JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS
Jambura J. Math. Vol. 5, No. 2, pp. 380–403, August 2023
Journal Homepage: http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom
DOI: https://doi.org/10.34312/jjom.v5i2.20534

Perluasan Masalah Isoperimetrik pada Bangun Ruang

Andri Setiawan[1,*], Denny Ivanal Hakim[1], Oki Neswan[1]

[1]*Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Institut Teknologi Bandung, Bandung 40116, Indonesia*
[*]*Corresponding author. Email: androseti.as@gmail.com*

ABSTRAK

Dalam tulisan ini, dieksplorasi beberapa perluasan masalah isoperimetrik pada bangun ruang, dengan fokus kepada prisma miring dan prisma tegak dengan alas persegi panjang, segitiga siku-siku, dan segi enam beraturan. Tujuan dalam penelitian ini adalah menemukan prisma dengan volume terbesar dengan luas permukaan yang dijaga tetap. Melalui manipulasi aljabar dan trigonometri sederhana, diperoleh bukti bahwa prisma tegak memberikan volume yang lebih besar daripada prisma miring, jika luas permukaan keduanya sama. Melalui turunan fungsi dua variable dan metode pengali Lagrange, diperoleh syarat sisi-sisi agar diperoleh prisma dengan volume terbesar. Diperoleh hasil bahwa kubus adalah solusi dari masalah isoperimetrik, dengan kata lain memiliki volume terbesar, pada kelompok prisma dengan alas persegi panjang, sementara solusi isoperimetrik pada prisma dengan alas segitiga siku-siku, alas prisma haruslah berupa segitiga siku-siku sama kaki. Prisma dengan alas segi enam beraturan memiliki volume yang lebih besar dari prisma dengan alas persegi panjang dan segitiga siku-siku, apabila luas permukaan dari ketiganya sama.

Kata Kunci:
Isoperimetrik; Perluasan Masalah Isoperimetrik; Bangun Ruang; Prisma Tegak; Prisma Miring

ABSTRACT

In this paper, several extensions of the isoperimetric problem in solid figures are explored, focusing on oblique and right prisms with rectangular, right-angled triangular, and regular hexagonal bases. The objective of this research is to find the prism with the largest volume while keeping the surface area constant. Through manipulations of algebra and simple trigonometry, evidence is obtained that a right prism provides a larger volume than an oblique prism if their surface areas are equal. By utilizing partial derivatives of a two-variable function and the Lagrange multiplier method, conditions for the side lengths are derived to obtain the prism with the maximum volume. The results show that a cube is the solution to the isoperimetric problem, meaning it has the largest volume among prisms with rectangular bases, while for the isoperimetric solution on prisms with right-angled triangular bases, the base of the prism must be an isosceles right-angled triangle. A regular hexagonal prism has a larger volume than prisms with rectangular and right-angled triangular bases if their surface areas are the same.

Keywords:
Isoperimetric; Extension of Isoperimetric Problem; Solid Figure; Right Prism; Oblique Prism

Style Sitasi:

A. Setiawan, D. I. Hakim, and O. Neswan, ”Perluasan Masalah Isoperimetrik pada Bangun Ruang”, *Jambura J. Math.*, vol. 5, No. 2, pp. 380–403, 2023, doi: https://doi.org/10.34312/jjom.v5i2.20534

e-ISSN: 2656-1344 © 2023 A. Setiawan, D. I. Hakim, O. Neswan | Under the license CC BY-NC 4.0
Received: 14-06-2023 | Revised: 20-07-2023 | Accepted: 25-07-2023| Published: 01-08-2023

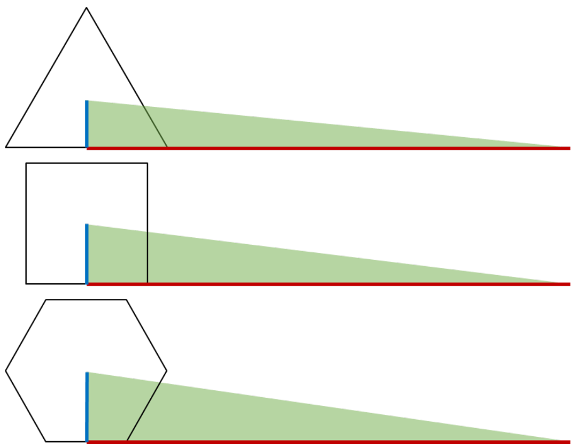
1. Pendahuluan

Kata isoperimetrik terdiri dari dua kata, yaitu iso yang berarti sama, dan perimetrik yang berarti keliling [1]. Dari sini dapat dipahami bahwa isoperimetrik dibahas pada bangun datar dua dimensi. Masalah isoperimetrik dalam bidang dua dimensi adalah pertanyaan: Dengan keliling tertentu, bentuk bangun datar apa yang menghasilkan luas terbesar [2].

Solusi dari masalah isoperimetrik dinyatakan dalam bentuk Teorema Isoperimetrik, yang menyatakan bahwa dengan keliling yang sama, lingkaran menghasilkan luas yang lebih besar daripada bentuk datar lainnya. Secara kasuistik, teorema isoperimetrik dapat ditulis sebagai berikut: di antara semua segitiga dengan keliling dan panjang salah satu sisinya telah ditentukan, segitiga sama kaki memiliki luas terbesar; di antara semua segitiga dengan keliling tertentu, segitiga sama sisi memiliki luas terbesar; di antara semua segi-n dengan keliling tertentu, segi-n beraturan memiliki luas terbesar [1, 3].

Masalah isoperimetrik diketahui telah dibahas dalam kurun waktu yang lama. Secara kronologis, salah satu penerapan tertua dari Teorema Isoperimetrik adalah solusi dari masalah Ratu Dido. Ratu Dido yang jika dikaitkan dengan sejarah pendirian Kota Kerajaan Katago hidup sekitar 800 SM. Referensi tertua mengenai Dido disematkan kepada Timaeus (300 SM) [4], namun detail dari perjalanan Dido dan pendirian Kartago dapat ditemukan dalam puisi epik romantis karya Virgil, Aeneid (30-19 SM). Dido digambarkan sebagai putri seorang raja Tirus (sekarang Lebanon) yang melarikan diri ke pantai utara Afrika (sekarang Libya). Singkat cerita, Dido dihadapkan pada tantangan untuk melingkupi seluas mungkin wilayah di pinggir pantai dengan menggunakan tali yang terbuat dari kulit sapi. Dido kemudian berhasil memberikan solusi yang tepat dari masalahnya, yakni setengah lingkaran [5]. Teorema Isoperimetrik menjamin bahwa lingkaran adalah bentuk dengan luas maksimum, sementara masalah Dido dibatasi oleh pantai sebagai batas berbentuk sebuah garis lurus, batas lainnya adalah kurva berbentuk setengah lingkaran agar diperoleh luas terbesar [3].

Selanjutnya, Zenodorus (200–140 SM) menulis sebuah buku yang disebut ”Bangun Isoperimetrik”. Meskipun saat ini tidak ada salinan buku tersebut yang tersisa, Pappus dari Alexandria (290–350 M) menyematkan tulisannya mengenai masalah isoperimetrik kepada ide-ide dari Zenodorus [6, 7]. Pappus memberikan bukti bahwa dengan keliling yang sama, lingkaran memiliki luas yang lebih besar daripada semua segi-n beraturan, dengan cara yang mudah diikuti seperti ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Luas segi-n beraturan sebagai luas dari sebuh segitiga

Jika t merupakan tinggi suatu segitiga, K merupakan keliling segi-n, dan n merupakan jumlah sisi atau titik sudut, maka $t = \frac{K}{2n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$. Akibatnya, semakin banyak jumlah sisi atau titik sudut dari suatu segi-n beraturan, maka dengan keliling yang sama (alas segitiga), maka akan diperoleh luas yang semakin besar. Dengan kata lain, dengan keliling yang sama, lingkaran memiliki luas yang lebih besar dari semua segi-n beraturan. Solusi dari masalah isoperimetrik pada bangun datar dituliskan dalam ketaksamaan $K^2 \geq 4\pi A$, dimana K adalah keliling bangun datar dan A adalah luasnya [8]. Ketaksamaan hanya berlaku untuk lingkaran [9].

Kemajuan lebih lanjut dalam penyelesaian masalah isoperimetrik ditunjukkan oleh Jacob Steiner pada tahun 1838. Steiner menyajikan pembuktian penyelesaian masalah isoperimetrik pada bentuk-bentuk tak beraturan yang tidak dibahas dalam bukti Pappus. Metode sintetik yang dikembangkan oleh Steiner pada alasnya bersifat geometris (bukan aljabar atau analitis) [1]. Dengan kata lain, dia memberikan argumen beralaskan sifat geometris dari bentuk-bentuk tanpa menggunakan teorema-teorema aljabar dan kalkulus, maupun metode geometri analitis. Selanjutnya, matematikawan Jerman Karl Weierstrass mengembangkan bukti yang ketat melalui Teori Kalkulus Beberapa Variabel pada tahun 1870 [10].

