

Bifurkasi Pada Model Penyebaran Penyakit MERS-CoV di Dua Wilayah dengan Populasi Konstan

Livia Owen^{1*}

¹Jurusan Matematika, Universitas Katolik Parahyangan, Bandung 40142, Indonesia

*Corresponding author. Email: livia.owen@unpar.ac.id

ABSTRAK

Middle East Respiratory Syndrome Coronavirus (MERS-CoV) disebabkan oleh virus corona dan dapat menjadi penyakit menular dari manusia ke manusia. Organisasi Kesehatan Dunia (WHO) melaporkan wabah penyakit pertama kali terjadi di Arab Saudi pada 2012 dan kasus terakhir dilaporkan pada 2019. Pada 2018, wabah MERS-CoV dilaporkan di Republik Korea, Inggris Raya, Irlandia Utara, Arab Saudi, Uni Emirat Arab, Oman, dan Malaysia. Kasus yang teridentifikasi di luar Timur Tengah biasanya disebabkan oleh orang yang bepergian yang terinfeksi di Timur Tengah dan kemudian melakukan perjalanan kembali ke negaranya. Penelitian sebelumnya telah membangun model matematika untuk penularan MERS-CoV di dua wilayah dengan memisahkan populasi manusia menjadi kelompok rentan dan terinfeksi. Penelitian tersebut berfokus pada angka reproduksi dasar dan analisis sensitivitas. Dalam makalah ini, dilakukan penyederhanaan model dengan asumsi bahwa jumlah penduduk setiap daerah adalah konstan. Dengan menggunakan Metode Pengali Lagrange, ditemukan bifurkasi kodimensi satu dan kodimensi dua yaitu bifurkasi *fold* dan bifurkasi *cusps*. Dengan demikian, diperoleh juga domain parameter di mana tiga, dua dan satu titik kesetimbangan non-trivial terjadi. Hasil lain adalah ditemukannya titik bifurkasi transkritikal sehingga dapat diketahui domain parameter dimana titik ekuilibrium bebas penyakit bersifat stabil.

Kata Kunci:

MERS-CoV; Virus Corona; Bifurkasi *Fold*; Bifurkasi *Cusp*; Bifurkasi Transcritikal

ABSTRACT

Middle East Respiratory Syndrome Coronavirus (MERS-CoV) is caused by a novel coronavirus and it can be a human to human transmission disease. World Health Organization (WHO) reported the disease outbreak first happened in Saudi Arabia in 2012 and the last case is reported in 2019. In 2018, MERS-CoV outbreaks were reported in the Republic of Korea, United Kingdom of Great Britain, Northern Ireland, Saudi Arabia, Uni Arab Emirates, Oman, and Malaysia. Cases that are identified outside the Middle East are usually caused by traveling people who were infected in the Middle East and then traveled back to their country. The previous research had constructed a mathematical model for the transmission of MERS-CoV in two areas by separating the human population into susceptible and infectious groups. It focused on the basic reproductive number and sensitivity analysis. In this paper, we simplify the model with the assumption that the total population of each area is constant. Using Lagrange Multiplier Method, we find some co-dimension one and co-dimension two bifurcations i.e. *fold* bifurcation and *cusps* bifurcation, respectively. We get the domain of parameters where three, two and one non-trivial equilibrium point occurs. We also find a transcritical bifurcation point such that the disease-free equilibrium point is stable on some parameter domains.

Keywords:MERS-CoV; Coronavirus; Fold Bifurcation; Cusp Bifurcation; Transcritical Bifurcation

Format Sitasi:

L. Owen, "Bifurkasi Pada Model Penyebaran Penyakit MERS-CoV di Dua Wilayah dengan Populasi Konstan", *Jambura J. Math.*, vol. 4, No. 2, pp. 296–305, 2022, doi: <https://doi.org/10.34312/jjom.v4i2.14190>

1. Pendahuluan

Sejak kasus pertama diketahui pada tahun 2012, penelitian model matematika mengenai penyebaran penyakit MERS-CoV masih berkembang sampai sekarang. Mulai dari model penyebaran MERS-CoV antara manusia dengan unta yang awalnya dipercaya merupakan inang virus MERS-CoV sampai model penyebaran antar manusia [1, 2]. Tidak hanya dinamika populasi, analisa sensitivitas, dan masalah kontrol, kini penelitian berkembang ke analisa bifurkasi. Makalah [3] yang terbit pada Januari 2022 membahas mengenai dinamika transmisi dan bifurkasi *backward* model MERS-CoV. Model yang digunakan berfokus pada populasi manusia dan populasi unta serta bifurkasi *backward* yang ditemukan adalah bifurkasi *fold* (atau disebut juga bifurkasi *saddle node*). Pada bifurkasi *fold*, terjadi perubahan banyaknya titik ekuilibrium akibat dari perubahan suatu parameter. Model penyebaran MERS-CoV akibat adanya kontak manusia dengan unta dibahas pada [4], bifurkasi *backward* yang ditemukan adalah bifurkasi transkritikal. Pada bifurkasi transkritikal, terjadi perubahan kestabilan antara dua titik ekuilibrium akibat dari perubahan suatu parameter.

