JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS
Jambura J. Math. Vol. 5, No. 2, pp. 363–379, August 2023
Journal Homepage: http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom
DOI: https://doi.org/10.34312/jjom.v5i2.20571

Teori Titik Tetap untuk Pemetaan Tipe Kannan yang Diperumum dalam Ruang b-Metrik Modular Lengkap

Afifah Hayati[1,*], Noor Sofiyati[1], Dwiani Listya Kartika[1]

[1]*Program Studi Matematika, Universitas Nahdlatul Ulama Purwokerto, Purwokerto 53145, Indonesia*
[*]*Corresponding author. Email: afifahhayati.mail@gmail.com*

ABSTRAK

Beberapa perumuman prinsip kontraksi Banach, yang merupakan teorema titik tetap untuk pemetaan kontraksi dalam ruang metrik, telah berkembang pesat dalam beberapa tahun terakhir. Beberapa hal yang mendukung perkembangan perumuman tersebut adalah munculnya pemetaan yang lebih umum dari pemetaan kontraksi dan munculnya ruang yang lebih umum dari ruang metrik. Pemetaan tipe Kannan yang diperumum adalah salah satu pemetaan yang lebih umum daripada pemetaan kontraksi. Selain itu, beberapa ruang yang lebih umum daripada ruang metrik adalah ruang b-metrik dan ruang b-metrik modular, yang membawa konsep ruang b-metrik ke dalam ruang modular. Teorema titik tetap untuk pemetaan tipe Kannan yang diperumum pada ruang b-metrik telah diberikan. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk mendefinisikan pemetaan tipe Kannan yang diperumum pada ruang b-metrik modular dan memberikan teorema titik tetap untuk pemetaan tipe Kannan yang diperumum pada ruang b-metrik modular lengkap. Definisi pemetaan tipe Kannan yang diperumum dalam ruang b-metrik modular diberikan dengan memperumum pemetaan tipe Kannan yang diperumum dalam ruang b-metrik. Selanjutnya, pembuktian teorema titik tetap untuk pemetaan tersebut dalam ruang b-metrik modular dilakukan secara analog dengan pembuktian teorema titik tetap untuk pemetaan tersebut dalam ruang b-metrik. Pada artikel ini, kami memperoleh definisi pemetaan tipe Kannan dan teorema titik tetap untuk pemetaan tipe Kannan yang diperumum dalam ruang b-metrik modular dan beberapa akibat dari teorema titik tetap. Dalam membuktikan teorema, sifat fungsi *altering distance* dalam ruang b-metrik diperumum ke dalam ruang b-metrik modular.

Kata Kunci:
Ruang b-Metrik Modular; Fungsi *Altering Distance*; Pemetaan Tipe Kannan

ABSTRACT

Some generalizations of Banach's contraction principle, which is a fixed-point theorem for contraction mapping in metric spaces, have developed rapidly in recent years. Some of the things that support the development of the generalization are the emergence of mappings that are more general than contraction mappings and the emergence of spaces that are more general than metric spaces. The generalized Kannan type mappings are one of the mappings that are more general than contraction mappings. Furthermore, some of the the spaces that are more general than metric spaces are b-metric spaces and modular b-metric spaces, which bring the concept of b-metric spaces into modular spaces. The fixed-point theorems for generalized Kannan-type mappings on b-metric spaces have been given. Therefore, this research aims to define generalized Kannan-type mappings on modular b-metric spaces and provide fixed point theorems for the generalized Kannan-type mappings on complete modular b-metric spaces. The definition

Received: 15-06-2023 | Revised: 10-07-2023 | Accepted: 14-07-2023| Published: 01-08-2023

of generalized Kannan type mapping in modular b-metric spaces is given by generalizing generalized Kannan type mappings in b-metric spaces. Then, the proof of fixed-point theorems for that mapping in modular b-metric spaces is carried out analogously to the proof of the fixed-point theorems for that mapping given in b-metric space. In this article, we obtain the definition of generalized Kannan-type mappings and fixed-point theorems for generalized Kannan-type mappings in modular b-metric spaces and some consequences of the fixed-point theorem. In proving the theorem, a property of altering distance functions in b-metric spaces is generalized into modular b-metric spaces.