Pada bangun ruang, Kazarinoff dalam bukunya memberikan sebuah ilustrasi masalah isoperimetrik untuk bangun ruang dengan rusuk 12, bangun heksahedron dengan rusuk-rusuk yang tidak beraturan. Masalah isoperimetrik yang dicontohkan oleh Kazarinoff adalah dengan volume yang dijaga tetap, konfigurasi sisi-sisi heksahedron apa yang memiliki luas permukaan terkecil [1]. Ilustrasi dari Kazarinoff membuktikan bahwa kubus adalah solusi dari masalah isoperimetrik tersebut.

Masalah isoperimetrik yang dicontohkan oleh Kazarinoff tersebut adalah alternatif dari masalah isoperimetrik yang akan dibahas pada tulisan ini. Perluasan masalah isoperimetrik pada penelitian ini adalah pertanyaan dengan luas permukaan yang diberikan, bentuk bangun ruang apa yang memiliki volume terbesar. Artikel ini membahas pembuktian masalah isoperimetrik pada prisma tegak dan prisma miring dengan alas berbentuk persegi panjang, segitiga siku-siku, dan segi enam dengan cara penerapan ketaksamaan aljabar dan trigonometri yang paling elementer. Selain itu, solusi untuk masalah isoperimetrik juga ditinjau untuk prisma dengan alas berbentuk persegi panjang, segitiga siku-siku, dan segi enam melalui turunan fungsi dua peubah dan metode pengali Lagrange. Pembahasan pada tulisan ini dapat diikuti oleh siapa saja yang telah mempelajari topik identitas trigonometri, dan nilai maksimum minimum pada kalkulus.

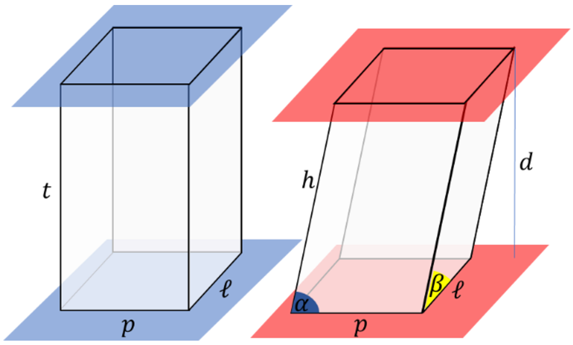
2. Metode

2.1. Konsep Dasar

Artikel ini membahas solusi dari Masalah Isoperimetrik pada bangun ruang, dalam bentuk prisma dengan alas berbentuk persegi panjang, segitiga siku-siku, dan segi enam beraturan. Di mana luas permukaan adalah fungsi kendala, dan volume adalah fungsi tujuan.

Sebuah prisma terbentuk oleh dua segi-n kongruen yang terletak pada bidang sejajar sedemikian rupa sehingga sisi-sisi yang bersesuaian dari kedua segi-n tersebut adalah sejajar, sementara titik sudut yang bersesuaian dari kedua segi-n tersebut dihubungkan oleh garis lurus. Dua segi-n kongruen yang terletak pada bidang sejajar tersebut merupakan alas dan tutup dari prisma. Permukaan yang terbentuk oleh dua sisi segi-n yang bersesuaian dan dua garis lurus yang menghubungkan dua titik sudut yang bersesuaian dari kedua segi-n tersebut adalah muka lateral dari sebuah prisma. Nama sebuah prisma dilihat dari bentuk alasnya [11].

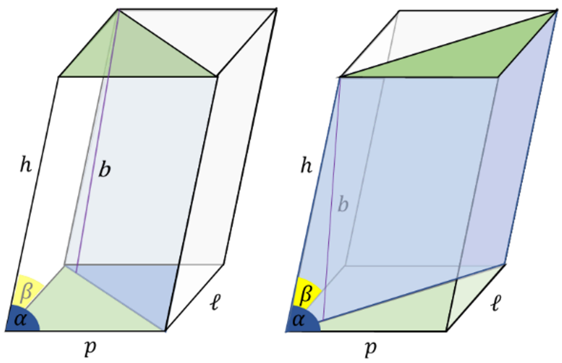
Sebagai permulaan diperlukan penentuan tipe kemiringan yang digunakan untuk membedakan antara prisma tegak dengan prisma miring. Mempertimbangkan sudut antara sisi tegak dan alas, prisma dapat dibagi menjadi prisma tegak dan prisma miring. Prisma tegak adalah prisma di mana semua sisi lateral tegak lurus terhadap alas, sedangkan dalam prisma miring terdapat sisi lateral yang tidak tegak lurus terhadap alas, membentuk sebuah jajargenjang pada beberapa muka lateral. Gambar 2 menunjukkan ilustrasi dari prisma tegak dan prisma miring dengan alas berbentuk persegi panjang.



Gambar 2. Prisma tegak dan miring dengan alas persegi panjang

Gambar 2 bagian kiri adalah prisma tegak dengan alas berbentuk persegi panjang dengan dimensi $p \times l \times t$. Sementara itu, Gambar 2 bagian kanan adalah prisma miring dengan alas berbentuk persegi panjang, di mana sisi-sisi tegak dan sisi alas membentuk sudut yang sama dengan α dan β, sedangkan ukuran sisi alas dan sisi tegaknya adalah $p \times l \times h$.

Perbandingan volume antara prisma tegak dan prisma miring dengan alas segitiga siku-siku, diperoleh dari prisma dengan alas berbentuk persegi panjang yang dipotong menjadi dua bagian yang sama oleh bidang diagonal yang memotong garis diagonal pada alas dan tutupnya. Prisma segitiga hasil perpotongan dari prisma persegi panjang dapat diamati pada Gambar 3.



Gambar 3. Prisma miring segitiga sebagai setengah dari prisma miring persegi panjang

Luas permukaan prisma yang dijaga tetap pada penelitian ini dilambangkan dengan A. Untuk prisma tegak maupun prisma miring luas permukaan merupakan jumlah dari seluruh luas muka prisma [12]. Pada prisma tegak luas sisi lateral dapat diperoleh dengan mengalikan keliling alas dengan tinggi prisma. Sementara pada prisma miring, ditemukan bentuk muka berupa jajargenjang dengan luas dapat diperoleh dari perkalian sisi alas dengan tinggi jajargenjang, atau dari perkalian antara dua sisi berdekatan dengan sinus sudut yang diapitnya [13].

Prinsip Cavalieri digunakan dalam menentukan volume prisma tegak dan prisma miring dalam penelitian ini [12]. Tinjauan nilai maksimum fungsi volume sebagai fungsi tujuan pada penelitian ini dilakukan dengan mengaplikasikan turunan fungsi dua variabel [14] dan metode pengali Lagrange [15]. Pada penelitian ini, digunakan istilah determinan Hessian untuk nilai $v_{pp}(a,b)\, v_{\ell\ell}(a,b) - v_{p\ell}(a,b)\, v_{\ell p}(a,b)$ dari turunan kedua fungsi volume [16]. Sementara pada metode pengali Lagrange, titik stasioner, p, ℓ, dan t pada sisi-sisi prisma, ditinjau pada $\nabla V(p,\ell,t) = \lambda \nabla L(p,\ell,t)$ dan $L(p,\ell,t) = 0$, di mana $V(p,\ell,t)$ adalah fungsi volume, dan $L(p,\ell,t)$ adalah fungsi luas permukaan [15].

2.2. Asumsi Penelitian

Beberapa asumsi yang menjadi panduan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk prisma dengan alas berbentuk persegi panjang, segitiga siku-siku, dan segi enam beraturan, dengan luas permukaan yang sama, prisma tegak memiliki volume yang lebih besar daripada prisma miring;
2. Dengan luas permukaan yang sama, kubus memiliki volume terbesar dari keluarga prisma tegak dengan alas persegi panjang;
3. Dengan luas permukaan yang sama, volume prisma dengan alas segitiga siku-siku yang sama kaki akan lebih besar daripada volume prisma dengan alas segitiga siku-siku yang tidak sama kaki.
4. Dengan luas permukaan yang sama, Prisma segi enam memiliki volume yang lebih besar dari kubus dan prisma dengan alas segitiga siku-siku yang sama kaki.

2.3. Langkah-langkah Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah pembuktian teorema-teorema isoperimetrik menggunakan aljabar, trigonometri, dan kalkulus. Prisma tegak dan prisma miring dengan alas persegi panjang dipilih dalam peninjauan pertama pada masalah isoperimetrik. Masalah isoperimetrik dapat ditinjau melalui langkah-langkah berikut:

1. Dari persamaan luas permukaan prisma miring dan prisma tegak, diperoleh persamaan untuk h dalam p, ℓ, dan t.
2. Berdasarkan prinsip Cavalieri dapat ditentukan persamaan volume prisma miring.
3. Melalui persamaan pada identitas trigonometri ditunjukkan bahwa volume prisma miring kurang dari prisma tegak. Metode lain adalah dengan menunjukkan bahwa faktor pengali yang muncul pada persamaan volume prisma miring adalah kurang dari satu, atau dengan kata lain pembilang dari faktor pengali tersebut kurang dari penyebutnya.
4. Pengujian fungsi volume pada prisma tegak melalui turunan fungsi dua variabel dan determinan Hessian untuk menemukan konfigurasi sisi-sisi prisma yang

menghasilkan volume maksimum. Sebelumnya, fungsi volume dua variabel didapat dengan mensubstitusi t dalam p, ℓ dari persamaan luas permukaan A yang telah ditentukan sebelumnya.