Dilaporkan pada website World Health Organization (WHO) [5], kasus terakhir MERS-CoV dilaporkan pada tahun 2019. Namun tidak berakhir pada tahun tersebut, akhir tahun 2019 kemunculan COVID-19 yang sama-sama disebabkan oleh virus corona, membuat banyak penelitian model matematika MERS-CoV dijadikan sebagai acuan. Terbaru akan terbit Juni 2022, bifurkasi transkritikal pada model penyakit COVID-19 dianalisa oleh [6] dan [7].

Topik yang dibahas pada makalah ini merupakan lanjutan dari makalah sebelumnya mengenai model penyebaran MERS-CoV di dua wilayah [8]. Penelitian tersebut dilatarbelakangi tingginya mobilisasi penduduk Indonesia ke Arab Saudi karena Indonesia adalah negara dengan penduduk terbanyak yang melakukan perjalanan ibadah haji dan umrah. Pada makalah tersebut, kasus penyebaran akibat dari perjalanan antara dua wilayah menjadi fokus utama dan populasi manusia dibagi menjadi empat sub-populasi, yaitu populasi manusia rentan dan terinfeksi di dua wilayah. Kami menganalisa titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium non-trivial serta kestabilannya, bilangan reproduksi dasar dan juga analisa sensitivitas. Selain MERS-CoV, makalah [8] disitasi oleh banyak model penyakit lainnya, seperti COVID-19 pada [9–14] dan Chikungunya [15].

Penelitian ini mencoba menyederhanakan sistem berdimensi empat tersebut ke sistem berdimensi dua kemudian dilakukan analisa bifurkasi. Dengan penyederhanaan tersebut, titik ekuilibrium non-trivial yang sebelumnya sulit didapatkan secara analitik menjadi akar dari persamaan pangkat tiga dan sangat mungkin terjadi bifurkasi kodimensi satu yaitu bifurkasi *fold* dan berlanjut bifurkasi kodimensi dua yaitu bifurkasi cusp. Komputasi titik bifurkasi *fold* dan cusp menggunakan metode Pengali Lagrange yang diperkenalkan pada [16]. Kelebihan dari penggunaan metode ini

dibandingkan metode kontinuasi tradisional adalah tidak diperlukannya menghitung titik ekuilibrium yang mengalami bifurkasi terlebih dahulu. Dengan bervariasi suatu parameter, komputasi titik-titik bifurkasi *fold* menghasilkan kurva bifurkasi *fold* dan pada sistem makalah ini diperoleh dua kurva bifurkasi *fold*. Ketika parameter lainnya divariasikan, kedua kurva *fold* ini berpotongan secara non-transversal di suatu titik bifurkasi cusp. Walaupun ordinat titik bifurkasi cusp ini bernilai negatif (sedikit di bawah nol), keberadaannya memperkaya dinamika yang terjadi. Penelitian-penelitian model penyebaran penyakit akibat virus corona belum ada yang membahas sampai bifurkasi kodimensi dua ini.

2. Model

Pada penelitian Yong and Owen [8], populasi dibagi menjadi: populasi manusia rentan di wilayah x , populasi manusia terinfeksi di wilayah x , populasi manusia rentan di wilayah y , populasi manusia terinfeksi di wilayah y dan dinotasikan secara berurutan sebagai S_x, I_x, S_y, I_y . Dengan beberapa asumsi, diperoleh sistem persamaan diferensial non-linier berdimensi empat untuk penyebaran penyakit MERS-CoV di dua wilayah sebagai berikut:

$$\begin{cases} \dot{I}_x = \frac{\beta S_x I_x}{S_x + I_x} - (c + d + \alpha_1) I_x + \alpha_2 I_y + \frac{\omega \alpha_2 S_y I_y}{S_y + I_y} \\ \dot{I}_y = \frac{\beta S_y I_y}{S_y + I_y} - (c + d + \alpha_2) I_y + \alpha_1 I_x + \frac{\omega \alpha_1 S_x I_x}{S_x + I_x} \\ \dot{S}_x = a_1 - \frac{\beta S_x I_x}{S_x + I_x} - (b + \alpha_1) S_x + \alpha_2 S_y + d I_x - \frac{\omega \alpha_2 S_y I_y}{S_y + I_y} \\ \dot{S}_y = a_2 - \frac{\beta S_y I_y}{S_y + I_y} - (b + \alpha_2) S_y + \alpha_1 S_x - \frac{\omega \alpha_1 S_x I_x}{S_x + I_x} \end{cases} \quad (1)$$

dengan

- a_1 : Banyaknya manusia rentan yang masuk ke populasi wilayah x
- a_2 : Banyaknya manusia rentan yang masuk ke populasi wilayah y
- b : Laju kematian alami pada individu rentan
- c : Laju kematian akibat penyakit MERS-CoV
- d : Laju kesembuhan MERS-CoV
- β : Laju transmisi di wilayah yang sama
- α_1 : Laju perpindahan individu dari wilayah x menuju wilayah y
- α_2 : Laju perpindahan individu dari wilayah y menuju wilayah x
- ω : Laju transmisi di wilayah yang berbeda

dan notasi titik berarti turunan terhadap waktu t . Seluruh parameter non-negatif dan parameter yang menjadi fokus penelitian tersebut adalah α_1 dan α_2 untuk melihat dampak dari perpindahan individu di dua wilayah tersebut.

