asumsi $P\left(k\right)$ benar yaitu $\gamma_t^{-1}\left(L\left(T_k\right)\right) = 6k+2$, maka $D_t^{-1}\left(L\left(T_k\right)\right)$ merupakan himpunan invers dominasi total dengan kardinalitas minimum pada $L\left(T_k\right)$.
Selanjutnya pada $L\left(T_k\right)$ jika $k$ bertambah 1 maka simpul baru yang terbentuk bertambah 18 simpul yaitu

$$\left\{e_{3(3(2k+1))-2}, e_{3(3(2k+1))-1}, e_{3(3(2k+1))}, \ldots, e_{3(3(2k+1))+15}\right\}$$

dengan simpul

$$e_{3(3(2k+1))-1},\ e_{3(3(2k+1))+2},\ e_{3(3(2k+1))+5},\ e_{3(3(2k+1))+8}\ , e_{3(3(2k+1))+11}$$

yang bertetangga dengan 6 simpul disekitarnya. Adapun simpul

$$e_{3(3(2k+1))-2}, e_{3(3(2k+1))}, e_{3(3(2k+1))+1}, e_{3(3(2k+1))+3}, e_{3(3(2k+1))+4}, e_{3(3(2k+1))+6},$$
$$e_{3(3(2k+1))+7}, e_{3(3(2k+1))+10}, e_{3(3(2k+1))+12}, e_{3(3(2k+1))+13}$$

dan $e_{3(3(2k+1))+14}$ bertetangga dengan 4 simpul disekitarnya. Sedangkan simpul $e_{3(3(2k+1))+15}$ bertetangga dengan 2 simpul disekitarnya. Oleh karena itu, diperoleh

$$V\left(L\left(T_{k+1}\right)\right) = \left\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \ldots,\ e_{3(3(2k+1))-3}, \ldots,\ e_{3(3(2k+1))+15}\right\}.$$

Selanjutnya, dipilih

$$\begin{aligned} D_t\left(L\left(T_{k+1}\right)\right) \quad = \quad & \{e_2, e_5, e_{11}, e_{14}, \ldots, e_{3(3(2k+1))-7}, e_{3(3(2k+1))-4}, \\ & e_{3(3(2k+1))+2}, e_{3(3(2k+1))+5}, e_{3(3(2k+1))+11}, \\ & e_{3(3(2k+1))+14}\} \end{aligned}$$

sehingga didapat

$$N\left(D_t\left(L\left(T_{k+1}\right)\right)\right) = V(L\left(T_{k+1}\right)$$

dan

$$\left|D_t\left(L\left(T_{k+1}\right)\right)\right| = \left\lceil \frac{2\left(3\left(2(k+1)+1\right)\right)}{3} \right\rceil$$

Berdasarkan Lemma (2), maka $D_t\left(L\left(T_{k+1}\right)\right)$ merupakan himpunan dominasi total dengan kardinalitas minimum pada $L\left(T_{k+1}\right)$.
Kemudian dari 18 simpul baru yang terbentuk, dipilih

$$\begin{aligned} A \quad = \quad & \{e_{3(3(2k+1))}, e_{3(3(2k+1))+1}, e_{3(3(2k+1))+6}, e_{3(3(2k+1))+7}, e_{3(3(2k+1))+12}, \\ & e_{3(3(2k+1))+13}\} \end{aligned}$$

dan selanjutnya diperoleh $N\left(A\right) \cup N\left(D_t^{-1}\left(L\left(T_k\right)\right)\right) = V(L\left(T_{k+1}\right)$. Karena