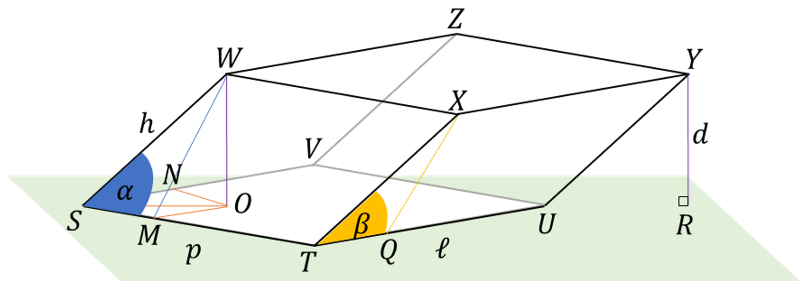
5. Prisma miring dengan alas segitiga siku-siku diperoleh dengan membagi prisma miring alas persegi panjang pada diagonal alasnya, seperti yang telah diperlihatkan pada Gambar 3. Tinggi jajargenjang yang berada di atas sisi miring segitiga, b, diperoleh dengan perbandingan luas segitiga kongruen yang diilustrasikan pada Gambar 5 dan Gambar 6.
6. Penentuan b dimanfaatkan dalam menentukan luas permukaan prisma segitiga. Langkah berikutnya mengulangi langkah 1) sampai 4) untuk kasus prisma dengan alas segitiga siku-siku.
7. Pada prisma miring dengan alas segi enam, ditemui tiga jenis muka bidang lateral. Luas permukaan dari ketiganya memanfaatkan persamaan b yang telah ditinjau pada prisma miring segitiga. Ilustrasi dari tiga jenis permukaan ini dapat diamati pada Gambar 7. Selanjutnya penerapan langkah 1) sampai 4) untuk kasus prisma dengan alas segi enam.

3. Hasil dan Pembahasan

Seperti yang telah disampaikan sebelumnya, tinjauan perluasan masalah isoperimetrik pada bangun ruang dalam artikel ini, disajikan melalui pembuktian lima teorema isoperimetrik pada prisma dengan beberapa alas. Kelima teorema ini dapat digunakan untuk meninjau permasalahan isoperimetrik pada bangun ruang yang lain.

Teorema 1. *Diberikan prisma tegak dan prisma miring dengan alas berbentuk persegi panjang sama besar. Jika luas permukaan kedua prisma tersebut sama, maka volume prisma tegak akan lebih besar daripada volume prisma miring.*

Bukti. Perhatikan Gambar 4. Misalkan luas permukaan kedua prisma tersebut adalah A. p dan ℓ adalah sisi-sisi alas persegi panjang, tinggi dan sisi lateral prisma tegak adalah t, tinggi prisma miring d, dan h adalah sisi lateral prisma miring. α adalah sudut yang dibentuk oleh sisi h dan p. β adalah sudut yang dibentuk oleh sisi h dan ℓ. Akan ditunjukkan bahwa volume prisma miring lebih kecil daripada volume prisma tegak, $pld < plt$.



Gambar 4. Prisma miring dengan alas persegi panjang, dengan kriteria kemiringan pada kedua arah sisi alas

Dalam masalah isoperimetrik, luas permukaan kedua prisma dianggap sama, sehingga kita memiliki persamaan

$$2\left(p\ell+\ell h\sin\beta\ +ph\sin\alpha\ \right)=2\left(p\ell+\ell t+pt\right). \tag{1}$$

Akibatnya, diperoleh

$$h=\frac{t\left(p+\ell\right)}{p\sin\alpha\ +\ell\sin\beta}. \tag{2}$$

Persyaratan untuk sebuah prisma miring adalah $p,\ l,\ t,\ h\ >\ 0$, sedangkan α dan β harus memenuhi

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\ <0. \tag{3}$$

Melalui Teorema Pythagoras, diperoleh

$$d{=}WO{=}\sqrt{SW^2{-}SO^2}{=}h\sqrt{1{-}\left(\cos^2\alpha\ {+}\cos^2\beta\ \right)}. \tag{4}$$

Karena $h>0$, dan $d>0$, maka haruslah $1-\left(\cos^2\alpha\ +\cos^2\beta\ \right)>0$. Akibatnya,

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha\ +\cos^2\beta\ &<1\\ \frac{1}{2}\cos 2\alpha\ +\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\beta\ +\frac{1}{2}&<1\\ \cos\left(\alpha+\beta\right)\cos\left(\alpha-\beta\right)\ &<0.\end{aligned}$$

Oleh karenanya dapat ditentukan α dan β yang memenuhi, yakni untuk sebarang $0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$, dengan $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$, maka nilai $-1<\cos(\alpha+\beta)\ <0$. Sedangkan untuk $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$, nilai $0<\cos(\alpha-\beta)\ <1$. Dari keduanya, $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\ +1<1$. Dengan demikian

$$\cos^2\alpha\ +\cos^2\beta\ <1. \tag{5}$$

Akibatnya diperoleh volume prisma miring

$$\begin{aligned}V=p\ell d&=p\ell h\sqrt{1-\cos^2\alpha\ -\cos^2\beta}\\ &=p\ell t\left(\frac{\left(p+\ell\right)}{p\sin\alpha\ +\ell\sin\beta}\right)\sqrt{1-\cos^2\alpha\ -\cos^2\beta}\,.\end{aligned}$$

Melalui aturan distributif, diperoleh

$$\begin{aligned} V &= p\ell t \left(\frac{(p+\ell)}{\frac{p \sin \alpha}{\sqrt{1-\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}} + \frac{\ell \sin \beta}{\sqrt{1-\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha}}} \right) \\ &= p\ell t \left(\frac{(p+\ell)}{\frac{p \sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta}} + \frac{\ell \sin \beta}{\sqrt{\sin^2 \beta - \cos^2 \alpha}}} \right) \\ &= p\ell t \left(\frac{(p+\ell)}{\frac{p}{\sqrt{1-\frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha}}} + \frac{\ell}{\sqrt{1-\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \beta}}}} \right) \end{aligned}$$

Karena $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta < 1$, maka $\frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha} < 1$ dan $\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \beta} < 1$. Dengan demikian diperoleh

$$p\ell t \left(\frac{(p+\ell)}{\frac{p}{\sqrt{1-\frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha}}} + \frac{\ell}{\sqrt{1-\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \beta}}}} \right) < p\ell t \left(\frac{(p+\ell)}{\frac{p}{\sqrt{1}} + \frac{\ell}{\sqrt{1}}} \right). \tag{6}$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa

$$p\ell t \left(\frac{(p+\ell)}{p \sin \alpha + \ell \sin \beta} \right) \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} < p\ell t. \tag{7}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa dengan alas persegi panjang yang sama dan luas permukaan yang sama, volume prisma miring akan kurang dari volume prisma tegak. □

Telah diketahui bahwa prisma tegak akan memberikan volume yang lebih besar daripada prisma miring, jika luas permukaan keduanya sama dan bentuk alas keduanya sama-sama persegi panjang. Prisma tegak persegi panjang biasa disebut juga sebagai balok. Selanjutnya akan dikaji ukuran sisi-sisi balok agar diperoleh volume maksimum yang dinyatakan dengan Teorema 2.

Teorema 2. *Diberikan prisma tegak dengan alas persegi panjang, dengan suatu luas permukaan tertentu. Volume prisma akan mencapai maksimum jika panjang, lebar, dan tingginya adalah sama.*

Bukti. Diberikan prisma dengan alas persegi panjang dengan sisi panjang p, lebar ℓ, dan tinggi t, di mana p, ℓ, t merupakan anggota bilangan real positif. Melalui definisi, diperoleh persamaan volume $V = p\ell t$, dan luas permukaan $A = 2(p\ell + pt + \ell t)$.

Selanjutnya akan dilakukan penyederhanaan pada persamaan volume, di mana sebelumnya mengandung tiga peubah melalui substitusi disederhanakan menjadi dua peubah. Berdasarkan persamaan pada luas permukaan, diperoleh persamaan panjang rusuk tegak $t = \frac{\frac{A}{2} - p\ell}{p+\ell}$. Melalui substitusi, diperoleh rumus volume

$$V = p\ell\left(\frac{\frac{A}{2} - p\ell}{p+\ell}\right) = \frac{\frac{A}{2}p\ell - p^2\ell^2}{p+\ell}. \tag{8}$$

Melaui turunan fungsi dua peubah akan ditinjau nilai p, ℓ, dan t yang akan memberikan volume maksimum pada balok dengan luas permukaan A tersebut.

