

# Invers Moore-Penrose pada Matriks Turiyam Simbolik Real

Ani<sup>1,\*</sup>, Mashadi<sup>1</sup>, Sri Gemawati<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Riau, Pekanbaru 28293, Indonesia

\*Corresponding author. Email: [ani832132@gmail.com](mailto:ani832132@gmail.com)

## ABSTRAK

Matriks Turiyam simbolik adalah matriks yang entri-entrinya berisi Turiyam simbolik. Invers matriks pada umumnya bisa ditentukan jika matriks tersebut merupakan matriks bujur sangkar yang *non-singular*. Saat ini invers dari matriks Turiyam simbolik yang berukuran  $m \times n$  dengan  $m \neq n$  dapat ditentukan dengan invers Moore-Penrose. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan algoritma invers Moore-Penrose pada matriks Turiyam simbolik real yang berukuran  $m \times n$  dengan  $m \neq n$ . Operasi aljabar pada Turiyam simbolik adalah metode yang digunakan untuk memperoleh invers Moore-Penrose pada matriks Turiyam simbolik real yaitu dengan menerapkan operasi aljabar Turiyam simbolik pada konsep invers Moore-Penrose. Hasil utama yang diperoleh adalah algoritma invers Moore-Penrose pada matriks Turiyam simbolik real. Pada contoh demonstrasi yang diberikan menunjukkan bahwa invers Moore-Penrose pada matriks Turiyam simbolik real selalu ada walaupun matriksnya bukan matriks bujur sangkar.

## Kata Kunci:

Invers Moore-Penrose; Matriks Turiyam Simbolik

## ABSTRACT

The symbolic Turiyam matrix is a matrix whose entries contain symbolic Turiyam. Inverse matrices can generally be determined if the matrix is a non-singular square matrix. Currently the inverse of the symbolic Turiyam matrix of size  $m \times n$  with  $m \neq n$  can be determined by the Moore-Penrose inverse. The purpose of this research is to determine the inverse Moore-Penrose algorithm on a real symbolic Turiyam matrix of size  $m \times n$  with  $m \neq n$ . Algebraic operations on symbolic Turiyam is a method used to obtain the Moore-Penrose inverse on real symbolic Turiyam matrices by applying symbolic Turiyam algebraic operations on the concept of Moore-Penrose inverses. The main result obtained is the inverse Moore-Penrose algorithm on the real symbolic Turiyam matrix. The demonstration example given shows that the Moore-Penrose inverse on a real symbolic Turiyam matrix always exists even though the matrix is not a square matrix.

## Keywords:

Inverse Moore-Penrose; Turiyam Matrix Symbolic

## Format Sitasi:

A. Ani, M. Mashadi, and S. Gemawati, "Invers Moore-Penrose pada Matriks Turiyam Simbolik Real", *Jambura J. Math.*, vol. 5, No. 1, pp. 95–114, 2023, doi: <https://doi.org/10.34312/jjom.v5i1.16304>

## 1. Pendahuluan

Matriks dan operasinya merupakan hal yang berkaitan erat dengan bidang aljabar linear. Matriks didefinisikan sebagai susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan yang disebut entri dalam matriks [1, 2]. Invers matriks pada umumnya, jika  $A$  matriks bujur sangkar dan terdapat matriks  $B$  dengan ukuran yang sama, sedemikian sehingga  $AB = BA = I$ , maka  $A$  disebut invertible (dapat dibalik) dan  $B$  disebut invers dari matriks  $A$ . Seperti yang diketahui bahwa invers matriks bisa ditemukan jika matriks tersebut merupakan matriks bujur sangkar dan *non-singular*. Suatu matriks yang berukuran  $m \times n$  dengan  $m \neq n$  dan matriks *singular* sudah pasti tidak memiliki invers, Namun ditemukan adanya invers untuk suatu matriks yang berukuran  $m \times n$  dengan  $m \neq n$  dan matriks *singular* yang disebut dengan invers Moore-Penrose [3]. Invers Moore-Penrose merupakan perluasan dari konsep invers matriks dan biasanya dinotasikan dengan  $A^+$ . Invers Moore-Penrose ada untuk setiap matriks baik matriks bujur sangkar yang singular maupun matriks yang tidak bujur sangkar [4]. Jika  $A \in M_{n \times m}$  maka terdapat dengan tunggal  $A^+ \in M_{m \times n}$ . Invers Moore-Penrose merupakan invers dari suatu matriks jika memenuhi keempat persamaan Penrose [3, 5–7]. Salah satu kriterianya adalah ketika  $AA^+ = (AA^+)^*$  atau yang disebut dengan matriks Hermitian.

Matriks Hermitian disebut sebagai matriks persegi kompleks yang sama dengan transpos konjugasinya sendiri [8]. Suatu matriks bujur sangkar  $A$  yang entri-entrinya bilangan kompleks disebut matriks Hermitian apabila  $A = A^*$ . Dan jika  $A$  adalah matriks real maka konjugat transpos  $A$  sama dengan transpos dari  $A$ , dengan demikian suatu matriks bujur sangkar  $A$  yang entri-entrinya bilangan real disebut matriks Hermitian apabila  $A = A^T$ . Artikel ini bertujuan untuk memperoleh algoritma invers Moore-Penrose pada matriks Turiyam simbolik real yang berukuran  $m \times n$  dengan  $m \neq n$ .

Matriks turiyam bermula dari himpunan Turiyam, yang merupakan suatu data yang tidak terdefinisi secara pasti. Pada tahap awal himpunan Turiyam digunakan untuk membuat graf dari kondisi yang tidak pasti, kemudian juga untuk data yang tidak pasti dalam bentuk interval [9, 10]. Didalam matematika konsep Turiyam yang telah diteliti beberapa penulis, yaitu dalam bentuk vektor, ring dan group [11, 12]. Dari kondisi di atas, berkembang himpunan Turiyam ke matriks turiyam dengan tetap mempertahankan dalam bentuk simbolik.

Pengembangan konsep dan penerapan matriks turiyam simbolik ini baru dibahas oleh beberapa peneliti, dalam ilmu matematika konsep Turiyam yang telah dibahas yaitu, terkait pengantar Turiyam simbolik grup dan substruktur  $AH$  [13], pengantar konsep matriks Turiyam simbolik [14], pengantar ruang vektor dan bilangan kompleks Turiyam simbolik [15], representasi data dimensi keempat dan analisisnya menggunakan konteks Turiyam [9], pengantar Turiyam simbolik  $R$ -modulo dan modulo bilangan bulat Turiyam simbolik [14], Turiyam simbolik ring [10], Turiyam simbolik grup [13], representasi data dimensi keempat himpunan Turiyam [6], dan data dengan himpunan Turiyam untuk pengolahan informasi kuantum dimensi keempat [16]. Begitu juga penelitian mengenai invers Moore-Penrose telah dilakukan oleh beberapa peneliti yaitu, invers Moore-Penrose pada *free matrix* [4], invers Moore-Penrose sebagai invers matriks [17], invers Moore-Penrose pada matriks kompleks, invers Moore-Penrose pada matriks atas aljabar Max-Plus tersimetri [12], dan perhitungan cepat matriks invers Moore-Penrose [18]. Terlihat bahwa belum ada peneliti yang membahas tentang invers

dari suatu matriks Turiyam. Suatu jenis matriks akan sangat cepat berkembang penggunaannya jika matriks tersebut terjamin mempunyai invers. Dalam kenyataan matriks Turiyam, kebanyakan bukan merupakan matriks bujur sangkar, sehingga tidak mempunyai invers. Maka salah satu alternatif yang dapat ditempuh adalah menggunakan invers Moore-Penrose dari matriks Turiyam simbolik real yang berukuran  $m \times n$  dengan  $m \neq n$ . Dengan dapat ditentukannya invers dari matriks Turiyam simbolik real ini, diharapkan dapat bermanfaat untuk penerapannya dalam berbagai bidang yang direpresentasikan dalam bentuk matriks turiyam, misalnya masalah regresi ketidakpastian data, masalah mekanika quantum, berbagai masalah fuzzy dan lain sebagainya.