$N(A) \cup N\left(D_t^{-1}(L(T_k))\right) = V(L(T_{k+1})$ dan $A \cup D_t^{-1}(L(T_k)) \subseteq V(L(T_{k+1}) - D_t(L(T_{k+1}))$, maka $A \cup D_t^{-1}(L(T_k))$ merupakan himpunan invers dominasi total pada $L(T_{k+1})$. Sehingga didapat $\left|A \cup D_t^{-1}(L(T_k))\right| = 6 + (6k+2) = 6k+8$ dan diperoleh $\gamma_t^{-1}(L(T_{k+1})) \leq 6k+8$.
Dimisalkan $\gamma_t^{-1}(L(T_{k+1})) = 6k+8-1$, maka terdapat $6k+8-1$ simpul yang merupakan kardinalitas minimum dari himpunan invers dominasi total pada $L(T_{k+1})$. Jika terdapat $6k+8-1$ simpul pada himpunan invers dominasi total pada $L(T_{k+1})$, akibatnya terdapat setidaknya satu simpul pada $L(T_{k+1})$ yang tidak terdominasi. Oleh karena itu, haruslah $\gamma_t^{-1}(L(T_{k+1})) = 6k+8$. Jadi, dapat disimpulkan $\gamma_t^{-1}(L(T_{k+1})) = 6k+8$, maka $P(k+1)$ benar.
Dengan demikian, karena $P(k=1)$ benar dan $P(k+1)$ benar, maka terbukti untuk semua $n = 3(2k+1)$, $k \in \mathbb{N}$ bahwa $\gamma_t^{-1}(L(T_k)) = 3(2k+1) - 1$ atau $\gamma_t^{-1}(L(T_n)) = n-1$ untuk $n \equiv 0 \pmod 3$ dan $n$ ganjil.

(b) **Untuk $n \equiv 0 \ (mod\ 3)$ dan $n$ genap**
Oleh karena $n \equiv 0 \pmod 3$ dan $n$ genap, maka $n = 3(2k+2)$ untuk $k \in \mathbb{N}$. Pertama akan ditunjukkan bahwa $P(k=1)$ benar. Karena $k=1$ maka $n=12$, diketahui $V(L(T_{12}) = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{33}\}$. Berdasarkan Persamaan (3), diperoleh

$$D_t(L(T_{12})) = \{e_2, e_5, e_{11}, e_{14}, e_{20}, e_{23}, \ \ e_{29}, e_{32}\}$$

sehingga

$$D_t(L(T_{12})) = \{e_2, e_5, e_{11}, e_{14}, e_{20}, e_{23}, \ \ e_{29}, e_{32}\}.$$

Persekitaran terbuka dari setiap simpul pada $V(L(T_{12})) - D_t(L(T_{12}))$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} N(e_1) &= \{e_2, e_3\}, N(e_{33}) = \{e_{31}, e_{32}\} \\ N(e_j) &= \{e_{j-3}, e_{j-2}, e_{j-1}, e_{j+1}, e_{j+2}, e_{j+3}\}, \text{untuk } j = 8, 17, 26 \\ N(e_i) &= \{e_{i-2}, e_{i-1}, e_{i+1}, e_{i+2}\}, \text{untuk } i = 3, 4, 6, 7, 9, 10, \ldots, 30, 31. \end{aligned}$$

Berdasarkan persekitaran terbuka setiap simpul pada $V(L(T_{12})) - D_t(L(T_{12}))$, dipilih

$$D_t^{-1}(L(T_{12})) \subseteq V(L(T_{12})) - D_t(L(T_{12}))$$

dengan

$$D_t^{-1}(L(T_{12})) = \{e_3, e_4, e_9, e_{10}, e_{15}, e_{17}, e_{19}, e_{24}, e_{25}, e_{30}, e_{31}\}.$$

Perhatikan bahwa $N\left(D_t^{-1}(L(T_{12}))\right) = V(L(T_{12}))$, sehingga $D_t^{-1}(L(T_{12}))$ merupakan himpunan invers dominasi total, sehingga diperoleh $\gamma_t^{-1}(L(T_{12})) \leq 11$. Perhatikan bahwa untuk setiap $e_i \in D_t^{-1}(L(T_{12}))$, terdapat $x \in N(e_i)$ sedemikian sehingga $x \notin N(e_j)$, untuk setiap $j \neq i$ dan $e_j \in D_t^{-1}(L(T_{12}))$. Oleh karena itu, jika salah satu elemen dari $D_t^{-1}(L(T_{12}))$ dikeluarkan berakibat $x$ tidak terdominasi atau $N\left(D_t^{-1}(L(T_{12}))\right) \neq V((L(T_{12}))$. Kontradiksi dengan $D_t^{-1}(L(T_{12}))$

himpunan invers dominasi total. Didapat kardinalitas minimum dari $D_t^{-1}(L(T_{12}))$ adalah 11. Jadi, benar untuk $k=1$.
Asumsikan benar untuk $P(k)$, maka $\gamma_t^{-1}(L(T_k)) = 3(2k+2)-1 = 6k+5$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $P(k+1)$, sehingga