Turunan terhadap $p, v_p = 0$, menghasilkan

$$\frac{\left(\frac{A}{2}\ell - 2p\ell^2\right)(p+\ell) - \left(\frac{A}{2}p\ell - p^2\ell^2\right).1}{(p+\ell)^2} = 0,$$

sehingga diperoleh

$$\ell = \frac{\frac{A}{2} - p^2}{2p}. \tag{9}$$

Turunan terhadap $\ell, v_\ell = 0$,menghasilkan

$$\frac{\left(\frac{A}{2}p - 2p^2\ell\right)(p+\ell) - \left(\frac{A}{2}p\ell - p^2\ell^2\right).1}{(p+\ell)^2} = 0,$$

sehingga diperoleh

$$p = \frac{\frac{A}{2} - \ell^2}{2\ell}. \tag{10}$$

Substitusikan persamaan (9) pada persamaan (10) diperoleh

$$\left(p^2 + \frac{A}{6}\right)^2 = \frac{4A^2}{36}. \tag{11}$$

Dengan demikian, solusi real positif yang memenuhi adalah $p = \ell = \sqrt{\frac{A}{6}}$.

Penentuan jenis titik stasioner untuk persamaan dua peubah dilakukan dengan menggunakan nilai diskriminan D yang merupakan determinan Hessian sebagai berikut:

$$D = \begin{vmatrix} v_{pp}(a,b) & v_{p\ell}(a,b) \\ v_{\ell p}(a,b) & v_{\ell\ell}(a,b) \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Jika $D > 0$ dan $v_{pp}(a,b) > 0$, maka $v(a,b)$ adalah nilai minimum. Jika $D > 0$ dan $v_{pp}(a,b) < 0$, maka $v(a,b)$ adalah nilai maksimum. Jika $D < 0$, maka (a,b) adalah titik pelana. Berikut ini adalah daftar turunan kedua fungsi V terhadap p dan ℓ:

$$
\begin{aligned}
v_{pp} &= \frac{-2\ell^2\left(\ell^2+\frac{A}{2}\right)}{(p+\ell)^3} \\
v_{p\ell} &= \frac{p\ell\left(-2p^2-6p\ell-2\ell^2+A\right)}{(p+\ell)^3} \\
v_{\ell\ell} &= \frac{-2p^2\left(p^2+\frac{A}{2}\right)}{(p+\ell)^3} \\
v_{\ell p} &= \frac{p\ell\left(-2p^2-6p\ell-2\ell^2+A\right)}{(p+\ell)^3}.
\end{aligned}
$$

Untuk $p=\sqrt{\frac{A}{6}}$ dan $\ell=\sqrt{\frac{A}{6}}$, diperoleh nilai

$$
D=\begin{vmatrix} v_{pp}(a,b) & v_{p\ell}(a,b) \\ v_{\ell p}(a,b) & v_{\ell\ell}(a,b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sqrt{\frac{A}{6}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{6}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{6}} & -\sqrt{\frac{A}{6}} \end{vmatrix} = \frac{A}{6}-\frac{A}{24}=\frac{3A}{24}=\frac{A}{8}
$$

Karena $A>0$, akibatnya $\frac{A}{8}>0$, dapat disimpulkan bahwa $D>0$. Karena $D>0$ dan $v_{pp}\left(\sqrt{\frac{A}{6}},\sqrt{\frac{A}{6}}\right)<0$, dapat disimpulkan bahwa $\left(\sqrt{\frac{A}{6}},\sqrt{\frac{A}{6}}\right)$ adalah titik maksimum lokal. Akibatnya dapat ditentukan nilai t, yakni

$$
t=\frac{\frac{A}{2}-p\ell}{p+\ell}=\frac{\frac{A}{2}-\sqrt{\frac{A}{6}}\sqrt{\frac{A}{6}}}{\sqrt{\frac{A}{6}}+\sqrt{\frac{A}{6}}}=\frac{\frac{A}{2}-\frac{A}{6}}{2\sqrt{\frac{A}{6}}}=\frac{\frac{A}{2}-\frac{A}{6}}{2\sqrt{\frac{A}{6}}}=\frac{\frac{2A}{6}}{2\sqrt{\frac{A}{6}}}=\frac{\frac{A}{6}}{\sqrt{\frac{A}{6}}}=\sqrt{\frac{A}{6}}.
$$

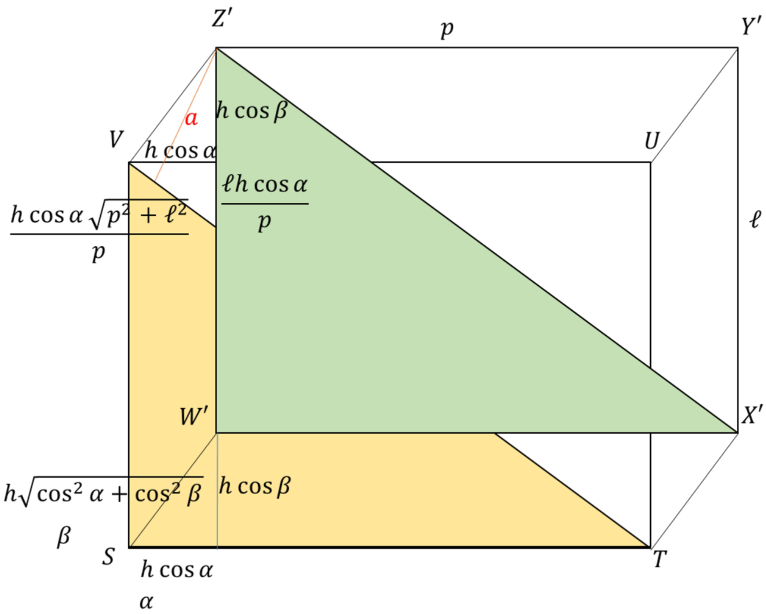
Dari sini diperoleh bahwa $p=\ell=t=\sqrt{\frac{A}{6}}$. Dapat disimpulkan bahwa agar diperoleh volume maksimum, prisma dengan alas persegi panjang haruslah berupa kubus.

□

Permasalahan volume prisma miring dan tegak dengan alas segitiga, dimana luas permukaan keduanya adalah sama, dinyatakan dalam Teorema 3.

Teorema 3. *Diberikan prisma tegak dan prisma miring dengan alas berbentuk segitiga siku-siku sama besar. Jika luas permukaan kedua prisma tersebut sama, maka volume prisma tegak akan lebih besar daripada volume prisma miring.*

Bukti. Untuk melakukan pembuktian bahwa prisma miring segitiga akan lebih kecil dari prisma tegak segitiga, terlebih dahulu perlu ditentukan tinggi bidang yang dibatasi sisi miring segitiga di alas dan tutup serta dua sisi lateralnya. Misalkan tinggi yang dimaksud adalah b. Namun, untuk menentukan b harus ditentukan dulu proyeksi garis b pada bidang alas, misalkan a. Lebih jelas, perhatikan Gambar 5 sebagai ilustrasi dari proyeksi bidang tutup pada bidang alas.



Gambar 5. Proyeksi bidang tutup pada bidang alas prisma miring segitiga

Dengan formula luas segitiga diperoleh

$$\frac{1}{2}\left(\frac{h\cos\alpha\,\sqrt{p^2+\ell^2}}{p}\right)a=\frac{1}{2}\left(h\cos\beta+\frac{\ell h\cos\alpha}{p}\right)h\cos\alpha\,,$$

dan selanjutnya diperoleh

$$a=\frac{h\,(p\cos\beta+\ell\cos\alpha)}{\sqrt{p^2+\ell^2}}. \tag{13}$$

Selanjutnya, dapat ditentukan nilai b sebagai tinggi dari bidang lateral pada sisi miring segitiga menggunakan Teorema Pythagoras antara tinggi prisma d dengan proyeksi garis b terhadap bidang alas yakni a,

$$\begin{aligned} b^2 &= d^2+a^2\\ b^2 &= h^2\left(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta\right)+\frac{h^2\,(p\cos\beta+\ell\cos\alpha)^2}{p^2+\ell^2}. \end{aligned}$$

didapat,

$$b=\frac{h}{\sqrt{p^2+\ell^2}}\sqrt{p^2+\ell^2-(p\cos\alpha-\ell\cos\beta)^2}. \tag{14}$$

Tinjau kesamaan luas permukaan prisma tegak segitiga dan prisma miring segitiga pada kasus isoperimetrik, yaitu

$$2.\frac{1}{2}.p\ell+\left(p+\ell+\sqrt{p^2+\ell^2}\right)t=2.\frac{1}{2}.p\ell+ph\sin\alpha+\ell h\sin\beta+\sqrt{p^2+\ell^2}\,.b.$$

diperoleh,

$$h = \frac{\left(p + \ell + \sqrt{p^2 + \ell^2}\right) t}{p \sin\alpha + \ell \sin\beta + \sqrt{p^2 + \ell^2 - (p\cos\alpha - \ell\cos\beta)^2}}. \tag{15}$$