Keywords:
Modular b-Metric Space; Altering Distance Function; Kanan-type Mapping

Style Sitasi:

A. Hayati, N. Sofiyati, and D. L. Kartika, "Teori Titik Tetap untuk Pemetaan Tipe Kannan yang Diperumum dalam Ruang b-Metrik Modular Lengkap", *Jambura J. Math.*, vol. 5, No. 2, pp. 363–379, 2023, doi: https://doi.org/10.34312/jjom.v5i2.20571

1. Pendahuluan

Analisis Fungsional merupakan salah satu cabang ilmu Matematika yang mengalami perkembangan baik teori maupun penggunaannya. Penelitian Matematika dalam Bidang Analisis Fungsional, khususnya teori titik tetap, sangat berkembang beberapa tahun terakhir. Suatu pemetaan $T : X \to X$ dengan X himpunan tak kosong dikatakan mempunyai titik tetap jika terdapat suatu titik x di dalam X sehingga $T(x) = x$ [1]. Munculnya teori titik tetap sendiri diawali dengan adanya Prinsip Kontraksi Banach pada tahun 1922 yang memberikan teorema titik tetap untuk pemetaan kontraksi pada ruang metrik [2]. Selanjutnya, fungsi kontrol yang disebut fungsi *altering distance* beserta teori titik tetap untuk pemetaan yang terkait dengan fungsi tersebut diperkenalkan pada [3, 4]. Berbagai jenis ruang yang lebih umum dari ruang metrik bermunculan pada tahun berikutnya, salah satunya adalah ruang b-metrik yang diperkenalkan oleh Czerwik [5] pada tahun 1993 dengan memperumum sifat pertidaksamaan segitiga yang berlaku pada ruang metrik. Suatu fungsi $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan X himpunan tak kosong disebut b-metrik jika terdapat $s \geq 1$ sehingga untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$, $d(x,y) = d(y,x)$, dan $d(x,z) \leq s[d(x,y) + d(y,z)]$. Selain itu, bermunculan pula berbagai jenis pemetaan yang lebih umum dari pemetaan kontraksi, salah satunya pemetaan Kannan yang diperkenalkan oleh Kannan[6] pada tahun 1969. Pemetaan Kannan memperumum pemetaan kontraksi dengan tidak mengharuskannya sifat kontinu yang dimiliki oleh pemetaan kontraksi. Selain itu, Kannan [6] juga memberikan teorema titik tetap untuk pemetaan Kannan pada ruang metrik yang dikenal sebagai teorema titik tetap Kannan. Pada tahun 2017, Gornicki [7] memberikan teorema-teorema titik tetap pada ruang metrik yang merupakan perumuman dari teorema titik tetap Kannan. Selanjutnya, pada tahun 2019, Haokip dan Goswami [8] memberikan teorema titik tetap untuk pemetaan tipe Kannan tersebut yang diperumum pada ruang b-metrik. Pemetaan tipe Kannan yang diperumum tersebut melibatkan fungsi *subadditive altering distance* ϕ dimana menambahkan sifat subaditif pada fungsi *altering distance* ϕ. Suatu pemetaan $T : X \to X$ disebut pemetaan tipe Kannan yang diperumum jika terdapat $p \in \left(0, \frac{1}{2s+1}\right)$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

$$\phi(d(Tx, Ty)) \leq p\,\phi(d(x,y)) + \phi(d(x,Tx)) + \phi(d(y,Ty)) \tag{1}$$

Sebelumnya, pada tahun 1959, Musielak dan Orlicz [9] telah memperkenalkan suatu fungsional yang lebih umum dari norma pada ruang bernorma. Suatu fungsi $\rho : X \to [0, \infty]$ dengan X ruang vektor disebut modular jika untuk setiap $x, y \in X$ berlaku $\rho(x) = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$, $\rho(-x) = \rho(x)$, dan $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ untuk setiap $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$. Selanjutnya, Chistyakov [10] pada tahun 2010 mengembangkan gagasan modular ke sebarang himpunan tak kosong dengan mengembangkan teori metrik dan membangunnya dengan modular. Suatu fungsi $\omega : (0, \infty) \times X \times X \to [0, \infty]$ dengan X himpunan tak kosong disebut metrik modular jika untuk setiap $\lambda, \mu > 0$ dan $x, y, z \in X$ berlaku $\omega(\lambda, x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$, $\omega(\lambda, x, y) = \omega(\lambda, y, x)$, dan $\omega(\lambda + \mu, x, y) \leq \omega(\lambda, x, y) + \omega(\mu, x, y)$. Selanjutnya, pasangan (X, ω) disebut ruang metrik modular. Lebih lanjut, pada tahun 2018, Ege dan Alaca [11] memperkenalkan suatu ruang yang lebih umum baik dari ruang b-metrik maupun dari ruang metrik modular. Ruang tersebut disebut sebagai ruang b-metrik modular yang merupakan pengembangan teori ruang b-metrik yang dibangun oleh modular.