## 2. Metode

Penelitian ini dilakukan dalam bentuk studi literatur tentang konsep-konsep dasar yang berkaitan dengan matriks Turiyam simbolik dan invers Moore-Penrose dari berbagai sumber literatur seperti jurnal ilmiah, prosiding maupun dari sumber buku-buku teks. Berikut beberapa konsep dasar yang berkaitan dengan topik yang dibahas pada penelitian ini.

### 2.1. Matriks Turiyam Simbolik

Dalam matriks Turiyam simbolik terdapat operasi penjumlahan dan perkalian yang eksistensinya penting dalam artikel ini, namun sebelumnya telah didefinisikan dalam [4, 14] bentuk umum dari matriks Turiyam adalah sebagai berikut:

**Definisi 1.** Didefinisikan Turiyam simbolik dengan :

$$T_u = [T, F, I, Y] \tag{1}$$

$T$  :Benar,  $F$  :Salah,  $I$  :Ketidakpastian,  $Y$  :Kesadaran.

$T_u$  ditulis juga dengan  $T_u = [x_0 + x_1T + x_2F + x_3I + x_4Y]$  dengan  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$  adalah bilangan real ataupun bilangan kompleks [1].

**Contoh 1.** Didefinisikan Turiyam simbolik  $T_u = [3 + 4T + 4F + I - 2Y]$ .

**Definisi 2.** Didefinisikan matriks Turiyam simbolik dengan :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \text{ adalah bilangan turiyam simbolik.}$$

Jika  $a_{ij}$  adalah bilangan real turiyam simbolik, maka  $A$  dikatakan matriks turiyam simbolik real. Jika  $a_{ij}$  adalah bilangan kompleks turiyam simbolik, maka  $A$  dikatakan matriks turiyam simbolik kompleks.

**Contoh 2.** Didefinisikan matriks Turiyam simbolik real yang berukuran  $3 \times 2$ ,

$$T_u = \begin{bmatrix} T + 2Y & Y \\ F & 2 \\ T & 0 \end{bmatrix}.$$

### 2.1.1. Rank Matriks pada Matriks Turiyam Simbolik

**Definisi 3.** Untuk sebarang matriks Turiyam simbolik  $T_u$ , didefinisikan *rank* dari matriks  $T_u$  yang dinotasikan dengan  $rk(T_u)$  sebagai jumlah baris tak nol dari bentuk eselon baris tereduksi matriks  $T_u$ .

### 2.1.2. Transpos Matriks pada Matriks Turiyam Simbolik

**Definisi 4.** Jika  $T_u$  adalah sebarang matriks Turiyam simbolik  $m \times n$ , maka transpos  $T_u$  dilambangkan dengan  $T_u^T$  yang didefinisikan sebagai matriks  $n \times m$  yang dihasilkan dengan menukar baris-baris dan kolom-kolom pada matriks  $T_u$ .

### 2.1.3. Operasi Aljabar pada Turiyam Simbolik

Operasi aljabar antar simbol di Turiyam simbolik didefinisikan dalam [9], sebagai berikut:

$$\begin{array}{lll} T \times T = T^2 = T & F \times F = F^2 = F & I \times I = I^2 = I \\ Y \times Y = Y^2 = Y & T \times Y = Y \times T = Y & T \times F = F \times T = F \\ F \times Y = Y \times F = Y & T \times I = I \times T = I & Y \times I = I \times Y = I \\ F \times I = I \times F = I & & \end{array}$$

Misalkan  $x = \{x_0 + x_1T + x_2F + x_3I + x_4Y\}$  dan  $y = \{y_0 + y_1T + y_2F + y_3I + y_4Y\}$  adalah dua elemen sembarang di Turiyam simbolik, maka penjumlahan dan perkalian antara dua elemen Turiyam simbolik dapat didefinisikan sebagai berikut [9]:

#### Penjumlahan

$$x + y = (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1)T + (x_2 + y_2)F + (x_3 + y_3)I + (x_4 + y_4)Y.$$

#### Perkalian

$$\begin{aligned} x.y &= x_0.y_0 + T(x_0.y_1 + x_1.y_0 + x_1.y_1) + F(x_0.y_2 + x_1.y_2 + x_2.y_0 + x_2.y_2 + x_2.y_1) \\ &+ I(x_0.y_3 + x_1.y_3 + x_2.y_3 + x_3.y_3 + x_3.y_1 + x_3.y_2 + x_3.y_3 + x_3.y_4 + x_4.y_3) \\ &+ Y(x_0.y_4 + x_1.y_4 + x_2.y_4 + x_3.y_4 + x_4.y_1 + x_4.y_2 + x_4.y_4). \end{aligned}$$

## 2.2. Invers Moore-Penrose

Pada bagian ini diberikan definisi dan teorema tentang invers Moore-Penrose. Invers Moore Penrose yang didefinisikan dalam [3, 5, 7, 18] adalah sebagai berikut:

**Definisi 5.** Jika  $A \in \mathbb{M}_{n \times m}$ , maka terdapat dengan tunggal  $A^+ \in \mathbb{M}_{m \times n}$  yang memenuhi ke-4 kondisi Penrose:

1.  $AA^+A = A$ .
2.  $A^+AA^+ = A^+$ .
3.  $A^+A = (A^+A)^*$  (Hermitian).
4.  $AA^+ = (AA^+)^*$  (Hermitian).

Dengan  $A^*$  merupakan konjugat transpos dari matriks  $A$ .

Jika terdapat matriks  $A$  yang non singular maka invers dari  $A$  merupakan Invers Moore-

Penrose, dengan kata lain invers matriks sama dengan Invers Moore-Penrose [16].

**Definisi 6.** Untuk semua matriks  $A \in \mathbb{M}_{n \times m}$ , pasti terdapat  $A^+ \in \mathbb{M}_{m \times n}$  yang memenuhi keempat kondisi Penrose [3, 5].

### 3. Hasil dan Pembahasan

#### 3.1. Invers Moore-Penrose pada Matriks Turiyam Simbolik Real

Jika  $T_u$  adalah sebuah matriks Turiyam simbolik, maka invers Moore-Penrose dari  $T_u$  memiliki beberapa sifat, salah satunya sifat tunggal yang dinyatakan dalam definisi dan teorema sebagai berikut.

**Definisi 7.** Jika  $T_u \in \mathbb{M}_{n \times m}$  merupakan matriks Turiyam simbolik, maka terdapat tepat satu  $T_u^+ \in \mathbb{M}_{m \times n}$  yang memenuhi ke-4 kondisi Penrose:

1.  $T_u T_u^+ T_u = T_u$ .
2.  $T_u^+ T_u T_u^+ = T_u^+$ .
3.  $T_u^+ T_u = (T_u^+ T_u)^*$  (Hermitian).
4.  $T_u T_u^+ = (T_u T_u^+)^*$  (Hermitian).

Dengan  $T_u^*$  merupakan konjugat transpos dari matriks  $T_u$ .

**Definisi 8.** Untuk semua matriks Turiyam simbolik  $T_u \in \mathbb{M}_{n \times m}$ , pasti terdapat  $T_u^+ \in \mathbb{M}_{m \times n}$  yang memenuhi keempat kondisi Penrose.