Untuk penyederhanaan masalah, pertama diasumsikan total populasi masing-masing wilayah konstan misal dinotasikan dengan N_x dan N_y yang mengakibatkan $\dot{I}_x + \dot{S}_x = 0$ dan $\dot{I}_y + \dot{S}_y = 0$ sehingga sistem (1) dapat disederhanakan sistem persamaan diferensial non linier berdimensi dua. Misalkan dua variabel baru sebagai berikut:

- $x = \frac{I_x}{N_x}$: Proporsi populasi terinfeksi terhadap total populasi di wilayah x
- $y = \frac{I_y}{N_y}$: Proporsi populasi terinfeksi terhadap total populasi di wilayah y

dan sebuah parameter baru yaitu:

$$\eta = \frac{N_y}{N_x} : \text{ Proporsi total populasi di wilayah } y \text{ terhadap total populasi di wilayah } x.$$

Dengan melakukan penskalaan ulang, diperoleh sistem utama pada penelitian ini adalah:

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta x(1-x) - (c+d+\alpha_1)x + \alpha_2 \eta y + \omega \alpha_2 \eta y(1-y) \\ \dot{y} = \beta y(1-y) - (c+d+\alpha_2)y + \frac{\alpha_1}{\eta} x + \omega \frac{\alpha_1}{\eta} x(1-x) \end{cases} \quad (2)$$

Titik ekuilibrium dari sistem (2) adalah titik ekuilibrium bebas penyakit $(0,0)$ dan titik ekuilibrium non-trivial (x^*, y^*) yang memenuhi persamaan kubik dengan koefisien bergantung pada parameter yang ada. Karena baik x^* maupun y^* memenuhi persamaan kubik maka sangat mungkin terjadi bifurkasi cusp dimana dengan divariasikan dua buah parameter, banyaknya titik ekuilibrium adalah satu, dua atau tiga buah. Variasi parameter α_1, α_2 menjadi pilihan penelitian ini untuk menganalisa dampak dari perpindahan antar wilayah untuk dinamika dari sistem (2). Dengan demikian ruas kanan persamaan pertama sistem (2) dapat dituliskan sebagai $f_1(x, y, \alpha_1, \alpha_2)$ dan ruas kanan persamaan pertama sistem (2) dapat dituliskan sebagai $f_2(x, y, \alpha_1, \alpha_2)$.

2.1. Bifurkasi Fold dan Cusp

Mengikuti prosedur pada [16], titik ekuilibrium dari (2) adalah solusi dari

$$\begin{aligned} f_1(x, y, \alpha_1, \alpha_2) &= 0 \\ f_2(x, y, \alpha_1, \alpha_2) &= 0 \end{aligned}$$

karena $\frac{df_1}{d\alpha_1} \neq 0$, dengan menggunakan teorema fungsi implisit, terdapat sebuah fungsi $G(x, y, \alpha_2)$ sedemikian sehingga $\alpha_1 = G(x, y, \alpha_2)$ atau

$$f_1(x, y, G(x, y, \alpha_2), \alpha_2) = 0.$$

Fungsi objektif yang digunakan adalah

$$G(x, y, \alpha_2) = -\frac{1}{x} (\beta x^2 + (c+d-\beta)x + \omega \alpha_2 \eta y^2 + (-\eta \alpha_2 \omega - \alpha_2)y) \quad (3)$$

dengan kendala $F(x, y, \alpha_2) = 0$ dimana

$$\begin{aligned} F(x, y, \alpha_2) &= f_2(x, y, G(x, y, \alpha_2), \alpha_2) \\ &= -\frac{1 + \omega(1-x)}{\eta} (\beta x^2 + (c+d-\beta)x + \omega \alpha_2 \eta y^2 + (-\eta \alpha_2 \omega - \alpha_2)y) \\ &\quad - (c+d+\alpha_2)y + \beta y(1-y). \end{aligned}$$

Masalah optimisasi berkendala tersebut dapat diselesaikan untuk memperoleh titik bifurkasi *fold*.