Perkembangan teori titik tetap pada ruang yang lebih umum dari ruang b-metrik dan ruang b-metrik modular diberikan oleh Parvaneh dan Ghoncheh [12] pada tahun 2019 yang memberikan teori titik tetap untuk pemetaan kontraksi-$(\psi, \varphi)_\Omega$ pada ruang p-metrik modular, Gholidahneh, *et al.* [13] pada tahun 2020 yang memberikan teori titik tetap untuk pemetaan kontraksi tipe Meir-Keeler pada ruang b-metrik modular yang diperluas, dan Hayati, *et al.* [14] pada tahun 2022 yang memberikan teori titik tetap untuk pemetaan kontraksi-$(\psi, \varphi)_\Omega$ pada ruang p-metrik modular. Selain itu, perumuman dari teori titik tetap yang melibatkan dua pemetaan, dikenal sebagai teori titik *coincidence*, diberikan oleh Ozcelik dan Kara [15] pada tahun 2019 yang memberikan teorema titik *coincidence* pada ruang b-Metrik via fungsi simulasi-C_F, Berzig dan Bouali [16] pada tahun 2020 yang memberikan teorema titik *coincidence* dan aplikasinya dalam pernyataan diferensial fraksional, dan Hayati [17] pada tahun 2022 yang memberikan beberapa teorema titik *coincidence* dalam ruang bermodular. Oleh karena itu, dapat dikembangkan pula teori titik tetap baik pada ruang yang lebih umum dari ruang b-metrik maupun ruang b-metrik modular dan teori titik *coincidence* untuk teori titik tetap yang telah diberikan.

Perkembangan teori titik tetap dibutuhkan untuk mendukung berbagai aplikasi dari teorema-teorema dalam teori titik tetap tersebut dimana salah satu aplikasi teorema titik tetap adalah untuk menjamin eksistensi solusi sistem persamaan diferensial. Sistem persamaan diferensial sendiri digunakan dalam pemodelan matematika, salah satunya adalah pemodelan penyakit yang erat kaitannya dengan epidemiologi. Dengan adanya perumumam teorema titik tetap, diharapkan dapat memperluas aplikasi dari teorema-teorema titik tetap. Salah satu perumuman tersebut adalah dengan mendefinisikan pemetaan tipe Kannan yang diperumum pada ruang b-metrik yang telah diberikan ke dalam ruang b-metrik modular yang lebih umum dari ruang b-metrik. Selain itu, teorema titik tetap untuk pemetaan tersebut pada ruang b-metrik juga akan diperumum ke dalam ruang b-metrik modular sehingga menghasilkan teorema titik tetap untuk pemetaan tipe Kannan yang diperumum pada ruang b-metrik modular. Berdasarkan hasil penelitian yang diberikan oleh Haokip dan Goswami [8] yang memberikan definisi pemetaan tipe Kannan yang diperumum pada ruang b-metrik beserta teori titik tetapnya, pada penelitian ini diberikan pemetaan tipe Kannan yang diperumum beserta teori titik tetapnya pada ruang b-metrik modular yang lebih umum dari ruang b-metrik. Penelitian dilakukan untuk mendefinisikan pemetaan tipe Kannan yang diperumum pada ruang b-metrik modular dan memberikan teorema titik tetap untuk pemetaan tipe Kannan yang diperumum tersebut pada ruang b-metrik modular.