$$\gamma_t^{-1}(L(T_{k+1})) = 3(2(k+1)+2)-1 = 6k+11.$$

Dimisalkan

$$V(L(T_k)) = \left\{e_1, e_2, e_3, \ldots, \; e_{3(3(2k+2))-3}\right\}$$

dan berdasarkan Persamaan (3), diperoleh

$$D_t(L(T_k)) = \left\{e_2, e_5, e_{11}, e_{14}, \ldots, e_{3(3(2k+2))-7}, e_{3(3(2k+2))-4}\right\}$$

yang merupakan himpunan dominasi total dengan kardinalitas minimum pada $L(T_k)$.
Dimisalkan dipilih

$$D_t^{-1}(L(T_k)) \subseteq V(L(T_k)) - D_t(L(T_k))$$

dengan

$$\begin{aligned} D_t^{-1}(L(T_k)) \quad = \quad & \{e_3, e_4, e_9, e_{10}, \; e_{15}, e_{17}, e_{19}\} \cup \\ & \left\{e_{24}, e_{25}, e_{30}, e_{31}, \ldots, e_{3(3(2k+2))-6}, e_{3(3(2k+2))-5}\right\} \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $N\left(D_t^{-1}\right) = V(L(T_k))$, akibatnya $D_t^{-1}(L(T_k))$ merupakan himpunan invers dominasi total pada $L(T_k)$. Indeks simpul dengan urutan ganjil dielemen $D_t^{-1}(L(T_k))$ membentuk suatu barisan aritmatika dengan $u_1 = 25$ dan $b = 6$. Begitupula untuk indeks simpul dengan urutan genap dielemen $D_t^{-1}(L(T_k))$ membentuk suatu barisan aritmatika dengan $u_1 = 24$ dan $b = 6$, sehingga diperoleh $\left|D_t^{-1}(L(T_k))\right| = 6k+5$. Berdasarkan asumsi $P(k)$ benar yaitu

$$\gamma_t^{-1}(L(T_k)) = 6k+5,$$

maka $D_t^{-1}(L(T_k))$ merupakan himpunan invers dominasi total dengan kardinalitas minimum pada $L(T_k)$.
Selanjutnya pada $L(T_k)$ jika $k$ bertambah 1 maka simpul baru yang terbentuk bertambah 18 simpul yaitu

$$\left\{e_{3(3(2k+2))-2}, e_{3(3(2k+2))-1}, e_{3(3(2k+2))}, \ldots, e_{3(3(2k+2))+15}\right\}$$

dengan simpul

$$e_{3(3(2k+2))-1}, e_{3(3(2k+2))+2}, e_{3(3(2k+2))+5}, e_{3(3(2k+2))+8}, e_{3(3(2k+2))+11}$$

bertetangga dengan 6 simpul disekitarnya. Simpul

$e_{3(3(2k+2))-2}, e_{3(3(2k+2))}, e_{3(3(2k+2))+1}, e_{3(3(2k+2))+3}, e_{3(3(2k+2))+4}, e_{3(3(2k+2))+6}, e_{3(3(2k+2))+7}, e_{3(3(2k+2))+9}, e_{3(3(2k+2))+10}, e_{3(3(2k+2))+12}, e_{3(3(2k+2))+13}$

dan $e_{3(3(2k+2))+14}$ bertetangga dengan 4 simpul disekitarnya. Simpul $e_{3(3(2k+2))+15}$ bertetangga dengan 2 simpul disekitarnya. Sehingga,

$$V\left(L\left(T_{k+1}\right)\right) = \left\{e_1, e_2,\ e_3, e_4,\ e_5, \ldots,\ e_{3(3(2k+2))-3}, \ldots, e_{3(3(2k+2))+15}\right\}.$$