**Teorema 1.** Untuk matriks Turiyam simbolik  $T_u \in \mathbb{M}_{n \times m}$ , terdapat dengan tunggal matriks Turiyam simbolik  $T_u^+ \in \mathbb{M}_{m \times n}$ .

**Bukti.** Misalkan matriks Turiyam simbolik  $T_u \in \mathbb{M}_{n \times m}$ , terdapat  $T_u^+$  dan  $S_u^+$  yang merupakan invers Moore-Penrose dari  $T_u$ . Matriks  $T_u^+$  dan  $S_u^+$  pasti memenuhi keempat kondisi Penrose pada definisi 7. Untuk menunjukkan ketunggalannya, ditunjukkan bahwa  $T_u^+ = S_u^+$ .

$T_u^+$  adalah invers Moore-Penrose,  $T_u^+$  bisa ditulis dalam bentuk  $T_u^+ T_u T_u^+$  sesuai dengan kondisi Penrose 2,

$$T_u^+ = T_u^+ T_u T_u^+$$

$T_u^+$  adalah invers Moore-Penrose,  $T_u T_u^+ = (T_u T_u^+)^*$  pasti berlaku sesuai dengan kondisi Penrose 3,

$$\begin{aligned} T_u^+ &= T_u^+ T_u T_u^+ \\ T_u^+ &= T_u^+ (T_u T_u^+)^* \end{aligned}$$

$S_u^+$  adalah invers Moore-Penrose maka  $T_u$  bisa ditulis dalam bentuk  $T_u = T_u S_u^+ T_u$  sesuai pada kondisi Penrose 1,

$$\begin{aligned} T_u^+ &= T_u^+ T_u T_u^+ \\ T_u^+ &= T_u^+ (T_u T_u^+)^* \\ T_u^+ &= T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+)^* \end{aligned}$$

$T_u^+$  dan  $S_u^+$  adalah invers Moore-Penrose, pasti memenuhi kriteria ke 3 Penrose yaitu, matriks Hermitian,

$$\begin{aligned} T_u^+ &= T_u^+ T_u T_u^+ \\ T_u^+ &= T_u^+ (T_u T_u^+)^* \end{aligned}$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+)^*$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+).$$

Karena berlaku matriks hermitian pada kondisi 3 dan 4, maka pada sifat konjugat transpos, matriks  $T_u^+ = S_u^+$  berlaku sifat komutatif.

$$T_u^+ = T_u^+ T_u T_u^+.$$

$$T_u^+ = T_u^+ (T_u T_u^+)^*.$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+)^*.$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+).$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+).$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u T_u S_u^+) T_u^+).$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u T_u T_u^+) S_u^+).$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u T_u^+ T_u) S_u^+).$$

Karena berlaku matriks hermitian pada kondisi 3 dan 4, maka pada sifat konjugat transpos, matriks  $T_u^+ = S_u^+$  berlaku sifat komutatif.

$$T_u^+ = T_u^+ T_u T_u^+.$$

$$T_u^+ = T_u^+ (T_u T_u^+)^*.$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+)^*.$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+).$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+).$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u T_u S_u^+) T_u^+).$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u T_u T_u^+) S_u^+).$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u T_u^+ T_u) S_u^+).$$

$$T_u^+ = (T_u^+ T_u T_u^+) T_u S_u^+.$$

$T_u^+$  adalah invers Moore-Penrose,  $T_u$  bisa ditulis dalam bentuk  $T_u = T_u^+ T_u T_u^+$  sesuai dengan kondisi Penrose 2.

$$T_u^+ = T_u^+ T_u T_u^+.$$

$$T_u^+ = T_u^+ (T_u T_u^+)^*.$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+)^*.$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+).$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+).$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u T_u S_u^+) T_u^+).$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u T_u T_u^+) S_u^+).$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u T_u^+ T_u) S_u^+).$$

$$T_u^+ = (T_u^+ T_u T_u^+) T_u S_u^+.$$

$$T_u^+ = (T_u^+) T_u S_u^+$$

$T_u^+$  dan  $S_u^+$  adalah invers Moore-Penrose, berlaku kondisi Penrose 3

$$T_u^+ = T_u^+ T_u T_u^+.$$

$$T_u^+ = T_u^+ (T_u T_u^+)^*.$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+)^*.$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+).$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+).$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u T_u S_u^+) T_u^+).$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u T_u T_u^+) S_u^+).$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u T_u^+ T_u) S_u^+).$$

$$T_u^+ = (T_u^+ T_u T_u^+) T_u S_u^+.$$

$$T_u^+ = (T_u^+) T_u S_u^+$$

$$T_u^+ = (T_u^+ T_u)^* S_u^+$$

$S_u^+$  adalah invers Moore-Penrose maka  $T_u$  bisa ditulis dalam bentuk  $T_u = T_u S_u^+ T_u$ .

$$T_u^+ = T_u^+ T_u T_u^+.$$

$$T_u^+ = T_u^+ (T_u T_u^+)^*.$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+)^*.$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+).$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+).$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u T_u S_u^+) T_u^+).$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u T_u T_u^+) S_u^+).$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u T_u^+ T_u) S_u^+).$$

$$T_u^+ = (T_u^+ T_u T_u^+) T_u S_u^+.$$

$$T_u^+ = (T_u^+) T_u S_u^+.$$

$$T_u^+ = (T_u^+ T_u)^* S_u^+.$$

$$T_u^+ = \left( (T_u^+ (T_u S_u^+ T_u)) \right)^* S_u^+.$$

$T_u^+$  dan  $S_u^+$  adalah invers Moore-Penrose, berlaku kondisi Penrose 3,

$$T_u^+ = T_u^+ T_u T_u^+.$$

$$T_u^+ = T_u^+ (T_u T_u^+)^*.$$

$$T_u^+ = T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+)^*.$$

$$\begin{aligned}
 T_u^+ &= T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+). \\
 T_u^+ &= T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+). \\
 T_u^+ &= T_u^+ ((T_u T_u S_u^+) T_u^+). \\
 T_u^+ &= T_u^+ ((T_u T_u T_u^+) S_u^+). \\
 T_u^+ &= T_u^+ ((T_u T_u^+ T_u) S_u^+). \\
 T_u^+ &= (T_u^+ T_u T_u^+) T_u S_u^+. \\
 T_u^+ &= (T_u^+) T_u S_u^+. \\
 T_u^+ &= (T_u^+ T_u)^* S_u^+. \\
 T_u^+ &= \left( (T_u^+ (T_u S_u^+ T_u))^* S_u^+ \right). \\
 T_u^+ &= (T_u^+ T_u S_u^+ T_u) S_u^+.
 \end{aligned}$$

Karena berlaku matriks hermitian pada kondisi Penrose 3 dan 4,

$$\begin{aligned}
 T_u^+ &= T_u^+ T_u T_u^+. \\
 T_u^+ &= T_u^+ (T_u T_u^+)^*. \\
 T_u^+ &= T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+)^*. \\
 T_u^+ &= T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+). \\
 T_u^+ &= T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+). \\
 T_u^+ &= T_u^+ ((T_u T_u S_u^+) T_u^+). \\
 T_u^+ &= T_u^+ ((T_u T_u T_u^+) S_u^+). \\
 T_u^+ &= T_u^+ ((T_u T_u^+ T_u) S_u^+). \\
 T_u^+ &= (T_u^+ T_u T_u^+) T_u S_u^+. \\
 T_u^+ &= (T_u^+) T_u S_u^+. \\
 T_u^+ &= (T_u^+ T_u)^* S_u^+. \\
 T_u^+ &= \left( (T_u^+ (T_u S_u^+ T_u))^* S_u^+ \right). \\
 T_u^+ &= (T_u^+ T_u S_u^+ T_u) S_u^+.
 \end{aligned}$$