Substitusi persamaan h ke dalam persamaan volume prisma miring segitiga, diperoleh

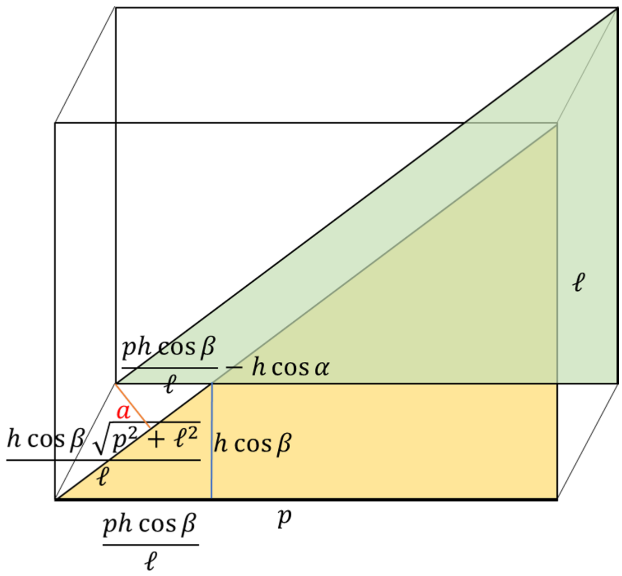
$$\begin{aligned}
v &= \frac{1}{2} p\ell t \frac{\left(p + \ell + \sqrt{p^2 + \ell^2}\right)\left(\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}\right)}{p\sin\alpha + \ell\sin\beta + \sqrt{p^2 + \ell^2 - p^2\cos^2\alpha - \ell^2\cos^2\beta + 2p\ell\cos\alpha\cos\beta}} \\
&< \frac{1}{2} p\ell t \frac{\left(p + \ell + \sqrt{p^2 + \ell^2}\right)\left(\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}\right)}{p\sin\alpha + \ell\sin\beta + \sqrt{p^2 + \ell^2 - p^2\cos^2\alpha - \ell^2\cos^2\beta}} \\
&= \frac{1}{2} p\ell t \frac{p + \ell + \sqrt{p^2 + \ell^2}}{\frac{p}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\alpha}}} + \frac{\ell}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta}}} + \sqrt{\frac{p^2}{1 - \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\alpha}} + \frac{\ell^2}{1 - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta}}}}.
\end{aligned}$$

Karena untuk sebarang $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$, dengan $\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \pi$, maka nilai $-1 < \cos(\alpha + \beta) < 0$. Sementara, untuk $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$, nilai $0 < \cos(\alpha - \beta) < 1$. Akibatnya $-1 < \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) < 0$, sehingga $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + 1 < 1$. Melalui penjabaran rumus jumlah dan selisih sudut pada cosinus diperoleh $\cos^2\alpha + \cos^2\beta < 1$. Karena $\cos^2\alpha + \cos^2\beta < 1$ dan rumus identitas trigonometri, diperoleh $\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\alpha} < 1$ dan $\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta} < 1$. Dengan demikian

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} p\ell t \frac{p + \ell + \sqrt{p^2 + \ell^2}}{\frac{p}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\alpha}}} + \frac{\ell}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta}}} + \sqrt{\frac{p^2}{1 - \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\alpha}} + \frac{\ell^2}{1 - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta}}}} &< \frac{1}{2} p\ell t \frac{p + \ell + \sqrt{p^2 + \ell^2}}{\frac{p}{\sqrt{1}} + \frac{\ell}{\sqrt{1}} + \sqrt{\frac{p^2}{1} + \frac{\ell^2}{1}}} \\
&= \frac{1}{2} p\ell t \frac{p + \ell + \sqrt{p^2 + \ell^2}}{p + \ell + \sqrt{p^2 + \ell^2}} \\
&= \frac{1}{2} p\ell t.
\end{aligned}$$

Dapat disimpulkan bahwa $\frac{1}{2} p\ell d < \frac{1}{2} p\ell t$. Dengan kata lain volume prisma miring segitiga dengan $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$, akan kurang dari volume prisma tegak segitiga.

Selanjutnya dapat dilakukan pembuktian yang sama untuk kasus perpotongan pada bidang diagnal lainnya. Perhatikan Gambar 6 sebagai ilustrasi dari proyeksi bidang tutup pada bidang alas.



Gambar 6. Proyeksi bidang tutup pada bidang alas prisma miring segitiga untuk perpotongan pada diagonal lainnya

Dengan perbandingan luas segitiga kongruen diperoleh nilai a sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\frac{h\cos\beta\sqrt{p^2+\ell^2}}{\ell}\right)a &= \frac{1}{2}\left(\frac{ph\cos\beta}{\ell} - h\cos\alpha\right)h\cos\beta a \\ a &= \frac{h\left(p\cos\beta - \ell\cos\alpha\right)}{\sqrt{p^2+\ell^2}}. \end{aligned} \tag{16}$$

Selanjutnya, dapat ditentukan nilai b sebagai tinggi dari bidang lateral pada sisi miring segitiga menggunakan Teorema Pythagoras antara tinggi prisma d dengan proyeksi garis b terhadap bidang alas yakni a,

$$\begin{aligned} b^2 &= d^2 + a^2b^2 \\ &= h^2\left(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta\right) + \frac{h^2\left(p\cos\beta - \ell\cos\alpha\right)^2}{p^2+\ell^2} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh,

$$b = \frac{h}{\sqrt{p^2+\ell^2}}\sqrt{p^2+\ell^2-\left(p\cos\alpha+\ell\cos\beta\right)^2}. \tag{17}$$

Tinjau kesamaan luas permukaan prisma tegak segitiga dan prisma miring segitiga pada kasus isoperimetrik, yaitu

$$2.\frac{1}{2}.p\ell + \left(p + \ell + \sqrt{p^2+\ell^2}\right)t = 2.\frac{1}{2}.p\ell + ph\sin\alpha + \ell h\sin\beta + \sqrt{p^2+\ell^2}\,.b$$

diperoleh,

$$h = \frac{\left(p + \ell + \sqrt{p^2 + \ell^2}\right) t}{p \sin \alpha + \ell \sin \beta + \sqrt{p^2 + \ell^2 - (p \cos \alpha + \ell \cos \beta)^2}} \tag{18}$$

Substitusi persamaan h ke dalam persamaan volume prisma miring segitiga menghasilkan

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2} p\ell d \\ &= \frac{1}{2} p\ell h \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} \\ &= \frac{1}{2} p\ell \frac{\left(p + \ell + \sqrt{p^2 + \ell^2}\right) t}{p \sin \alpha + \ell \sin \beta + \sqrt{p^2 + \ell^2 - (p \cos \alpha + \ell \cos \beta)^2}} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} \\ &= \frac{1}{2} p\ell t \frac{\left(p + \ell + \sqrt{p^2 + \ell^2}\right)\left(\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}\right)}{p \sin \alpha + \ell \sin \beta + \sqrt{p^2 + \ell^{\,2} - p^2 \cos^2 \alpha - \ell^2 \cos^2 \beta - 2p\ell \cos \alpha \cos \beta}}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk menunjukkan bahwa

$$\frac{1}{2} p\ell t \frac{\left(p + \ell + \sqrt{p^2 + \ell^2}\right)\left(\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}\right)}{p \sin \alpha + \ell \sin \beta + \sqrt{p^2 + \ell^{\,2} - p^2 \cos^2 \alpha - \ell^2 \cos^2 \beta - 2p\ell \cos \alpha \cos \beta}} < \frac{1}{2} p\ell t,$$

cukup diperlihatkan bahwa

$$\begin{aligned} &\left(p + \ell + \sqrt{p^2 + \ell^2}\right)\left(\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}\right) \\ &\qquad < p\sin\alpha + \ell\sin\beta + \sqrt{p^2 + \ell^2 - p^2\cos^2\alpha - \ell^2\cos^2\beta - 2p\ell\cos\alpha\cos\beta}. \end{aligned}$$