Dipilih

$$D_t\left(L\left(T_{k+1}\right)\right) \subseteq V\left(L\left(T_{k+1}\right)\right)$$

dengan

$$\begin{aligned} D_t\left(L\left(T_{k+1}\right)\right) \quad = \quad & \{e_2, e_5, e_{11}, e_{14}, e_{20}, e_{23}, \ldots, e_{3(3(2k+2))-7}, e_{3(3(2k+2))-4}, \\ & e_{3(3(2k+2))+2}, e_{3(3(2k+2))+5}, e_{3(3(2k+2))+11}, e_{3(3(2k+2))+14}\} \end{aligned}$$

maka diperoleh

$$N\left(D_t\left(L\left(T_{k+1}\right)\right)\right) = V(L\left(T_{k+1}\right)$$

dan

$$\left|D_t\left(L\left(T_{k+1}\right)\right)\right| = \left\lceil \frac{2\left(3\left(2\left(k+1\right)+2\right)\right)}{3} \right\rceil.$$

Berdasarkan Lemma 2, maka $D_t\left(L\left(T_{k+1}\right)\right)$ merupakan himpunan dominasi total dengan kardinalitas minimum pada $L\left(T_{k+1}\right)$.
Kemudian dipilih dari 18 simpul baru yang terbentuk, dipilih

$$\begin{aligned} A \quad = \quad & \{e_{3(3(2k+2))}, e_{3(3(2k+2))+1}, e_{3(3(2k+2))+6}, e_{3(3(2k+2))+7}, e_{3(3(2k+2))+12}, \\ & e_{3(3(2k+2))+13}\} \end{aligned}$$

sehingga didapat $N\left(A\right) \cup N\left(D_t^{-1}\left(L\left(T_k\right)\right)\right) = V(L\left(T_{k+1}\right)$. Karena

$$N\left(A\right) \cup N\left(D_t^{-1}\left(L\left(T_k\right)\right)\right) = V(L\left(T_{k+1}\right)$$

dan

$$A \cup D_t^{-1}\left(L\left(T_k\right)\right) \subseteq V(L\left(T_{k+1}\right) - D_t\left(L\left(T_{k+1}\right)\right)$$

maka $A \cup D_t^{-1}\left(L\left(T_k\right)\right)$ merupakan himpunan invers dominasi total pada $L\left(T_{k+1}\right)$. Didapat $\left|A \cup D_t^{-1}\left(L\left(T_k\right)\right)\right| = 6 +\ (6k+5) = 6k+11$ dan diperoleh $\gamma_t^{-1}\left(L\left(T_{k+1}\right)\right) \leq 6k+11$.

Dimisalkan $\gamma_t^{-1}\left(L\left(T_{k+1}\right)\right) = 6k+11-1$, maka terdapat $6k+11-1$ simpul yang merupakan kardinalitas minimum dari himpunan invers dominasi total pada $L\left(T_{k+1}\right)$. Jika terdapat $6k+11-1$ simpul pada himpunan invers dominasi total pada $L\left(T_{k+1}\right)$, akibatnya terdapat setidaknya satu simpul pada $L\left(T_{k+1}\right)$ yang tidak terdominasi. Oleh karena itu, haruslah $\gamma_t^{-1}\left(L\left(T_{k+1}\right)\right) = 6k+11$. Jadi, dapat disimpulkan $\gamma_t^{-1}\left(L\left(T_{k+1}\right)\right) = 6k+11$ maka $P\left(k+1\right)$ benar.

Karena $P(k=1)$ benar dan $P(k+1)$ benar, maka terbukti untuk semua $n = 3(2k+2)$, $k \in \mathbb{N}$ bahwa $\gamma_t^{-1}(L(T_k)) = 3(2k+2) - 1$ atau $\gamma_t^{-1}(L(T_n)) = n - 1$ untuk $n \equiv 0 \pmod 3$ dan $n$ genap.
Untuk 4 kasus lainnya yaitu $n \equiv 1 \pmod 3$ dan $n$ ganjil, $n \equiv 1 \pmod 3$ dan $n$ genap, $n \equiv 2 \pmod 3$ dan $n$ ganjil, $n \equiv 2 \pmod 3$ dan $n$ genap, dapat dibuktikan dengan cara yang sama seperti pada kasus **(1)** dan **(2).**

Berdasarkan poin $(\mathbf{1})$ dan $(\mathbf{2})$, maka terbukti bahwa

$$\gamma_t^{-1}(L(T_n)) = \begin{cases} n, & n = 4,6,8 \\ n-1, & n = 3,5,7 \text{ atau } n \geq 9. \end{cases}$$

□

### *3.3. Bilangan Invers Dominasi Total pada Shadow Triangular Snake Graph*

Bilangan invers dominasi total pada *Shadow Triangular Snake Graph*, dinyatakan pada Teorema 2.