$T_u$  adalah invers Moore-Penrose,  $T_u T_u^+ T_u$  bisa ditulis dalam bentuk  $T_u T_u^+ T_u = T_u$  sesuai dengan kondisi Penrose 1,

$$\begin{aligned}
 T_u^+ &= T_u^+ T_u T_u^+. \\
 T_u^+ &= T_u^+ (T_u T_u^+)^*. \\
 T_u^+ &= T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+)^*. \\
 T_u^+ &= T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+). \\
 T_u^+ &= T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+). \\
 T_u^+ &= T_u^+ ((T_u T_u S_u^+) T_u^+).
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 T_u^+ &= T_u^+((T_u T_u T_u^+) S_u^+). \\
 T_u^+ &= T_u^+((T_u T_u^+ T_u) S_u^+). \\
 T_u^+ &= (T_u^+ T_u T_u^+) T_u S_u^+. \\
 T_u^+ &= (T_u^+) T_u S_u^+. \\
 T_u^+ &= (T_u^+ T_u)^* S_u^+. \\
 T_u^+ &= \left( (T_u^+ (T_u S_u^+ T_u)) \right)^* S_u^+. \\
 T_u^+ &= (T_u^+ T_u S_u^+ T_u) S_u^+ \\
 T_u &= S_u^+ T_u S_u^+.
 \end{aligned}$$

$S_u^+$  adalah invers Moore-Penrose maka  $S_u^+ T_u S_u^+$  bisa ditulis dalam bentuk  $S_u^+ T_u S_u^+ = S_u^+$ .

$$\begin{aligned}
 T_u^+ &= T_u^+ T_u T_u^+. \\
 T_u^+ &= T_u^+ (T_u T_u^+)^*. \\
 T_u^+ &= T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+)^*. \\
 T_u^+ &= T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+). \\
 T_u^+ &= T_u^+ ((T_u S_u^+ T_u) T_u^+). \\
 T_u^+ &= T_u^+ ((T_u T_u S_u^+) T_u^+). \\
 T_u^+ &= T_u^+ ((T_u T_u T_u^+) S_u^+). \\
 T_u^+ &= T_u^+ ((T_u T_u^+ T_u) S_u^+). \\
 T_u^+ &= (T_u^+ T_u T_u^+) T_u S_u^+. \\
 T_u^+ &= (T_u^+) T_u S_u^+. \\
 T_u^+ &= (T_u^+ T_u)^* S_u^+. \\
 T_u^+ &= \left( (T_u^+ (T_u S_u^+ T_u)) \right)^* S_u^+. \\
 T_u^+ &= (T_u^+ T_u S_u^+ T_u) S_u^+ \\
 T_u &= S_u^+ T_u S_u^+. \\
 T_u^+ &= S_u^+.
 \end{aligned}$$

Karena terpenuhi  $T_u^+ = S_u^+$ , invers Moore-Penrose dari matriks  $T_u$  terbukti tunggal.  $\square$

Jika invers matriks yang sudah kita kenal adalah invers dari suatu matriks bujur sangkar dan nonsingular, maka invers Moore-Penrose ada untuk setiap matriks baik bujur sangkar yang singular maupun tidak bujur sangkar. Sehingga dapat disimpulkan bahwa setiap sebarang matriks pasti mempunyai invers Moore-Penrose. Jika  $T_u \in \mathbb{R}_{m \times m}$  matriks nonsingular maka  $T_u^{-1} = T_u^+$ , ini dijelaskan pada Teorema 2.

**Teorema 2.** Jika  $T_u \in \mathbb{M}_{m \times m}$  merupakan matriks Turiyam simbolik non-singular maka invers dari  $T_u$  merupakan invers Moore-Penrose matriks Turiyam simbolik, dengan kata lain invers matriks  $T_u$  sama dengan invers Moore-Penrose matriks Turiyam simbolik ( $T_u^{-1} = T_u^+$ ).

**Bukti.** Misalkan matriks  $T_u$  merupakan matriks Turiyam simbolik *non-singular*, sehingga matriks  $T_u$  memiliki invers yang dimisalkan dengan matriks  $S_u$ . Ditunjukkan bahwa untuk setiap matriks  $T_u \in \mathbb{M}_{m \times m}$  memiliki invers yang sama dengan invers Moore-Penrose, dengan demikian matriks  $S_u = T_u^{-1}$  harus memenuhi keempat kriteria invers Moore-Penrose seperti yang telah didefinisikan pada definisi 7 agar terbukti  $S_u = T_u^{-1} = T_u^+$ .

Untuk kondisi Penrose 1,  $S_u$  bisa ditulis dalam bentuk  $T_u = T_u S_u T_u$ ,

$$T_u S_u T_u = T_u T_u^{-1} T_u = (T_u T_u^{-1}) T_u = I T_u = T_u \text{ (terbukti terpenuhi kondisi Penrose 1)}$$

Untuk kondisi Penrose 2,  $S_u$  bisa ditulis dalam bentuk  $S_u = T_u S_u T_u$ ,

$$S_u T_u S_u = T_u^{-1} T_u T_u^{-1} = T_u^{-1} I = T_u^{-1} \text{ (terbukti terpenuhi kondisi Penrose 2).}$$

Untuk kondisi Penrose 3 berlaku,

$$(T_u S_u)^* = (T_u T_u^{-1})^* = I^* = I = T_u T_u^{-1} = T_u S_u \text{ (terbukti terpenuhi kondisi Penrose 3).}$$

Untuk kondisi Penrose 4 berlaku,

$$(S_u T_u)^* = (T_u^{-1} T_u)^* = I^* = I = T_u^{-1} T_u = S_u T_u \text{ (Terbukti terpenuhi kondisi Penrose 4).}$$

Matriks  $S_u$  memenuhi keempat kondisi Penrose, sehingga terbukti invers matriks  $T_u$  sama dengan invers Moore-Penrose matriks Turiyam simbolik ( $S_u = T_u^{-1} = T_u^+$ ). □

Langkah awal dalam menentukan invers Moore-Penrose adalah menentukan *rank* dari matriks tersebut. *Rank* dari matriks sebagai jumlah maksimum vektor-vektor baris atau kolom yang bebas linear. Terdapat kategori untuk menentukan invers Moore-Penrose ( $T_u^+$ ) pada matriks yang *full rank*. Namun jika *rank* dari matriks  $A$  tidak *full rank*, maka gunakan formula  $T_u^+ = G_u^T (G_u G_u^T)^{-1} (F_u^T F_u)^{-1} F_u^T$ . Ini dinyatakan dalam Teorema 3.

**Teorema 3.** Diberikan matriks  $T_u \in \mathbb{R}_{m \times n}$  dengan  $\text{rank}(T_u) > 0$ . Jika matriks  $T_u = F_u G_u$  maka  $T_u^+ = G_u^T (G_u G_u^T)^{-1} (F_u^T F_u)^{-1} F_u^T$  merupakan Invers Moore-Penrose.

**Bukti.** Matriks  $T_u = F_u G_u$  dan  $T_u^+ = G_u^T (G_u G_u^T)^{-1} (F_u^T F_u)^{-1} F_u^T$  merupakan Invers Moore-Penrose jika memenuhi keempat kondisi Penrose yang didefinisikan pada Definisi 7, Teorema ini buktikan dengan menunjukkan  $T_u^+$  memenuhi keempat kondisi Penrose sebagai berikut.