Karena parameter bifurkasi telah ditetapkan α_1, α_2 maka parameter lainnya harus ditentukan. Untuk nilai parameter $c = 0.35$ sesuai info terbaru dari WHO [5] bahwa laju kematian akibat MERS-CoV adalah 35%, sedangkan parameter lainnya disesuaikan agar diperoleh minimal satu ekuilibrium non-trivial non-negatif, yaitu

$$d = 0.35, \beta = 0.8, \eta = 1, \omega = 0.8.$$

Dengan menggunakan metode Pengali Lagrange, diperoleh keluarga solusi yang memenuhi:

$$H(x, \alpha_2) := A_5(\alpha_2)x^5 + A_4(\alpha_2)x^4 + A_3(\alpha_2)x^3 + A_2(\alpha_2)x^2 + A_1(\alpha_2)x + A_0(\alpha_2) = 0 \quad (4)$$

dengan

$$A_5(\alpha_2) = 1638400\alpha_2^5 + 5570560\alpha_2^4 + 4734976\alpha_2^3 + 4734976\alpha_2^2 + 5570560\alpha_2 + 1638400$$

$$A_4(\alpha_2) = -4300800\alpha_2^5 - 23060480\alpha_2^4 - 27183104\alpha_2^3 - 11941888\alpha_2^2 - 13230080\alpha_2 - 3891200$$

$$A_3(\alpha_2) = 1900800\alpha_2^5 + 36122880\alpha_2^4 + 57487680\alpha_2^3 + 8485632\alpha_2^2 + 1777920\alpha_2 + 460800$$

$$A_2(\alpha_2) = -5932800\alpha_2^6 - 11033280\alpha_2^5 - 28941504\alpha_2^4 - 54286640\alpha_2^3 - 20293680\alpha_2^2 - 662400\alpha_2 + 8000$$

$$A_1(\alpha_2) = 13843200\alpha_2^6 + 23665920\alpha_2^5 + 3253536\alpha_2^4 + 6880344\alpha_2^3 + 3016740\alpha_2^2 + 122400\alpha_2$$

$$A_0(\alpha_2) = -10382400\alpha_2^6 - 23420240\alpha_2^5 - 9860152\alpha_2^4 - 111846\alpha_2^3 - 41845\alpha_2^2 + 2125\alpha_2$$

dan

$$y_i = \frac{0.0625}{(4x_i - 9)\alpha_2 - 5} \left((72x_i - 112)\alpha_2 - 5 + \left((5184x_i^2 - 16128x_i + 12544)\alpha_2^2 + (-4096x_i^4 + 18944x_i^3 - 23040x_i^2 + 1872x_i + 1120)\alpha_2 + 5120x_i^3 - 12160x_i^2 + 1440x_i + 25 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (5)$$

dengan x_i adalah solusi dari Persamaan (4). Ekspresi untuk pengali Lagrange terlalu rumit sehingga tidak ditampilkan disini. Sampai langkah ini, telah diperoleh $(x_k(\alpha_2), y_k(\alpha_2)), k = 1, \dots, 5$ sebagai solusi dari Persamaan (4) dan Persamaan (5). Selanjutnya dari Persamaan (3) dapat didefinisikan

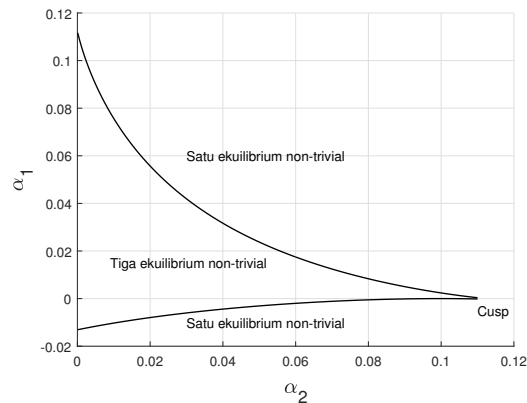
$$\alpha_{1k} = G(x_k(\alpha_2), y_k(\alpha_2), \alpha_2), k = 1, \dots, 5$$

Dengan menggunakan metode Newton, dapat dihitung titik-titik bifurkasi dan diperoleh diagram bifurkasi di bidang parameter parameter (α_1, α_2) pada Gambar 1. Dua kurva *fold* (kurva solid) berpotongan secara non-transversal pada titik bifurkasi cusp dengan koordinat $(\alpha_2, \alpha_1) = (0.1161041385, -0.0004990863013)$. Dari diagram ini, dapat diketahui domain untuk parameter α_1 dan α_2 yaitu: tiga titik ekuilibrium non-trivial berada pada daerah antara kedua bifurkasi *fold*, dua titik ekuilibrium non-trivial pada kedua kurva bifurkasi *fold*, dan daerah lainnya satu titik ekuilibrium non-trivial. Sebagai ilustrasi, dapat dilihat pada Gambar 4 sampai Gambar 6 di Sub-bab 3.