Tinjau $\left(p + \ell + \sqrt{p^2 + \ell^2}\right) \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}$. Melalui sifat distribusi, diperoleh

$$\begin{aligned} &p\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta} + \ell\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta} + \sqrt{(p^2 + \ell^2)(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta)} \\ &\qquad = p\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta} + \ell\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta} + \\ &\qquad\quad \sqrt{p^2 + \ell^2 - p^2\cos^2\alpha - \ell^2\cos^2\alpha - p^2\cos^2\beta - \ell^2\cos^2\beta}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, melalui rumus identitas trigonometri diperoleh

$$
\begin{aligned}
&= p\sqrt{\sin^2\alpha \; - \cos^2\beta} \; + \ell\sqrt{\sin^2\beta \; - \cos^2\alpha} \; + \\
&\quad \sqrt{p^2 + \ell^2 - p^2\cos^2\alpha \; - \ell^2\cos^2\alpha \; - p^2\cos^2\beta \; - \ell^2\cos^2\beta} \\
&< p\sqrt{\sin^2\alpha} \; + \ell\sqrt{\sin^2\beta} \; + \sqrt{p^2 + \ell^2 - p^2\cos^2\alpha \; - \ell^2\cos^2\alpha \; - p^2\cos^2\beta \; - \ell^2\cos^2\beta} \\
&= p\sqrt{\sin^2\alpha} \; + \ell\sqrt{\sin^2\beta} \; + \sqrt{p^2 + \ell^2 - p^2\cos^2\alpha \; - \ell^2\cos^2\beta \; - (\ell\cos^2\alpha \; + p\cos^2\beta \;)}.
\end{aligned}
$$

Karena untuk $p, \ell > 0$ dan $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$, $(\ell\cos\alpha \; - p\cos\beta \;)^2 > 0$, maka

$$
\ell^2 \cos^2 \alpha + p^2 \cos^2 \beta > 2p\ell \cos \alpha\cos \beta. \tag{19}
$$

Akibatnya,

$$
\begin{aligned}
&p\sqrt{\sin^2 \alpha}+\ell \sqrt{\sin^2 \beta} \; + \sqrt{p^2 + \ell^2 - p^2\cos^2\alpha \; - \ell^2\cos^2\beta \; - (\ell^2\cos^2\alpha \; + p^2\cos^2\beta \;)} \\
&\qquad < p \sin \alpha + \ell \sin \beta + \sqrt{p^2 + \ell^2 - p^2 \cos^2 \alpha - \ell^2 \cos^2 \beta - 2p\ell \cos \alpha \cos \beta}.
\end{aligned}
$$

Dengan demikian terbukti bahwa

$$
\begin{aligned}
&\left(p + \ell + \sqrt{p^2 + \ell^2}\right)\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} \\
&\qquad < p \sin \alpha + \ell \sin \beta + \sqrt{p^2 + \ell^2 - p^2 \cos^2 \alpha - \ell^2 \cos^2 \beta - 2p\ell \cos \alpha \cos \beta}.
\end{aligned}
$$

sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$
\frac{1}{2}p\ell t\frac{\left(p + \ell + \sqrt{p^2 + \ell^2}\right)\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \; - \cos^2 \beta}}{p \sin \alpha \; + \ell \sin \beta \; + \sqrt{p^2 + \ell^2 - p^2 \cos^2 \alpha \; - \ell^2 \cos^2 \beta \; - 2p\ell \cos \alpha \cos \beta}} < \frac{1}{2}p\ell t.
$$

Dengan kata lain, terbukti bahwa volume prisma miring segitiga di hadapan sudut $\pi - \alpha$, dan β, dengan $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$, akan kurang dari volume prisma tegak segitiga.

□

Telah diketahui bahwa prisma segitiga tegak akan memberikan volume yang lebih besar daripada prisma segitiga miring, jika luas permukaan keduanya sama dan bentuk alas keduanya sama. Selanjutnya, dikaji ukuran sisi-sisi prisma tegak segitiga agar diperoleh volume maksimum yang dinyatakan dengan Teorema 4.

Teorema 4. *Diberikan prisma tegak dengan alas segitiga siku-siku, dengan suatu luas permukaan tertentu. Volume prisma akan mencapai maksimum jika panjang, lebar alasnya adalah sama.*

Bukti. Ambil sebarang prisma tegak segitiga dengan alas berupa segitiga siku-siku dengan ukuran sisi yang saling tegak adalah p, ℓ, sementara jarak antara kedua bidang segitiganya adalah t, selanjutnya kita sebut t sebagai ketebalan prisma. Misalkan ruas permukaan prisma segitiga tegak adalah A, dan A dapat dapat dituliskan sebagai persamaan,

$$2.\frac{1}{2}\,p\ell + \left(p + \ell + \sqrt{p^2 + \ell^2}\right) t = A.$$

Akibatnya, diperoleh

$$p\ell + \left(p + \ell + \sqrt{p^2 + \ell^2}\right) t - A = 0. \tag{20}$$

Selanjutnya, dapat ditentukan fungsi volume prisma tersebut dalam variabel p dan ℓ yaitu

$$V = \frac{1}{2}p\ell t. \tag{21}$$

Dari fungsi volume tersebut, akan dicari nilai p, ℓ, dan t yang membuat volume maksimum. Karena pada persoalan ini kita dapat menempatkan $L_{(p,\ell,\,t)} = p\ell + \left(p + \ell + \sqrt{p^2 + \ell^2}\right) t - A$ sebagai suatu fungsi kendala, dan $V_{(p,\ell,\,t)} = \frac{1}{2}p\ell t$ sebagai fungsi tujuan, maka kita dapat menggunakan metode pengali Lagrange untuk meninjau titik stasioner, $p, \ell,$ dan t yang memenuhi $\nabla V\,(p,\,\ell,\,t) = \lambda \nabla L(p,\,\ell,\,t)$ dan $L\,(p,\,\ell,\,t) = 0$.

$$\begin{aligned} \nabla V_{(p,\ell,t)} = \lambda \nabla L_{(p,\ell,t)} &\iff v_p = \lambda l_p \\ \frac{1}{2}\ell t = \lambda\left(\ell + t + \frac{pt}{\sqrt{p^2+\ell^2}}\right) &\iff \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{t} + \frac{1}{\ell} + \frac{p}{\ell\sqrt{p^2+\ell^2}} \end{aligned} \tag{22}$$

$$v_\ell = \lambda l_\ell \iff \frac{1}{2}pt = \lambda\left(p + t + \frac{\ell t}{\sqrt{p^2+\ell^2}}\right) \iff \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{t} + \frac{1}{p} + \frac{\ell}{p\sqrt{p^2+\ell^2}} \tag{23}$$

$$v_t = \lambda l_t \iff \frac{1}{2}p\ell = \lambda\left(p + \ell + \sqrt{p^2+\ell^2}\right) \iff \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{\ell} + \frac{1}{p} + \frac{\sqrt{p^2+\ell^2}}{p\ell}. \tag{24}$$

Dari persamaan (22) dan persamaan (23), diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} + \frac{1}{p} + \frac{\ell}{p\sqrt{p^2+\ell^2}} &= \frac{1}{t} + \frac{1}{\ell} + \frac{p}{\ell\sqrt{p^2+\ell^2}} \\ \frac{1}{p}\left(1 + \frac{\ell}{\sqrt{p^2+\ell^2}}\right) &= \frac{1}{\ell}\left(1 + \frac{p}{\sqrt{p^2+\ell^2}}\right) \\ \ell - p &= 0 \\ \ell &= p. \end{aligned} \tag{25}$$

Dari persamaan (22) dan persamaan (24), diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}+\frac{1}{\ell}+\frac{p}{\ell\sqrt{p^2+\ell^2}} &= \frac{1}{\ell}+\frac{1}{p}+\frac{\sqrt{p^2+\ell^2}}{p\ell} \\
\frac{1}{t} &= \frac{1}{p}+\frac{\sqrt{p^2+\ell^2}}{p\ell}-\frac{p}{\ell\sqrt{p^2+\ell^2}}.
\end{aligned}$$

Substitusi $\ell = p$, menghasilkan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} &= \frac{1}{p}+\frac{\sqrt{p^2+p^2}}{pp}-\frac{p}{p\sqrt{p^2+p^2}} \\
&= \frac{1}{p}+\frac{\sqrt{2p^2}}{p^2}-\frac{1}{\sqrt{2p^2}} \\
&= \frac{1}{p}+\frac{\sqrt{2}}{p}-\frac{1}{p\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}+2-1}{p\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}+1}{p\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$t = p\left(2-\sqrt{2}\right). \tag{26}$$

Karena $L_{(p,\ell,\ t)} = 0$, maka

$$p\ell+\left(p+\ell+\sqrt{p^2+\ell^2}\right)t-A=0. \tag{27}$$

Substitusi persamaan (25) dan (26) ke persamaan (27), diperoleh

$$\begin{aligned}
pp+\left(p+p+\sqrt{p^2+p^2}\right)p\left(2-\sqrt{2}\right)-A &= 0 \\
p^2+\left(2p+\sqrt{2p^2}\right)p\left(2-\sqrt{2}\right)-A &= 0 \\
p^2+p\left(2+\sqrt{2}\right)p\left(2-\sqrt{2}\right)-A &= 0 \\
p^2+p^2\left(4-2\right)-A &= 0 \\
3p^2-A &= 0 \\
p &= \pm\sqrt{\frac{A}{3}}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Karena $p > 0$, maka haruslah $p = \sqrt{\frac{A}{3}}$, akibatnya $\ell = \sqrt{\frac{A}{3}}$ dan $t = \sqrt{\frac{A}{3}}\left(2-\sqrt{2}\right)$. Dengan demikian diperoleh

$$V = \frac{A}{6}\sqrt{\frac{A}{3}}\left(2-\sqrt{2}\right). \tag{29}$$

Metode Lagrange tidak mengkaji jenis dari titik stasioner yang didapat. Percobaan berikut ini akan melengkapi hasil yang didapat pada pembuktian di atas.