1. Kondisi Penrose 1

$$T_u T_u^+ T_u = F_u G_u G_u^T (G_u G_u^T)^{-1} (F_u^T F_u)^{-1} F_u^T F_u G_u.$$

$$T_u T_u^+ T_u = F_u (G_u G_u^T) (G_u G_u^T)^{-1} (F_u^T F_u)^{-1} (F_u^T F_u) G_u.$$

$$T_u T_u^+ T_u = F_u G_u.$$

$$T_u T_u^+ T_u = T_u. \text{ (Kondisi Penrose 1 Terpenuhi.)}$$

2. Kondisi Penrose 2

$$\begin{aligned}
 T_u^+ T_u T_u^+ &= G_u^T (G_u G_u^T)^{-1} (F_u^T F_u)^{-1} F_u^T F_u G_u G_u^T (G_u G_u^T)^{-1} (F_u^T F_u)^{-1} F_u^T. \\
 T_u^+ T_u T_u^+ &= G_u^T (G_u G_u^T)^{-1} (F_u^T F_u)^{-1} (F_u^T F_u) (G_u G_u^T) (G_u G_u^T)^{-1} (F_u^T F_u)^{-1} F_u^T. \\
 T_u^+ T_u T_u^+ &= G_u^T (G_u G_u^T)^{-1} (F_u^T F_u)^{-1} F_u^T. \\
 T_u^+ T_u T_u^+ &= T_u^T. \text{ (Kondisi Penrose 2 Terpenuhi.)}
 \end{aligned}$$

3. Kondisi Penrose 3

$$\begin{aligned}
 (T_u T_u^+)^* &= \left( (F_u G_u) \left( G_u^T (G_u G_u^+)^{-1} (F_u^T F_u)^{-1} F_u^T \right) \right)^*. \\
 (T_u T_u^+)^* &= \left( G_u^T (G_u G_u^+)^{-1} (F_u^T F_u)^{-1} F_u^T \right)^* (F_u G_u)^*. \\
 \left( (T_u T_u^+)^* \right)^* &= \left( \left( G_u^T (G_u G_u^+)^{-1} (F_u^T F_u)^{-1} F_u^T \right)^* (F_u G_u)^* \right)^*. \\
 (T_u T_u^+) &= \left( (F_u G_u) \left( G_u^T (G_u G_u^+)^{-1} (F_u^T F_u)^{-1} F_u^T \right) \right)^*. \\
 (T_u T_u^+) &= T_u T_u^+. \text{ (Kondisi Penrose 3 Terpenuhi.)}
 \end{aligned}$$

4. Kondisi Penrose 3

$$\begin{aligned}
 (T_u^+ T_u)^* &= \left( \left( G_u^T (G_u G_u^+)^{-1} (F_u^T F_u)^{-1} F_u^T \right) (F_u G_u) \right)^*. \\
 (T_u^+ T_u)^* &= \left( (F_u G_u)^* \left( G_u^T (G_u G_u^+)^{-1} (F_u^T F_u)^{-1} F_u^T \right) \right)^*. \\
 \left( (T_u^+ T_u)^* \right)^* &= \left( \left( (F_u G_u)^* \left( G_u^T (G_u G_u^+)^{-1} (F_u^T F_u)^{-1} F_u^T \right) \right)^* \right)^*. \\
 (T_u^+ T_u) &= \left( \left( G_u^T (G_u G_u^+)^{-1} (F_u^T F_u)^{-1} F_u^T \right) (F_u G_u) \right)^*. \\
 (T_u^+ T_u) &= (T_u^+ T_u). \text{ (Kondisi Penrose 4 Terpenuhi.)}
 \end{aligned}$$

Karena  $T_u^+$  memenuhi keempat kondisi Penrose,  $T_u^+ = G_u^T (G_u G_u^T)^{-1} (F_u^T F_u)^{-1} F_u^T$  merupakan Invers Moore-Penrose. □

3.2. Menentukan Invers Moore-Penrose pada Matriks Turiyam Simbolik Real

Adapun algoritma dalam menentukan invers Moore-Penrose pada matriks Turiyam simbolik yang berukuran  $m \times n$  dengan  $m \neq n$  sebagai berikut.

1. Mendefinisikan matriks  $T_u$  yang merupakan sebarang matriks Turiyam simbolik real yang berukuran  $m \times n$  dengan  $m \neq n$ .

$$T_u = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dengan  $a_{mn}$  adalah bilangan Turiyam simbolik real.

2. Menentukan *rank* pada matriks Turiyam simbolik real. Jika suatu matriks  $T_u$  tidak *full rank*, adapun langkah-langkah untuk mencari invers Moore-Penrose dari matriks tersebut adalah sebagai berikut:

- (a) Mereduksi matriks  $T_u$  tersebut menjadi matriks eselon baris tereduksi dan memisalkan matriks itu sebagai matriks baru dengan notasi  $Y_u$ :

$$Y_u = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

- (b) Lihat kolom yang memuat satu utama dari matriks  $Y_u$  dan pilih kolom tersebut dari matriks  $T_u$ . Kolom yang dipilih dari matriks  $T_u$  dibentuk menjadi matriks baru yang dinotasikan dengan matriks  $F_u$ :

$$F_u = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

- (c) Menentukan  $F_u^T$  dan  $(F_u^T F_u)^{-1}$  :

$$F_u^T = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{m1} \\ c_{12} & \dots & c_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

$$F_u^T F_u = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{m1} \\ c_{12} & \dots & c_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

$$F_u^T F_u = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & \dots & d_{mn} \end{pmatrix},$$

$$(F_u^T F_u)^{-1} = \begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & \dots & e_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{m1} & \dots & e_{mn} \end{pmatrix}.$$

- (d) Memilih baris tak nol dari matriks  $Y_u$  dan misalkan dengan matriks  $G_u$ :

$$G_u = \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix}.$$

(e) Menghitung nilai  $G_u^T$  dan  $(G_u G_u^T)^{-1}$ :

$$G_u^T = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{m1} \\ f_{12} & \cdots & f_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1n} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix},$$

$$(G_u G_u^T)^{-1} = \left( \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{m1} \\ f_{12} & \cdots & f_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1n} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix} \right)^{-1},$$

$$(G_u G_u^T)^{-1} = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mn} \end{pmatrix}.$$

(f) Menghitung  $T_u^+ = G_u^T (G_u G_u^T)^{-1} (F_u^T F_u)^{-1} F_u^T$ :

$$T_u^+ = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{m1} \\ f_{12} & \cdots & f_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1n} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & \cdots & e_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{m1} & \cdots & e_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{m1} \\ c_{12} & \cdots & c_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$T_u^+ = \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix}.$$

$T_u^+$  adalah invers Moore-Penrose jika memenuhi keempat kondisi Penrose.