**Teorema 2.** *Jika $D_2(T_n)$ merupakan shadow triangular snake graph dengan $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, maka*

1. $\gamma_t(D_2(T_n)) = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$
2. $\gamma_t^{-1}(D_2(T_n)) = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$.

***Bukti.*** Diberikan $D_2(T_n)$ untuk $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$ dengan $V(D_2(T_n)) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, v_1', v_2', \ldots, v_n', u_1', u_2', \ldots, u_{n-1}'\}$, sehingga $|V(D_2(T_n))| = 4n-2$ dan $|E(D_2(T_n))| = 12(n-1)$. Simpul $v_1$ dan $v_n$ bertetangga dengan 4 simpul disekitarnya, atau $N(v_1) = \left\{v_2, v_2', u_1, u_1'\right\}$ dan $N(v_n) = \left\{v_{n-1}, v_{n-1}', u_{n-1}, u_{n-1}'\right\}$. Simpul $v_i$ dan $v_i'$ untuk $i = 2,3,4,\ldots,n-1$ bertetangga dengan 8 simpul disekitarnya, atau $N(v_i) = N\left(v_i'\right) = \{v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i-1}', v_{i+1}', u_{i-1}, u_i, u_{i-1}', u_i'\}$. Simpul $u_i$ dan $u_i'$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,n$ bertetangga dengan 4 simpul disekitarnya atau $N(u_i) = N\left(u_i'\right) = \left\{v_i, v_{i+1}, v_i', v_{i+1}'\right\}$.

1. Akan dibuktikan bahwa $\gamma_t(D_2(T_n)) = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$, untuk $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$
   Misalkan dipilih $D_t(D_2(T_n)) \subseteq V(D_2(T_n))$ dengan $D_t(D_2(T_n))$ sebagai berikut:
   (a) $D_t = \left\{v_2, v_3, v_5, v_6, \ldots, v_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, v_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}\right\}$ untuk $n \equiv 0 \pmod 3$, $n \equiv 1 \pmod 3$ sehingga
   $$\begin{aligned} N(D_t) &= N(v_2) \cup N(v_3) \cup N(v_5) \cup N(v_6) \cup \ldots \cup N\left(v_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}\right) \cup N\left(v_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}\right) \\ &= \{v_1, v_3, u_1, u_2, v_1', v_3', u_1', u_2'\} \cup \{v_2, v_4, u_2, u_3, v_2', v_4', u_2', u_3'\} \cup \cdots \cup \\ &\quad \left\{v_{(3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1) - 1}, v_{(3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1) + 1}, u_{(3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1) + 1}, u_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, \ldots, u_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}'\right\} \cup \\ &\quad \left\{v_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, v_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1}, u_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1}, u_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}, v_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}', v_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1}', u_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1}', u_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}'\right\} \\ &= V(D_2(T_n)). \end{aligned}$$
   (b) $D_t = \left\{v_2, v_3, v_5, v_6, \ldots, v_{3(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1)}, v_{3(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor)}\right\} \cup \{v_{n-1}\}$ untuk $n \equiv 2$ *mod* (3), sehingga

$$\begin{aligned}
N(D_t) &= (v_2) \cup N(v_3) \cup N(v_5) \cup N(v_6) \cup \cdots \cup N\left(v_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}\right) \cup N(v_{n-1}) \\
&= \left\{v_1, v_3, u_1, u_2, v_1^{'}, v_3^{'}, u_1^{'}, u_2^{'}\right\} \cup \{v_2, v_4, u_2, u_3, v_2^{'}, v_4^{'}, u_2^{'}, u_3^{'}\} \cup \ldots \cup \\
&\quad \left\{v_{3(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1)-1}, \; v_{3(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1)+1}, u_{3(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1)+1}, u_{3(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1)}, \ldots, u^{'}_{3(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1)}\right\} \cup \\
&\quad \left\{v_{3(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor)-1}, \; v_{3(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor)+1}, \; u_{3(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor)+1}, \; u_{3(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor)}, v^{'}_{3(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor)-1}, \ldots, u^{'}_{3(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1)}\right\} \cup \\
&\quad \left\{v_{(n-1)-1}, v_{(n-1)+1}, u_{(n-1)-1}, u_{(n-1)}, v^{'}_{(n-1)-1}, v^{'}_{(n-1)+1}, u^{'}_{(n-1)-1}, u^{'}_{(n-1)}\right\} \\
&= V(D_2(T_n)).
\end{aligned}$$