2.2. Bifurkasi Transkritikal

Bifurkasi transkritikal terjadi saat $x^* = 0$ dan $y^* = 0$ dan titik ekuilibrium bebas penyakit dengan titik ekuilibrium non-trivial bertukar jenis kestabilan. Persamaan parameter agar kondisi tersebut terjadi adalah:

$$-\beta^2 - (c + d)^2 - (c + d)(\alpha_1 + \alpha_2) + 2\beta(c + d) + \alpha_1\alpha_2\omega(\omega + 2) + \beta(\alpha_1 + \alpha_2) = 0 \quad (6)$$

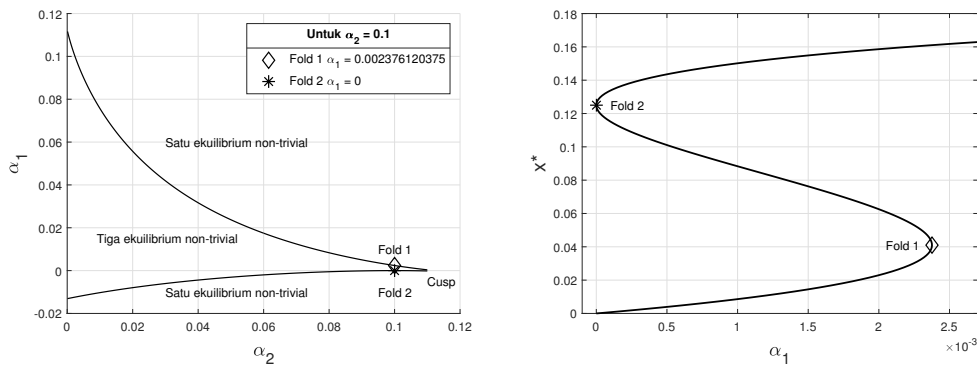


Gambar 1. Diagram bifurkasi dua parameter dari titik ekuilibrium non-trivial.

Sebagai ilustrasi, dapat dilihat pada Gambar 7 di Sub-bab 3.

3. Hasil Numerik dan Pembahasan

Pada sub-bab ini diperlihatkan dinamika yang terjadi akibat dari keberadaan titik bifurkasi *fold* dan titik bifurkasi transkritikal. Dari Gambar 1, untuk $\alpha_2 = 0.1$, bifurkasi *fold* terjadi saat $\alpha_1 = 0$ (*Fold 2*) dan $\alpha_1 = 0.002376120375$ (*Fold 1*), lihat Gambar 2.

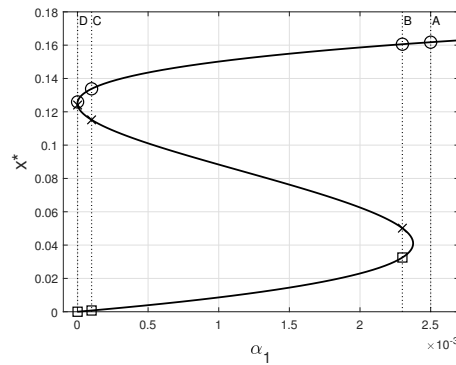


Gambar 2. (Kiri) Diagram bifurkasi dua parameter dari titik ekuilibrium non-trivial dengan detail bifurkasi *fold* yang terjadi untuk $\alpha_2 = 0.1$. (Kanan) Cabang dari kontinuitas titik ekuilibrium non-trivial yang mengalami bifurkasi *fold* saat $\alpha_2 = 0.1$.

Sebagai ilustrasi, akan diperlihatkan beberapa sampel simulasi numerik untuk $\alpha_2 = 0.1$ dan variasi parameter α_1 yang memperlihatkan dinamika yang berbeda, lihat Gambar 3. Untuk Gambar 4 sampai 7, orbit dengan nilai awal non negatif diwakili oleh kurva-kurva solid sedangkan untuk nilai awal y negatif diwakili oleh kurva-kurva putus-putus atau titik-titik. Walaupun tidak memiliki arti secara biologi tetapi fokus utama penelitian ini adalah dinamika akibat bifurkasi yang terjadi.

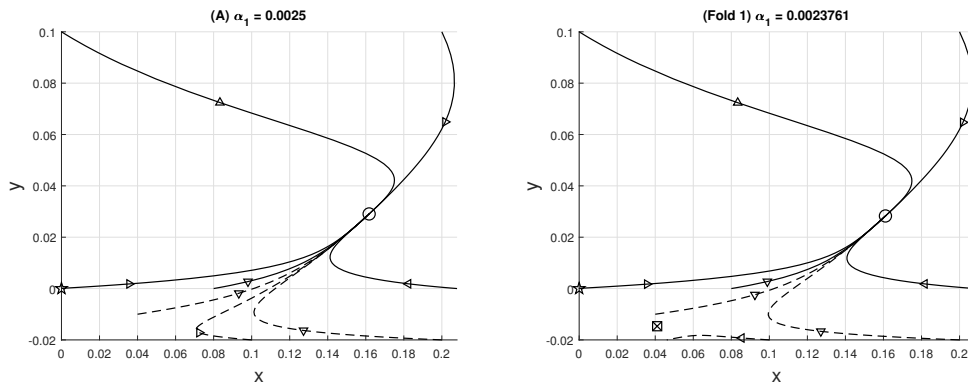
Dimulai dari sampel A pada Gambar 4 (Kiri), ketika $\alpha_1 = 0.0025, \alpha_2 = 0.1$, terdapat titik ekuilibrium bebas penyakit yang merupakan titik sadel (simbol bintang) dan satu titik ekuilibrium non-trivial positif yang stabil (simbol lingkaran). Titik ekuilibrium bebas penyakit tetap bertipe sadel untuk sampel A, B, C, D sehingga tidak stabil. Saat $\alpha_1 = 0.002376120375$ terjadi bifurkasi *fold* sehingga muncul titik ekuilibrium non-trivial yang