Jika suatu matriks  $T_u$  full rank, adapun langkah-langkah untuk mencari invers Moore-Penrose dari matriks adalah sebagai berikut:

(a) Bila matriks  $T_u$  merupakan full row rank, maka invers Moore-Penrose dapat dihitung dengan:

$$T_u^+ = T_u^T (T_u T_u^T)^{-1}.$$

(b) Bila matriks  $T_u$  merupakan full columns rank, maka invers Moore-Penrose dapat dihitung dengan:

$$T_u^+ = (T_u^T T_u)^{-1} T_u^T.$$

3. Tunjukkan  $T_u^+$  memenuhi keempat kondisi Penrose, jika terpenuhi maka didapatkan invers Moore-Penrose dari matriks  $T_u$  yaitu  $T_u^+$ :

$$T_u^+ = \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix}.$$

$T_u^+$  merupakan Invers Moore-Penrose jika memenuhi ke-empat kriteria Penrose:

(a)  $T_u T_u^+ T_u = T_u$ .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

(b)  $T_u^+ T_u T_u^+ = T_u^+$ .

$$\begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix}.$$

(c)  $T_u^+ T_u = (T_u^+ T_u)^*$  (Hermitian).

$$\begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \right)^*.$$

(d)  $T_u T_u^+ = (T_u T_u^+)^*$  (Hermitian).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix} \right)^*.$$

### 3.3. Beberapa Contoh Soal

**Contoh 3.** Menentukan invers Moore-Penrose pada matriks  $T_u$  yang *full columns rank*  $3 \times 2$ ,

$$T_u = \begin{bmatrix} T + 2Y & Y \\ F & 2 \\ T & 0 \end{bmatrix}.$$

**Solusi.** Penentuan solusi mengikuti langkah-langkah berikut:

- **Langkah 1.** Tentukan *rank* dari matriks  $T_u$ ,

bentuk eselon baris dari  $T_u$  adalah  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$   $rank T_u = 2$  (*full columns rank*).

- **Langkah 2.** Gunakan rumus  $T_u^+ = (T_u^T T_u)^{-1} T_u^T$  untuk menghitung Invers Moore-Penrose dari  $T_u$ ,

$$T_u = \begin{bmatrix} T+2Y & Y \\ F & 2 \\ T & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } T_u^T = \begin{bmatrix} T+2Y & F & T \\ Y & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$T_u^T \cdot T_u = \begin{bmatrix} 2T^2 + 4TY + 4Y^2 + F^2 & TY + 2Y^2 + 2F \\ TY + 2Y^2 + 2F & Y^2 + 4 \end{bmatrix}.$$

Gunakan operasi aljabar pada turiyam matriks sehingga diperoleh,

$$T_u^T \cdot T_u = \begin{bmatrix} 2T + 8Y + F & 3Y + 2F \\ 3Y + 2F & Y + 4 \end{bmatrix}$$

$$\left(T_u^T \cdot T_u\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{(Y+4)}{-2TY-8T-32Y+11FY-4F+4F^2} & \frac{(3Y+2F)}{-2TY-8T-32Y+11FY-4F+4F^2} \\ \frac{(3Y+2F)}{-2TY-8T-32Y+11FY-4F+4F^2} & -\frac{(2T+8Y+F)}{-2TY-8T-32Y+11FY-4F+4F^2} \end{bmatrix}.$$

Gunakan operasi aljabar pada Turiyam matriks sehingga diperoleh,

$$\left(T_u^T \cdot T_u\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-(Y+4)}{-22Y-8T} & \frac{3Y+2F}{-22Y-8T} \\ \frac{3Y+2F}{-22Y-8T} & -\frac{(2T+8Y+F)}{-22Y-8T} \end{bmatrix}$$

$$\left(T_u^T \cdot T_u\right)^{-1} T_u^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \frac{(-6Y-4T)}{11Y+4T} & \frac{1}{2} \frac{Y(F-6)}{11Y+4T} & \frac{1}{2} \frac{T(Y+4)}{11Y+4T} \\ -\frac{1}{2} \frac{(2Y+2F)}{11Y+4T} & -\frac{1}{2} \frac{(-13Y-4T)}{11Y+4T} & -\frac{1}{2} \frac{T(3Y+2F)}{11Y+4T} \end{bmatrix},$$

sehingga  $(T_u^T T_u)^{-1} T_u^T = T_u^+$ .

- **Langkah 3.** Cek apakah  $T_u^+$  memenuhi keempat kriteria Penrose,

1.  $T_u T_u^+ T_u = T_u$ .

$$T_u T_u^+ T_u = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{8T+82Y}{11Y+4T} & \frac{Y(14Y+F)}{11Y+4T} \\ \frac{1}{2} \frac{8F+22Y}{11Y+4T} & \frac{8F+22Y}{11Y+4T} \\ \frac{1}{2} \frac{T(8T+22Y)}{11Y+4T} & \frac{TY(2T+3Y+F-6)}{11Y+4T} \end{bmatrix}$$

Cek entri  $t_{u11}$  untuk mengetahui  $T_u T_u^+ T_u = T_u$

$$\frac{1}{2} \frac{8T + 82Y}{11Y + 4T} = T + 2Y$$

$$8T + 82Y = T + 2Y(22Y + 8T)$$

$$8T + 82Y = 38Y + 44Y + 8T$$

$$8T + 82Y = 8T + 82Y$$

Diperoleh bahwa entri  $t_{u11}$  pada  $T_u T_u^+ T_u$  sama dengan  $t_{u11}$  pada  $T_u$  dan coba dengan cara yang sama, sehingga diperoleh matriks  $T_u T_u^+ T_u = T_u$  (terpenuhi kriteria 1).

2.  $T_u^+ T_u T_u^T = T_u^+$ .

$$T_u^+ T_u T_u^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{16T+132Y+2TY}{(11Y+4T)^2} & \frac{1}{4} \frac{Y(16T-80T-86Y)}{(11Y+4T)^2} & \frac{1}{4} \frac{T(118Y+32T)}{(11Y+4T)^2} \\ \frac{1}{2} \frac{-46Y-4F-6TY-4TF}{(11Y+4T)^2} & -\frac{1}{4} \frac{(-482Y+4YF-32T)}{(11Y+4T)^2} & \frac{1}{4} \frac{T(-134Y-16F)}{(11Y+4T)^2} \end{bmatrix}$$

Cek salah satu entri, misalkan ambil entri  $t_{u23}$  pada  $T_u^+ T_u T_u^T$  untuk mengetahui  $T_u^+ T_u T_u^T = T_u^+$

$$\frac{T(-134Y - 16F)}{4(11Y + 4T)^2} = -\frac{T(3Y + 2F)}{2(11Y + 4T)}$$

$$\frac{(-134TY - 16TF)}{484Y^2 + 352TY + 64T^2} = -\frac{\frac{1}{2} T(3Y + 2F)}{11Y + 4T}$$

$$-1474TY^2 - 536T^2Y - 176FTY - 64FT^2 = -726TY^3 - 484FTY^2 - 528T^2Y^2 - 352FT^2Y - 96T^3Y - 64FT^3$$

$$-1474Y - 536Y - 176Y - 64F = -726Y - 484Y - 528Y$$

$$-352Y - 96Y - 64F$$

$$-2186Y - 64F = -2186Y - 64F$$

Diperoleh bahwa entri  $t_{u23}$  pada  $T_u^+ T_u T_u^T$  sama dengan  $t_{u23}$  pada  $T_u^+$  dan coba dengan cara yang sama, sehingga diperoleh matriks  $T_u^+ T_u T_u^T = T_u^+$  (terpenuhi kriteria 2).

3.  $T_u^+ T_u = (T_u^+ T_u)^*$  (Hermitian).

Untuk matriks real, transpos konjugat (hermitian) akan sama dengan operasi transpos biasa [1, h. 438].

$$T_u^+ T_u = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{8T+22Y}{11Y+4T} & \frac{Y(2T+3Y+F-6)}{11Y+4T} \\ 0 & -\frac{(-11Y-4T)}{11Y+4T} \end{bmatrix}$$

$$(T_u^+ T_u)^* = (T_u^+ T_u)^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{8T+22Y}{11Y+4T} & 0 \\ \frac{Y(2T+3Y+F-6)}{11Y+4T} & -\frac{(-11Y-4T)}{11Y+4T} \end{bmatrix}$$

Agar  $T_u^+ T_u = (T_u^+ T_u)^*$  Hermitian maka entri  $t_{u12}$  pada  $T_u^+ T_u$  harus sama nilainya dengan  $t_{u12}$  pada  $(T_u^+ T_u)^*$  Hermitian.

$$\frac{Y(2T + 3Y + F - 6)}{11Y + 4T} = \frac{2Y + 3Y + Y - 6Y}{11Y + 4T} = \frac{0}{11Y + 4T} = 0$$

sehingga diperoleh  $T_u^+ T_u = (T_u^+ T_u)^*$  Hermitian (kriteria 3 terpenuhi).