Misalkan $\ell = mp$, dengan m adalah faktor pengali. Untuk $p = \sqrt{\frac{A}{3}}$ akan ditunjukkan dengan turunan bahwa volume maksimum akan dicapai pada saat $m = 1$.

Karena $\ell = mp$ dan $A = 3p^2$ maka diperoleh persamaan luas permukaan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} pmp + \left(p + mp + \sqrt{p^2 + m^2p^2}\right) t &= 3p^2 \\ mp^2 + p\left(1 + m + \sqrt{1+m^2}\right) t &= 3p^2. \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh persamaan t dalam p dan m, yaitu

$$\begin{aligned} t &= \frac{3p^2 - mp^2}{p\left(1+m+\sqrt{1+m^2}\right)} \\ &= \frac{p\left(3-m\right)}{1+m+\sqrt{1+m^2}} \\ &= \frac{p\left(3-m\right)\left(1+m-\sqrt{1+m^2}\right)}{2m}. \end{aligned}$$

sehingga diperoleh persamaan volume

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}p\ell t \\ &= \frac{1}{2}pmp\frac{p\left(3-m\right)\left(1+m-\sqrt{1+m^2}\right)}{2m} \\ &= \frac{1}{4}p^3\left(3-m\right)\left(1+m-\sqrt{1+m^2}\right). \end{aligned}$$

Tinjau turunan pertama V terhadap m, yakni

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dm} &= \frac{1}{4}p^3\left(-1\left(1+m-\sqrt{1+m^2}\right) + \left(3-m\right)\left(1-\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}p^3\left(m-1\right)\left(-2+\frac{2m-1}{\sqrt{1+m^2}}\right). \end{aligned}$$

Selanjutnya untuk menemukan titik stasioner, $\frac{dV}{dm} = 0$. Akibatnya, diperoleh $m = 1$.

Perhatikan bentuk

$$-2+\frac{2m-1}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{-2\sqrt{1+m^2}+2m-1}{\sqrt{1+m^2}}. \tag{30}$$

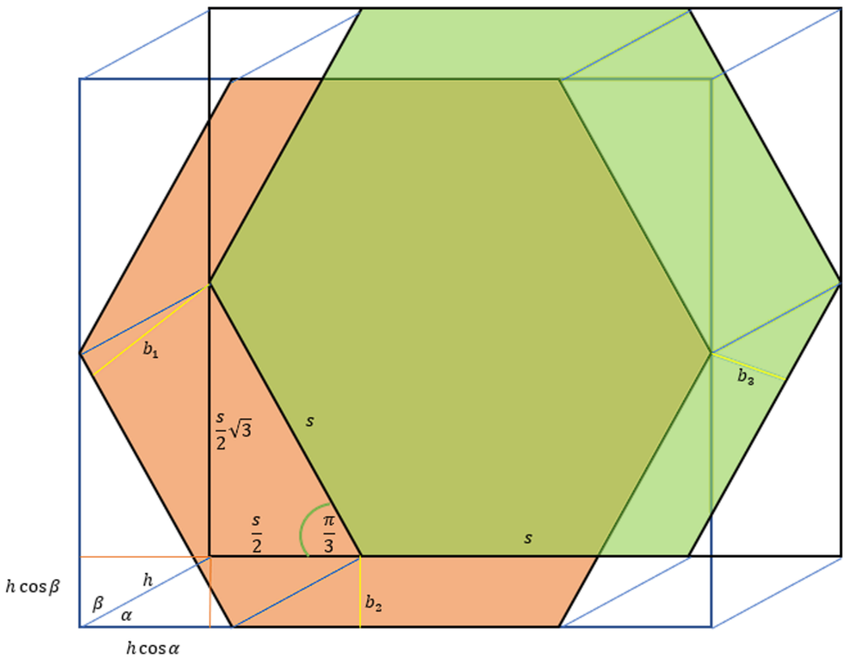
Karena $\sqrt{1+m^2}>0$, dan $-2\sqrt{1+m^2}+2m-1<-2\sqrt{m^2}+2m-1<-1$, akibatnya $-2+\frac{2m-1}{\sqrt{1+m^2}}$ definit negatif, maka untuk $0<m<1$, $\frac{dV}{dm}>0$, sedangkan untuk $m>1$, $\frac{dV}{dm}<0$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $m=1$ adalah titik maksimum.

□

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa volume prisma tegak segi enam lebih besar dari volume prisma miring segi enam jika luas permukaan keduanya sama. Hal tersebut dinyatakan pada Teorema 5.

Teorema 5. *Volume prisma tegak segi enam akan lebih besar daripada volume prisma miring segi enam, jika luas permukaan keduanya adalah sama.*

Bukti. Pembuktian teorema ini, dapat dilakukan dengan memanfaatkan persamaan yang diperoleh pada pembahasan prisma segitiga, khususnya pada persamaan (14) dan (17) mengenai tinggi bidang jajargenjang yang berada pada sisi miring segitiga, alas dan tutup prisma. Hal ini dapat dilakukan dengan cara meletakkan prisma segi enam ke dalam prisma persegipanjang, sehingga terbentuk bagian-bagian yang merupakan prisma segitiga. Penempatan yang dimaksud dapat diamati pada Gambar 7.



Gambar 7. Tampak atas prisma miring segi enam beraturan yang menyinggung prisma miring persegi panjang di dalam

Pada Gambar 7 dapat diamati bahwa memiringkan prisma segi enam mengakibatkan terbentuknya tiga jenis muka lateral. Jenis pertama merupakan muka yang berada di hadapan dua sudut lancip, kedua merupakan muka yang berada pada bidang yang sama dengan salah satu sudut, ketiga merupakan muka yang berada di hadapan satu sudut lancip dan satu sudut tumpul. Ukuran tinggi ketiga muka lateral, dapat ditentukan dengan persamaan yang diperoleh pada pembahasan prisma segitiga sebagai berikut.

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{h}{\sqrt{p^2+\ell^2}}\sqrt{p^2+\ell^2-(p\cos\alpha-\ell\cos\beta)^2} \\ b_2 &= h\sin\alpha \\ b_3 &= \frac{h}{\sqrt{p^2+\ell^2}}\sqrt{p^2+\ell^2-(p\cos\alpha+\ell\cos\beta)^2}. \end{aligned}$$

Jika sisi segi enam adalah s, dari Gambar 7 terlihat bahwa panjang sisi p yang sebidang dengan α sama dengan $\frac{s}{2}$. Sedangkan panjang sisi ℓ yang sebidang dengan β sama dengan $\frac{s}{2}\sqrt{3}$. Oleh karenanya, ketiga persamaan b_1, b_2, dan b_3 dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{h}{s}\sqrt{s^2-\left(\frac{s}{2}\cos\alpha-\frac{s}{2}\sqrt{3}\cos\beta\right)^2} = h\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\beta\right)^2} \\ b_2 &= h\sin\alpha \\ b_3 &= \frac{h}{s}\sqrt{s^2-\left(\frac{s}{2}\cos\alpha+\frac{s}{2}\sqrt{3}\cos\beta\right)^2} = h\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\beta\right)^2}. \end{aligned}$$

Mempertahankan luas permukaan prisma tegak terhadap prisma miring, diperoleh persamaan

$$2sh\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\beta\right)^2}+2sh\sin\alpha+2sh\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\beta\right)^2}=6st$$

sehingga diperoleh,

$$h=\frac{3t}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\beta\right)^2}+\sin\alpha+\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\beta\right)^2}}. \tag{31}$$

Substitusi ke persamaan volume prisma miring segi enam, diperoleh

$$\begin{aligned} V_{\text{miring}} &= 6\cdot\frac{1}{2}\cdot s^2\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot d \\ &= 3\cdot s^2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot h\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{3}\cdot s^2\cdot\frac{3t}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\beta\right)^2}+\sin\alpha+\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\beta\right)^2}} \end{aligned}$$

$$\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}$$

$$V_{\text{miring}}=\frac{3}{2}\sqrt{3}\cdot s^2\cdot t\frac{3}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\beta\right)^2}+\sin\alpha+\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\beta\right)^2}}$$

$$\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}$$

Untuk membuktikan volume prisma miring segi enam lebih kecil dari prisma tegak segi enam, cukup dengan menunjukkan bahwa

$$3\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}<\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\beta\right)^2}+\sin\alpha+\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\beta\right)^2}.$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}3\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}&=\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}+\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}+\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}\\&=\sqrt{1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)}+\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}+\sqrt{1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)}\end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha+\cos^2\beta&>\frac{1}{2}\cos^2\alpha+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos^2\beta>\frac{1}{2}\cos^2\alpha+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos^2\beta-\frac{2}{4}\sqrt{3}\cos\alpha\cos\beta\\&=\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\beta\right)^2,\end{aligned}$$

maka

$$\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}<\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\beta\right)^2}. \tag{32}$$