Berdasarkan poin (**a**) dan (**b**), diperoleh $N(D_t(D_2(T_n))) = V(D_2(T_n))$. Karena $N(D_t(D_2(T_n))) = V(D_2(T_n))$, maka (**a**) dan (**b**) merupakan himpunan dominasi total pada graf $D_2(T_n)$, sehingga diperoleh $\gamma_t \leq \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$. Perhatikan bahwa untuk setiap $v_i \in D_t(D_2(T_n))$, terdapat $x \in N(v_i)$ sedemikian sehingga $x \notin N(v_j)$, untuk setiap $j \neq i$ dan $v_j \in D_t(D_2(T_n))$. Oleh karena itu, jika salah satu elemen dari $D_t(D_2(T_n))$ dikeluarkan berakibat $x$ tidak terdominasi atau $N(D_t(D_2(T_n))) \neq V((D_2(T_n))$. Kontradiksi dengan $D_t(D_2(T_n))$ himpunan dominasi total. Didapat kardinalitas minimum dari $D_t(D_2(T_n))$ adalah $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$.

2. Akan dibuktikan bahwa $\gamma_t^{-1}(D_2(T_n)) = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ , untuk $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$
   Akan dibuktikan untuk $n \equiv 0 \; (mod\, 3)$ dan $n \equiv 1 \; (mod\, 3)$. Diketahui bahwa $N(v_i) = N\left(v_i^{'}\right)$ untuk $i = 2, 3, 4, \ldots, n-1$. Berdasarkan poin **(1)**, diperoleh $D_t(D_2(T_n)) = \left\{v_2, v_3, v_5, v_6, \ldots, v_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, v_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}\right\}$ merupakan himpunan dominasi total dengan kardinalitas minimum. Misal, dipilih

$$D_t^{-1}(D_2(T_n)) \subseteq V(D_2(T_n)) - D_t(D_2(T_n))$$

   dengan

$$D_t^{-1}(D_2(T_n)) = \left\{v_2^{'}, v_3^{'}, v_5^{'}, v_6^{'}, \ldots, v^{'}_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, v^{'}_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}\right\}.$$

   Karena $N(v_i) = N\left(v_i^{'}\right)$ dan

$$D_t(D_2(T_n)) = \left\{v_2, v_3, v_5, v_6, \ldots, v_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, v_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}\right\}$$

   merupakan himpunan dominasi total dengan kardinalitas minimum, maka

$$\begin{aligned}
N(D_t) &= N\left(\left\{v_2, v_3, v_5, v_6, \ldots, v_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, v_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}\right\}\right) \\
&= N\left(\left\{v_2^{'}, v_3^{'}, v_5^{'}, v_6^{'}, \ldots, v^{'}_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, v^{'}_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}\right\}\right) \\
&= N\left(D_t^{-1}\right) \\
&= V(D_2(T_n)).
\end{aligned}$$

   Dengan demikian,

$$D_t^{-1}(D_2(T_n)) = \left\{v_2^{'}, v_3^{'}, v_5^{'}, v_6^{'}, \ldots, v^{'}_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, v^{'}_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}\right\}$$

merupakan himpunan invers dominasi total dengan kardinalitas minimum. Akibatnya diperoleh $\gamma_t\left(D_2\left(T_n\right)\right)=\gamma_t^{-1}\left(D_2\left(T_n\right)\right)=\left\lfloor\frac{2n}{3}\right\rfloor$.

Pembuktian untuk kasus $n\equiv 2\pmod 3$ dapat dibuktikan menggunaakan cara yang sama dengan kasus $n\equiv 0\pmod 3$ dan $n\equiv 1\pmod 3$.

Jadi, berdasarkan poin **(1)** dan **(2)** terbukti bahwa $\gamma_t\left(D_2\left(T_n\right)\right)=\gamma_t^{-1}\left(D_2\left(T_n\right)\right)=\left\lfloor\frac{2n}{3}\right\rfloor$.