4.  $T_u T_u^+ = (T_u T_u^+)^*$  (Hermitian).

$$T_u T_u^+ = \begin{bmatrix} -\frac{(-2T-11Y)}{11Y+4T} & \frac{1}{2} \frac{Y(F-2T+3Y)}{11Y+4T} & -\frac{1}{2} \frac{T(-6Y-4T)}{11Y+4T} \\ \frac{Y}{11Y+4T} & \frac{1}{2} \frac{21Y+8T}{11Y+4T} & \frac{1}{2} \frac{TY(F-6)}{11Y+4T} \\ \frac{T(2T+3Y)}{11Y+4T} & \frac{1}{2} \frac{TY(F-6)}{11Y+4T} & \frac{1}{2} \frac{(Y+4)T}{11Y+4T} \end{bmatrix}$$

$$(T_u T_u^+)^* \text{Hermitian} = (T_u T_u^+)^T = \begin{bmatrix} -\frac{(-2T-11Y)}{11Y+4T} & \frac{Y}{11Y+4T} & \frac{T(2T+3Y)}{11Y+4T} \\ \frac{1}{2} \frac{Y(F-2T+3Y)}{11Y+4T} & \frac{1}{2} \frac{21Y+8T}{11Y+4T} & \frac{1}{2} \frac{TY(F-6)}{11Y+4T} \\ -\frac{1}{2} \frac{T(-6Y-4T)}{11Y+4T} & \frac{1}{2} \frac{TY(F-6)}{11Y+4T} & \frac{1}{2} \frac{(Y+4)T}{11Y+4T} \end{bmatrix}$$

Agar  $T_u T_u^+ = (T_u T_u^+)^* \text{Hermitian}$ , entri  $t_{u12}$  pada  $T_u T_u^T$  harus sama nilainya dengan  $t_{u12}$  pada  $T_u T_u^{T*}$  Hermitian dan entri  $t_{u13}$  pada  $T_u T_u^T$  harus sama nilainya dengan  $t_{u13}$  pada  $T_u T_u^{T*}$  Hermitian.

$$t_{u12} = t_{u12}$$

$$\frac{Y}{11Y+4T} = \frac{1}{2} \frac{Y(F-2T+3Y)}{11Y+4T}$$

$$Y(22Y+8T) = (11Y+4T)(YF-2TY+3Y^2)$$

$$22Y+8Y = 22Y^2+8TY$$

$$22Y+8Y = 22Y+8Y$$

$$t_{u13} = t_{u13}$$

$$\frac{T(2T+3Y)}{11Y+4T} = -\frac{1}{2} \frac{T(-6Y-4T)}{11Y+4T}$$

$$68Y+66Y+16T = 66Y^2+68TY+16T^2$$

$$68Y+66Y+16T = 68Y+66Y+16T$$

sehingga diperoleh  $T_u T_u^+ = (T_u T_u^+)^* \text{Hermitian}$  (kriteria 4 terpenuhi).  $T_u^+$  memenuhi keempat kriteria Penrose maka invers Moore-Penrose dari matriks  $T_u$  adalah

$$T_u^+ = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \frac{(-6Y-4T)}{11Y+4T} & \frac{1}{2} \frac{Y(F-6)}{11Y+4T} & \frac{T(Y+4)}{2(11Y+4T)} \\ -\frac{1}{2} \frac{(2Y+2F)}{11Y+4T} & -\frac{1}{2} \frac{(-13Y-4T)}{11Y+4T} & -\frac{T(3Y+2F)}{2(11Y+4T)} \end{bmatrix}.$$

**Contoh 4.** Menentukan invers Moore-Penrose pada matriks  $T_u$  yang *full columns rank*  $2 \times 3$ ,

$$T_u = \begin{bmatrix} 2T & 2Y & 4F \\ T & Y & 2F \end{bmatrix}.$$

**Solusi.** Penentuan solusi mengikuti langkah-langkah berikut:

- **Langkah 1.** Tentukan *rank* dari matriks  $T_u$ .  
Bentuk eselon baris dari  $T_u$  adalah  $\begin{bmatrix} 1 & \frac{Y}{T} & \frac{2F}{T} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$   $\text{rank } T_u = 1$ .
- **Langkah 2.** Mereduksi matriks  $T_u$  menjadi matriks eselon baris tereduksi dan memisalkan matriks tersebut sebagai matriks baru dengan notasi  $Y_u$ :

$$Y_u = \begin{bmatrix} 1 & \frac{Y}{T} & \frac{2F}{T} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- **Langkah 3.** Lihat kolom yang memuat satu utama dari matriks  $Y_u$  dan pilih kolom tersebut dari matriks  $T_u$ . Kolom yang dipilih dari matriks  $T_u$  dibentuk menjadi matriks baru yang dinotasikan dengan matriks  $F_u$ :

$$F_u = \begin{bmatrix} 2T \\ T \end{bmatrix}.$$

- **Langkah 4.** Memilih baris tak nol dari matriks  $Y_u$  dan misalkan dengan matriks  $G_u$ :

$$G_u = \begin{bmatrix} 1 & \frac{Y}{T} & \frac{2F}{T} \end{bmatrix}.$$

- **Langkah 5.** Menghitung  $T_u^+ = G_u^T (G_u G_u^T)^{-1} (F_u^T F_u)^{-1} F_u^T$ :

$$G_u^T (G_u G_u^T)^{-1} (F_u^T F_u)^{-1} F_u^T = \begin{bmatrix} \frac{2T}{5(T+Y+4F)} & \frac{T}{5(T+Y+4F)} \\ \frac{2Y}{5(T+Y+4F)} & \frac{Y}{5(T+Y+4F)} \\ \frac{2F}{5(T+Y+4F)} & \frac{2F}{5(T+Y+4F)} \end{bmatrix}$$

- **Langkah 6.** Cek apakah  $T_u^+$  memenuhi keempat kondisi Penrose:

1.  $T_u T_u^+ T_u = T_u$ .

$$T_u T_u^+ T_u = \begin{bmatrix} 2T & 2Y & 4F \\ T & Y & 2F \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh matriks  $T_u T_u^+ T_u = T_u$  (terpenuhi kriteria 1).

2.  $T_u^+ T_u T_u^T = T_u^+$ .

$$T_u^+ T_u T_u^T = \begin{bmatrix} \frac{2T}{5(T+Y+4F)} & \frac{T}{5(T+Y+4F)} \\ \frac{2Y}{5(T+Y+4F)} & \frac{Y}{5(T+Y+4F)} \\ \frac{2F}{5(T+Y+4F)} & \frac{2F}{5(T+Y+4F)} \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh matriks  $T_u^+ T_u T_u^T = T_u^+$  (terpenuhi kriteria 2).

3.  $T_u^+ T_u = (T_u^+ T_u)^*$  (Hermitian).