Untuk suku kedua jelas bahwa

$$\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}<\sqrt{\sin^2\alpha}=\sin\alpha\,. \tag{33}$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\frac{1}{4}\cos^2\alpha+\frac{3}{4}\cos^2\beta+\frac{3}{4}\cos^2\alpha+\frac{1}{4}\cos^2\beta \tag{34}$$

Karena

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos\beta\right)^2>0,$$

maka

$$\frac{3}{4}\cos^2\alpha+\frac{1}{4}\cos^2\beta>\frac{2}{4}\sqrt{3}\cos\alpha\cos\beta, \tag{35}$$

sehingga,

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta>\frac{1}{4}\cos^2\alpha+\frac{3}{4}\cos^2\beta+\frac{2}{4}\sqrt{3}\cos\alpha\cos\beta=\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\beta\right)^2.$$

Dengan demikian

$$\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}<\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\beta\right)^2}. \tag{36}$$

Dari ketiganya diperoleh

$$3\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha\ -\cos^2\beta}\ <\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\cos\alpha\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\beta\right)^2}+\sin\alpha\ +\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\cos\alpha\ +\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\beta\right)^2},$$

sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot s^2\cdot t\frac{3}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\beta\right)^2}+\sin\alpha+\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\beta\right)^2}}$$
$$\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}<\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot s^2\cdot t.$$

Dengan kata lain volume prisma segi enam miring lebih kecil dari prisma tegak segi enam, jika luas permukaan keduanya adalah sama.

Selanjutnya, akan ditinjau ukuran sisi-sisi prisma segi enam tegak yang memiliki luas permukaan A sehingga menghasilkan volume maksimum. Misalkan panjang sisi alas segi enam adalah s, dan jari-jari lingkaran luar yang memuat semua titik sudut segi enam adalah r, maka luas alas dan keliling segi enam dalam s dan r adalah

$$L_a=6\cdot\frac{1}{2}\cdot r\cdot r\cdot\sin\frac{\pi}{3}\ =6\cdot\frac{1}{2}\cdot r\cdot r\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{3}{2}r^2\sqrt{3}.$$

Karena, pada segi enam $s=r$, maka luas alas prisma segi enam dapat dituliskan

$$L_a=\frac{3}{2}s^2\sqrt{3}. \tag{37}$$

Dengan panjang sisi s, diperoleh keliling alas

$$K_a=6s. \tag{38}$$

Akibatnya, jika luas permukaan prisma segi enam adalah A, dan tinggi t, maka diperoleh persamaan luas permukaan

$$2\cdot\frac{3}{2}s^2\sqrt{3}+6st=A, \tag{39}$$

sehingga diperoleh

$$t = \frac{A - 3s^2\sqrt{3}}{6s}. \tag{40}$$

Oleh karenanya, diperoleh persamaan volume prisma tegak dengan alas segi enam sebagai berikut

$$V = L_a t = \frac{3}{2}s^2\sqrt{3}\left(\frac{A - 3s^2\sqrt{3}}{6s}\right) = \frac{1}{4}s\sqrt{3}\left(A - 3s^2\sqrt{3}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{3}As - \frac{9}{4}\,s^3.$$

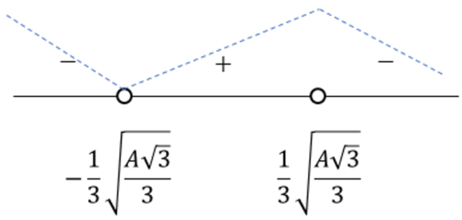
Selanjutnya, ditinjau turunan pertama V terhadap s untuk menentukan nilai s yang mengakibatkan V maksimum.

$$\frac{dV}{ds} = 0\frac{1}{4}\sqrt{3}A - \frac{27}{4}\,s^2 = 0,$$

sehingga diperoleh titik stasioner

$$s = \pm\frac{1}{3}\sqrt{\frac{A\sqrt{3}}{3}}. \tag{41}$$

Pengujian ketiga interval yang dibatasi oleh kedua titik stasioner tersebut pada turunan pertama diperlihatkan pada garis bilangan berikut ini



Dapat disimpulkan bahwa

$$s = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{A\sqrt{3}}{3}} \tag{42}$$

adalah titik maksimum global yang mengakibatkan volume maksimum, yaitu

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4}\sqrt{3}A\frac{1}{3}\sqrt{\frac{A\sqrt{3}}{3}} - \frac{9}{4}\left(\frac{1}{9}\,\frac{A\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{A\sqrt{3}}{3}}\right) \\ &= \frac{1}{12}A\sqrt{A\sqrt{3}} - \frac{1}{36}\,A\sqrt{A\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{18}A\sqrt{A\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

□

4. Kesimpulan

Hasil penelitian menunjukkan bahwa prisma tegak dengan alas berbentuk persegi panjang, segitiga siku-siku, dan segi enam akan memberikan volume yang lebih besar daripada prisma miring, jika luas permukaan keduanya sama. Secara khusus, kubus adalah solusi dari masalah isoperimetrik dalam kelompok prisma dengan alas berbentuk persegi panjang, sedangkan prisma dengan alas segitiga siku-siku yang sama kaki adalah solusi dari masalah isoperimetrik dalam kelompok prisma dengan alas segitiga siku-siku. Jika luas permukaan ketiganya sama, prisma tegak segi enam memiliki volume yang lebih besar dari prisma dengan alas segitiga siku-siku dan prisma dengan alas persegi panjang. Studi lebih lanjut perluasan masalah isoperimetrik pada bangun ruang dilakukan dengan meninjau perumuman prisma segi-n beraturan. Sebagai asumsi, silinder adalah solusi umum dari masalah isoperimetrik untuk kelompok prisma.

Referensi

[1] N. D. Kazarinoff, *Geometric Inequalities*. New York: The Mathematical Association of America, 1961, doi: 10.5948/UPO9780883859223.

[2] R. F. Demar, "A simple approach to isoperimetric problems in the plane," *Mathematics Magazine*, vol. 48, no. 1, pp. 1–12, 1975, doi: 10.1080/0025570X.1975.11976430.

[3] V. Blåsjö, "The isoperimetric problem," *The American Mathematical Monthly*, vol. 112, no. 6, pp. 526–566, 2005, doi: 10.1080/00029890.2005.11920227.

[4] C. Rollin, *A Short History of Carthage*. Oregon: Perennial Press, 2018, [online] available:https://books.google.co.id/books?id=oLJ4DwAAQBAJ.

[5] R. Fitzgerald, *The Aeneid Virgil*. New York: Vintage Books, 1983, [online] available: https://archive.org/details/aeneid00virg.

[6] T. L. Heath, *A history of Greek mathematics*. Oxford: Clarendon Press, 1921, [online] available: https://archive.org/details/historyofgreekm02heat/mode/1up.

[7] I. Bulmer-Thomas, *Selections illustrating the history of Greek mathematics*. Cambridge: Harvard University Press, 1939, [online] available: https://archive.org/details/selectionsillust02bulmuoft.

[8] G. Pólya and G. Szegő, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. (AM-27)*. Princeton: Princeton University Press, 1951, [online] available: http://www.jstor.org/stable/j.ctt1b9rzzn.

[9] I. Chavel, *Isoperimetric Inequalities: Differential Geometric and Analytic Perspectives*. new York: Cambridge University Press, 2001.

[10] U. Stammbach, "A letter of hermann amandus schwarz on isoperimetric problems," *The Mathematical Intelligencer*, vol. 34, no. 1, pp. 44–51, 2012, doi: 10.1007/s00283-011-9267-7.

[11] D. C. Alexander and G. M. Koeberlein, *Elementary Geometry for College Students*, 7th ed. Boston: Cengage Learning, 2019.

[12] W. F. Kern and J. R. Bland, *Solid mensuration with proofs*, 2nd ed. New York: John Wiley and Sons, Inc, 1938.

[13] A. C. F. L. I. E. Leonard, J. E. Lewis and G. W. Tokarsky, *Classical geometry : Euclidean, transformational, inversive, and projective*. New York: John Wiley and Sons, Inc, 2014.

[14] S. Karmakar and S. Karmakar, *Multivariate Calculus*. London: CRC Press, 2023, doi: 10.1201/9781003407874.

[15] E. P. D. Varberg and S. Rigdon, *Calculus*, 9th ed. New Jersey: Prentice Hall, 2006.

[16] A. G. S. Ventre, *Calculus and Linear Algebra*. Cham: Springer International Publishing, 2023, doi: 10.1007/978-3-031-20549-1.

This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License. Editorial of JJoM: Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo, Jln. Prof. Dr. Ing. B.J. Habibie, Moutong, Tilongkabila, Kabupaten Bone Bolango, Provinsi Gorontalo 96554, Indonesia.