Bifurkasi Pada Model Penyebaran Penyakit MERS-CoV di Dua Wilayah...



Gambar 3. Pemilihan nilai parameter α_1 untuk sampel A, B, C, D.

baru (simbol kotak silang), lihat Gambar 4 (Kanan).

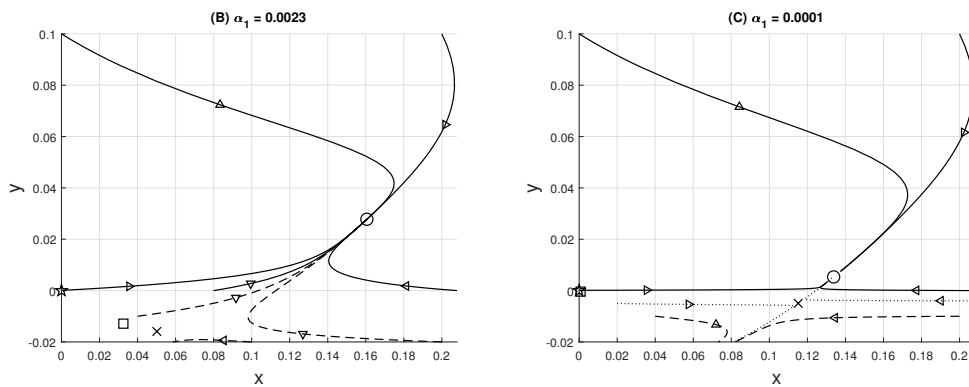


Gambar 4. (Kiri) Sampel A: Beberapa orbit ketika $\alpha_1 = 0.0025, \alpha_2 = 0.1$. (Kanan) *fold 1* : Beberapa orbit ketika $\alpha_1 = 0.002376120375, \alpha_2 = 0.1$.

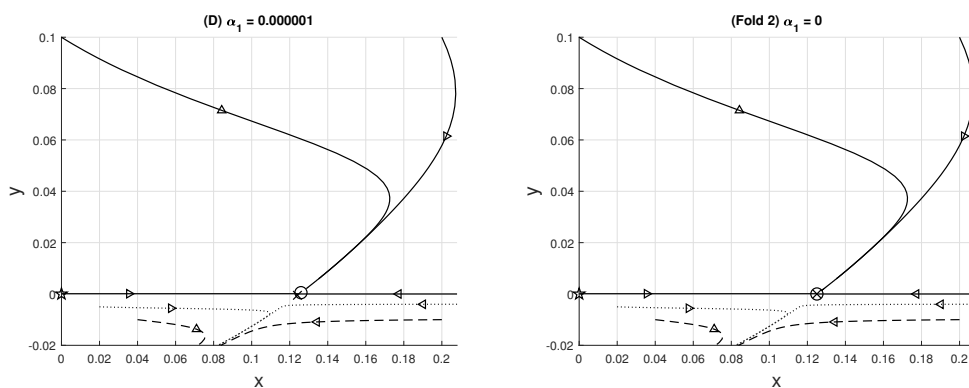
Setelahnya, pada sampel B Gambar 5 (Kiri), dapat dilihat dua titik ekuilibrium non-trivial yang baru (simbol kotak dan simbol silang), keduanya merupakan titik sadel. Kedua titik ini saling menjauh seiring dengan berkurangnya nilai parameter α_1 , titik ekuilibrium non-trivial (simbol kotak) semakin dekat dengan titik ekuilibrium bebas penyakit (simbol bintang) sedangkan titik ekuilibrium non-trivial lainnya (simbol silang) semakin dekat dengan titik ekuilibrium non-trivial positif (simbol lingkaran), lihat Gambar 5 (Kanan).

Sampel D pada Gambar 6 (Kiri), titik ekuilibrium non-trivial (simbol kotak) berurusan dengan titik ekuilibrium bebas penyakit (simbol bintang) tetapi tidak terjadi pertukaran kestabilan di antaranya sehingga hal ini bukan merupakan titik bifurkasi transkritikal. Kemudian titik ekuilibrium non-trivial lainnya (simbol silang) berurusan dengan titik ekuilibrium non-trivial positif (simbol lingkaran) di koordinat $(0, 0.125)$ karena mengalami bifurkasi *fold* pada Gambar 6 (Kanan).