□

## 4. Kesimpulan

Hasil dari penelitian ini diperoleh, bahwa graf $T_n$ tidak memiliki bilangan invers dominasi total. Namun, setelah dilakukan operasi *line* dan *shadow* pada graf $T_n$ didapat bilangan invers dominasi total pada graf $L\left(T_n\right)$ yaitu $\gamma_t^{-1}\left(L\left(T_n\right)\right)=n$ untuk $n=4,6,8$, dan $\gamma_t^{-1}\left(L\left(T_n\right)\right)=n-1$ untuk $n=3,5,7$, atau $n\geq 9$ dengan $n\in\mathbb{N}$. Sedangkan pada graf $D_2\left(T_n\right)$ diperoleh $\gamma_t\left(D_2\left(T_n\right)\right)=\gamma_t^{-1}\left(D_2\left(T_n\right)\right)=\left\lfloor\frac{2n}{3}\right\rfloor$ untuk $n\geq 3$ dengan $n\in\mathbb{N}$.

## Referensi


[1] R. Munir, *Matematika Diskrit*, 3rd ed. Bandung: Informatika, 2010.

[2] G. Chartrand and L. Lesniak, *Graphs & digraphs*, 3rd ed. CRC repr. Boca Raton, Fla.: Chapman & Hall, 2000.

[3] V. R. Kulli and S. Sigarkanti, "Inverse Domination In Graphs," *National Academy Science Letters*, vol. 14, no. 12, pp. 473–475, 1991.

[4] M. A. Henning and A. Yeo, *Total Domination in Graphs*, ser. Springer Monographs in Mathematics. New York, NY: Springer New York, 2013, doi: http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4614-6525-6.

[5] V. R. Kulli and R. R. Iyer, "Inverse total domination in graphs," *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, vol. 10, no. 5, pp. 613–620, oct 2007, doi: http://dx.doi.org/10.1080/09720529.2007.10698143.

[6] M. El-Zahar, S. Gravier, and A. Klobucar, "On the total domination number of cross products of graphs," *Discrete Mathematics*, vol. 308, no. 10, pp. 2025–2029, may 2008, doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2007.04.034.

[7] M. A. Henning, "A survey of selected recent results on total domination in graphs," *Discrete Mathematics*, vol. 309, no. 1, pp. 32–63, jan 2009, doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2007.12.044.

[8] S. A. Kauser, A. Khan, and M. S. Parvathi, "Inverse Domination and Inverse Total Domination for an Undirected Graph," *Advances and Applications in Discrete Mathematics*, vol. 23, no. 2, pp. 65–74, mar 2020, doi: http://dx.doi.org/10.17654/DM023020065.

[9] A. N. Gani and S. Anupriya, "Inverse Total Domination on Intuitionistic Fuzzy Graphs," *Int. J. Pure Appl. Math.*, vol. 117, no. 13, pp. 29–34, 2017.

[10] K. C and S. K, "Inverse Domination And Inverse Total Domination In Digraph," *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, vol. 66, no. 3, pp. 12–17, mar 2020, doi: http://dx.doi.org/10.14445/22315373/IJMTT-V66I3P503.

[11] M. P. Sumathi, "On neighbourhood transversal domination in graphs," *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, vol. 9, pp. 243–252, 2014, doi: http://dx.doi.org/10.12988/ijcms.2014.4221.

[12] S. K. Vaidya and R. M. Pandit, "Edge Domination in Various Snake Graphs," *International Journal of Mathematics and Soft Computing*, vol. 7, no. 1, p. 43, jan 2017, doi: http://dx.doi.org/10.26708/IJMSC.2017.1.7.05.

[13] I. Roza, N. Narwen, and Z. Zulakmal, doi: https://doi.org/10.25077/jmu.3.2.1-4.2014.

[14] P. Ghosh, S. N. Mishra, and A. Pal, "Various Labeling on Bull Graph and Some Related Graphs," *Int. J. Appl. Fuzzy Sets Artif. Intell.*, vol. 5, pp. 23–35, 2015.

[15] M. K. Fransiskus Fran, Murti, "Bilangan Dominasi Total pada Triangular Snake Graph," *Bimaster : Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, vol. 9, no. 1, pp. 87–94, jan 2020, doi: http://dx.doi.org/10.26418/bbimst.v9i1.38589.