Untuk matriks real, transpos konjugat (hermitian) akan sama dengan operasi transpos biasa [1, h. 438].

$$T_u^+ T_u = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{(T+Y+4F)} & \frac{TY}{(T+Y+4F)} & \frac{2TF}{(T+Y+4F)} \\ \frac{TY}{(T+Y+4F)} & \frac{Y^2}{(T+Y+4F)} & \frac{2YF}{(T+Y+4F)} \\ \frac{2TF}{(T+Y+4F)} & \frac{2YF}{(T+Y+4F)} & \frac{4F^2}{(T+Y+4F)} \end{bmatrix}$$

$$(T_u^+ T_u)^* = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{(T+Y+4F)} & \frac{TY}{(T+Y+4F)} & \frac{2TF}{(T+Y+4F)} \\ \frac{TY}{(T+Y+4F)} & \frac{Y^2}{(T+Y+4F)} & \frac{2YF}{(T+Y+4F)} \\ \frac{2TF}{(T+Y+4F)} & \frac{2YF}{(T+Y+4F)} & \frac{4F^2}{(T+Y+4F)} \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh  $T_u^+ T_u = (T_u^+ T_u)^*$  Hermitian (kriteria 3 terpenuhi).

4.  $T_u T_u^+ = (T_u T_u^+)^*$  (Hermitian).

$$T_u T_u^+ = \begin{bmatrix} \frac{4(T^2+Y^2+4F^2)}{5(T+Y+4F)} & \frac{2(T^2+Y^2+4F^2)}{5(T+Y+4F)} \\ \frac{2(T^2+Y^2+4F^2)}{5(T+Y+4F)} & \frac{(T^2+Y^2+4F^2)}{5(T+Y+4F)} \end{bmatrix}$$

$$(T_u T_u^+)^* = \begin{bmatrix} \frac{4(T^2+Y^2+4F^2)}{5(T+Y+4F)} & \frac{2(T^2+Y^2+4F^2)}{5(T+Y+4F)} \\ \frac{2(T^2+Y^2+4F^2)}{5(T+Y+4F)} & \frac{(T^2+Y^2+4F^2)}{5(T+Y+4F)} \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh  $T_u T_u^+ = (T_u T_u^+)^*$  Hermitian (kriteria 4 terpenuhi).  
 $T_u^+$  memenuhi keempat kriteria Penrose maka invers Moore-Penrose dari matriks  $T_u$  adalah

$$T_u^+ = \begin{bmatrix} \frac{2T}{5(T+Y+4F)} & \frac{T}{5(T+Y+4F)} \\ \frac{2Y}{5(T+Y+4F)} & \frac{Y}{5(T+Y+4F)} \\ \frac{2F}{5(T+Y+4F)} & \frac{2F}{5(T+Y+4F)} \end{bmatrix}.$$

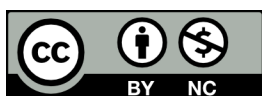
#### 4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh kesimpulan mengenai Invers Moore-Penrose pada matriks Turiyam simbolik real bahwa untuk matriks  $T_u$  yang berukuran  $m \times n$  dengan  $m \neq n$  selalu memiliki Invers Moore-Penrose secara tunggal. Dengan kata lain invers dari matriks yang non *invertible* baik yang singular maupun yang berukuran tidak bujur sangkar bisa dihitung dengan invers Moore-Penrose, ini bisa dilihat dari contoh demonstrasi pada pembahasan.

#### Referensi

- [1] H. Anton and C. Rorres, *Elementary Linear Algebra: Applications Version*, 11th ed. New Jersey: John Wiley and Sons, Inc., 2013.
- [2] S. Syarifuddin, M. Mikrayanti, and M. Muslim, *Aljabar Linear*, M. Z. Aminy and S. Sudarsono, Eds. Mataram: LPP Mandala, 2016.
- [3] R. Macausland, *The Moore-Penrose Inverse and Least Squares*. Tacoma, Washington: University of Puget Sound, 2014.
- [4] T. Britz, "The Moore-Penrose inverse of a free matrix," *The Electronic Journal of Linear Algebra*, vol. 16, pp. 208–215, jan 2007, doi: 10.13001/1081-3810.1196.
- [5] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville, *Generalized Inverses: Theory and Applications*, ser. CMS Books in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 2003, doi: 10.1007/b97366.
- [6] P. K. Singh, "Turiyam Set a Fourth Dimension Data Representation," *Journal of Applied Mathematics and Physics*, vol. 09, no. 07, pp. 1821–1828, 2021, doi: 10.4236/jamp.2021.97116.
- [7] H. Yanai, K. Takeuchi, and Y. Takane, *Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices, and Singular Value Decomposition*. New York, NY: Springer New York, 2011, doi: 10.1007/978-1-4419-9887-3.
- [8] L. Salaka, H. W. M. Patty, and M. W. Talakua, "Sifat-Sifat Dasar Matriks Skew Hermitian," *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, vol. 7, no. 2, pp. 19–26, dec 2013, doi: 10.30598/barekengvol7iss2pp19-26.
- [9] P. Courrieu, "Fast Computation of Moore-Penrose Inverse Matrices," *Neural and Evolutionary Computing*, vol. 8, no. 2, pp. 25–29, 2008, doi: https://doi.org/10.48550/arXiv.0804.4809.
- [10] P. K. Singh, K. D. Ahmad, M. Bal, and M. Aswad, "On The Symbolic Turiyam Rings," *Journal of Neutrosophic and Fuzzy Systems*, p. 03559108, 2021, doi: 10.54216/JNFS.010204.
- [11] A. A. Basheer, K. D. Ahmad, and R. Ali, "Symbolic Turiyam Groups," *Preprint Paper*, pp. 30–43, 2022, doi: 10.13140/RG.2.2.28244.07045.
- [12] S. Suroto, "Invers Moore-Penrose pada Matriks Atas Aljabar Max-Plus Tersimetri," *Teorema: Teori dan Riset Matematika*, vol. 6, no. 2, pp. 198–209, sep 2021, doi: 10.25157/teorema.v6i2.5514.
- [13] A. A. Basheer, K. D. Ahmad, and R. Ali, "An Introduction to The Symbolic Turiyam Groups and AH-Substructures," *Journal of Neutrosophic and Fuzzy Systems*, vol. 3, no. 2, pp. 43–52, 2022, doi: 10.54216/JNFS.030205.

- [14] M. Bal, P. K. Singh, and K. D. Ahmad, "A Short Introduction To The Concept Of Symbolic Turiyam Matrix," *Journal of Neutrosophic and Fuzzy Systems*, vol. 2, pp. 88–99, 2022, doi: 10.54216/JNFS.020108.
- [15] —, "An Introduction To The Symbolic Turiyam R-Modules and Turiyam Modulo Integers," *Journal of Neutrosophic and Fuzzy Systems*, pp. 8–19, 2022, doi: 10.54216/JNFS.020201.
- [16] P. K. Singh, "Four Way Human Quantum Turiyam Cognition Analysis," *Journal of Artificial Intelligence and Technology*, vol. 2, no. 4, pp. 1–8, aug 2022, doi: 10.37965/jait.2022.0123.
- [17] Y. Yanti, H. Helmi, and M. Kiftiah, "Invers Moore-Penrose Sebagai Invers Matriks," *Bimaster : Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, vol. 8, no. 4, pp. 951–958, oct 2019, doi: 10.26418/bbimst.v8i4.36731.
- [18] S. L. Campbell and C. D. Meyer, *Generalized Inverses of Linear Transformations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, jan 2009, doi: 10.1137/1.9780898719048.



This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/). Editorial of JJoM: Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo, Jln. Prof. Dr. Ing. B.J. Habibie, Moutong, Tilongkabila, Kabupaten Bone Bolango, Provinsi Gorontalo 96554, Indonesia.