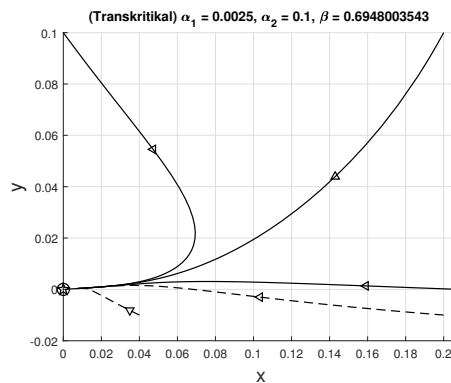
Selanjutnya pada Gambar 7, titik ekuilibrium bebas penyakit (simbol bintang) berurusan dengan titik ekuilibrium non-trivial positif (simbol lingkaran) akibat terjadi bifurkasi transkritikal saat $\alpha_1 = 0.0025, \alpha_2 = 0.1, \beta = 0.6948003543$ (memenuhi persamaan (6)). Setelah mengalami bifurkasi, titik ekuilibrium non-trivial (simbol lingkaran) menjadi tak stabil dan titik ekuilibrium bebas penyakit (simbol bintang) yang semula tak stabil menjadi stabil.



Gambar 5. (Kiri) Sampel B: Beberapa orbit ketika $\alpha_1 = 0.0023, \alpha_2 = 0.1$. (Kanan) Sampel C : Beberapa orbit ketika $\alpha_1 = 0.0001, \alpha_2 = 0.1$.



Gambar 6. (Kiri) Sampel D: Beberapa orbit ketika $\alpha_1 = 0.000001, \alpha_2 = 0.1$. (Kanan) *fold 2* : Beberapa orbit ketika $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0.1$.



Gambar 7. Beberapa orbit ketika terjadi bifurkasi transkritikal.

Interpretasi biologi dari hasil numerik dapat dipandang sebagai berikut. Untuk laju perpindahan individu dari wilayah y menuju wilayah x selalu konstan yaitu $\alpha_2 = 0.1$, dan untuk laju perpindahan individu dari wilayah x menuju wilayah y yaitu α_1 positif maka keadaan endemik akan selalu terjadi. Hal ini terkonfirmasi keberadaan titik ekuilibrium non-trivial positif yang selalu stabil. Dengan berkurangnya α_1 , maka proposi populasi terinfeksi di kedua wilayah pun semakin berkurang. Hal ini mengindikasikan bahwa laju perpindahan antar wilayah memegang peranan penting pada penyebaran penyakit MERS-CoV. Keadaan bebas penyakit baru akan tercapai

ketika parameter β yaitu laju transmisi di wilayah yang sama berkurang. Ketika bifurkasi transkritikal terjadi maka titik ekuilibrium non-trivial akan bertemu dengan titik bebas penyakit dan bertukar kestabilan. Pada simulasi Gambar 7, keadaan bebas penyakit akan terjadi untuk $\beta < 0.6948003543$ atau $\alpha_1 < 0.0025$ untuk $\alpha_2 = 0.1$.

4. Kesimpulan

Fokus utama dari penelitian ini adalah bifurkasi yang terjadi pada model penyebaran penyakit MERS-CoV di dua wilayah dengan populasi konstan. Walaupun dengan asumsi populasi di masing-masing wilayah konstan, tetapi dinamika yang terjadi sangat beragam, mulai dari bifurkasi kodimensi satu yaitu bifurkasi *fold* dan bifurkasi transkritikal hingga bifurkasi kodimensi dua yaitu bifurkasi cusp. Untuk kondisi terjadi tiga titik ekuilibrium non-trivial, dua di antaranya tidak berada di kuadran I sehingga tidak mempunyai arti biologis, namun memperkaya dinamika yang terjadi di sekitarnya. Pemilihan parameter awal yang tepat, diharapkan dapat menghasilkan titik ekuilibrium non-trivial yang positif.

Dengan kata lain, sangat memungkinkan terjadi bifurkasi serupa pada penelitian-penelitian terkait model penyebaran penyakit virus corona maupun model penyebaran penyakit akibat intensnya mobilisasi antar dua wilayah, sebagai contoh antara Indonesia dan Arab Saudi akibat adanya perjalanan ibadah haji dan umrah.

Ucapan Terimakasih

Ucapan terima kasih penulis persembahkan kepada rekan peneliti, Bapak Benny Yong, Ph.D. yang telah mendukung keberlanjutan penelitian sebelumnya dan kepada Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat Universitas Katolik Parahyangan (LPPM UNPAR).

Referensi

- [1] J. S. Sabir, T. T.-Y. Lam, M. M. Ahmed, L. Li, Y. Shen, S. EM Abo-Aba, M. I. Qureshi, M. Abu-Zeid, Y. Zhang, M. A. Khiyami *et al.*, "Co-circulation of three camel coronavirus species and recombination of mers-covs in saudi arabia," *Science*, vol. 351, no. 6268, pp. 81–84, 2016, doi: <http://dx.doi.org/10.1126/science.aac860>.
- [2] C. B. Reusken, B. L. Haagmans, M. A. Müller, C. Gutierrez, G.-J. Godeke, B. Meyer, D. Muth, V. S. Raj, L. Smits-De Vries, V. M. Corman *et al.*, "Middle east respiratory syndrome coronavirus neutralising serum antibodies in dromedary camels: a comparative serological study," *The Lancet infectious diseases*, vol. 13, no. 10, pp. 859–866, 2013, doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S1473-3099\(13\)70164-6](http://dx.doi.org/10.1016/S1473-3099(13)70164-6).
- [3] B. Fatima, G. Zaman, and F. Jarad, "Transmission dynamic and backward bifurcation of middle eastern respiratory syndrome coronavirus," *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, vol. 27, no. 1, pp. 54–69, 2022, doi: 10.15388/namc.2022.27.25256.
- [4] I. Ghosh, S. S. Nadim, and J. Chattopadhyay, "Zoonotic mers-cov transmission: modeling, backward bifurcation and optimal control analysis," *Nonlinear dynamics*, vol. 103, no. 3, pp. 2973–2992, 2021, doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s11071-021-06266-w>.
- [5] WHO, "Middle East respiratory syndrome coronavirus (MERS-CoV)," 2019, url: <https://www.who.int/health-topics/middle-east-respiratory-syndrome-coronavirus-mers#tab=tab.1>.
- [6] A. Oname, M. Abbas, and C. P. Onyenegecha, "Backward bifurcation and optimal control in a co-infection model for sars-cov-2 and zikv," *Results in Physics*, p. 105481, 2022, doi: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2022.105481>.
- [7] S. S. Musa, I. A. Baba, A. Yusuf, T. A. Sulaiman, A. I. Aliyu, S. Zhao, and D. He, "Transmission

- dynamics of sars-cov-2: A modeling analysis with high-and-moderate risk populations," *Results in physics*, vol. 26, p. 104290, 2021, doi: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2021.104290>.
- [8] B. Yong and L. Owen, "Dynamical transmission model of mers-cov in two areas," in *AIP Conference Proceedings*, vol. 1716, no. 1. AIP Publishing LLC, 2016, p. 020010, doi: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4942993>.
- [9] F. Bertacchini, P. S. Pantano, and E. Bilotta, "Sars-cov-2 emerging complexity and global dynamics," *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 31, no. 12, p. 123110, 2021, doi: <http://dx.doi.org/10.1063/5.0062749>.
- [10] M. Ayana, T. Hailegiorgis, and K. Getnet, "The impact of infective immigrants and self isolation on the dynamics and spread of covid-19 pandemic: A mathematical modeling study," *Pure and Applied Mathematics Journal*, vol. 9, no. 6, pp. 109–117, 2020, doi: <http://dx.doi.org/10.11648/j.pamj.20200906.12>.
- [11] F. A. Rihan and V. Gandhi, "Dynamics and sensitivity of fractional-order delay differential model for coronavirus (covid-19) infection," *Dynamics*, vol. 1, pp. 1–2021, 2021, doi: <http://dx.doi.org/10.18576/pfda/070105>.
- [12] E. Unlu, H. Léger, O. Motornyi, A. Rukubayihunga, T. Ishacian, and M. Chouiten, "Epidemic analysis of covid-19 outbreak and counter-measures in france," 2020, doi: <http://dx.doi.org/10.1101/2020.04.27.20079962>.
- [13] P. Kumar, N. A. Rangaig, H. Abboubakar, A. Kumar, and A. Manickam, "Prediction studies of the epidemic peak of coronavirus disease in japan: From caputo derivatives to atangana–baleanu derivatives," *International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing*, vol. 13, no. 01, p. 2250012, 2022, doi: <https://doi.org/10.1142/S179396232250012X>.
- [14] A. Sasmal and C. Ray, "A genome based detection and classification of coronavirus infection," *International Journal Of Engineering And Computer Science*, vol. 9, no. 08, 2020, doi: <https://doi.org/10.18535/ijecs/v9i08.4522>.
- [15] H. Abboubakar, A. K. Guidzavaï, J. Yangla, I. Damakoa, and R. Mouangue, "Mathematical modeling and projections of a vector-borne disease with optimal control strategies: A case study of the chikungunya in chad," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 150, p. 111197, 2021, doi: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111197>.
- [16] L. Owen and J. M. Tuwankotta, "Computation of fold and cusp bifurcation points in a system of ordinary differential equations using the lagrange multiplier method," *International Journal of Dynamics and Control*, vol. 10, no. 2, pp. 363–376, 2022, doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s40435-021-00821-4>.



This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/). Editorial of JJoM: Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo, Jln. Prof. Dr. Ing. B.J. Habibie, Moutong, Tilongkabila, Kabupaten Bone Bolango, Provinsi Gorontalo 96119, Indonesia.