2. Metode

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Penelitian ini diawali dengan mempelajari literatur-literatur hasil penelitian terkait pemetaan tipe Kannan yang diperumum pada ruang metrik, ruang b-metrik, ruang metrik modular, dan ruang b-metrik modular yang menjadi dasar untuk mempelajari perumuman pemetaan tipe Kannan yang diperumum pada ruang b-metrik modular beserta teorema titik tetap untuk pemetaan tersebut. Adapun langkah-langkah yang dilakukan untuk membuktikan teorema titik tetap untuk pemetaan tipe Kannan yang diperumum pada ruang b-metrik modular adalah sebagai berikut.

1. Studi literatur mengenai definisi pemetaan tipe Kannan yang diperumum pada ruang b-metrik beserta teorema titik tetapnya.
   Dalam langkah ini, dipelajari definisi ruang b-metrik beserta contohnya yang diberikan oleh Czerwik [5]. Selanjutnya, dipelajari pemetaan Kannan pada ruang metrik beserta pembuktian teorema titik tetapnya yang diberikan oleh Kannan [6] dan pemetaan tipe Kannan pada ruang metrik yang merupakan perumuman dari pemetaan Kannan beserta pembuktian teorema titik tetapnya yang diberikan oleh Gornicki [7]. Lebih lanjut, dipelajari pemetaan tipe Kannan yang diperumum pada ruang b-metrik yang merupakan perumuman dari pemetaan tipe Kannan beserta pembuktian teorema titik tetapnya yang diberikan oleh Haokip dan Goswami [8]. Definisi pemetaan tipe Kannan yang diperumum menggunakan fungsi *subadditive altering distance* yang telah dijelaskan oleh Khan, *et al.* [4] dan Haokip dan Goswami [8], juga dipelajari.
2. Studi literatur mengenai ruang b-metrik modular.
   Langkah ini diawali dengan mempelajari konsep ruang metrik modular yang diberikan oleh Chistyakov [10]. Selanjutnya, dipelajari konsep ruang b-metrik modular yang diberikan oleh Ege dan Alaca [11] beserta contoh dan konsep barisan pada kedua ruang tersebut.
3. Pendefinisian pemetaan tipe Kannan yang diperumum pada ruang b-metrik modular.
   Definisi pemetaan tersebut, diperumum ke dalam ruang b-metrik modular dengan menetapkan nilai λ yang terkait dengan definisi b-metrik modular terlebih dahulu. Definisi tersebut dinyatakan pada Definisi 6.
4. Perumuman sifat pemetaan tipe Kannan yang diperumum pada ruang b-metrik ke dalam ruang b-metrik modular.
   Dalam pembuktian teorema titik tetap untuk pemetaan tipe Kannan yang diperumum, dibutuhkan sifat dari fungsi *subadditive altering distance* pada ruang b-metrik modular yang dinyatakan pada Teorema 1. Sifat tersebut merupakan perumuman dari sifat fungsi *subadditive altering distance* yang diberikan oleh Haokip dan Goswami [8].
5. Pembuktian teorema titik tetap untuk pemetaan tipe Kannan yang diperumum pada ruang b-metrik modular.
   Teorema titik tetap untuk pemetaan tipe Kannan yang diperumum pada ruang b-metrik modular dibuktikan secara analog dengan pembuktian teorema titik tetap untuk pemetaan tipe Kannan yang diperumum pada ruang b-metrik yang telah dipelajari pada Langkah 1. Pada pembuktian ini, disesuaikan konsep ruang

b-metrik modular yang diperlajari pada Langkah 2, definisi pemetaan tipe Kannan yang diperumum yang dipelajari pada Langkah 3, dan sifat fungsi *subadditive altering distance* yang dipelajari pada Langkah 4.

Proses pembuktian teorema-teorema pada penelitian ini menggunakan metode pembuktian yang merujuk pada Hernadi [18]. Metode-metode pembuktian yang digunakan adalah metode pembuktian langsung, metode pembuktian dengan kontradiksi, metode pembuktian ketunggalan, metode pembuktian dengan induksi metematika.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Hasil Awal

Bagian ini berisi konsep dasar berupa definisi dan teorema hasil studi literatur yang diperlukan untuk membuktikan hasil utama pada penelitian ini.

3.1.1. Ruang b-metrik modular

Ruang b-metrik modular yang diperkenalkan oleh Ege dan Alaca [11] dinyatakan pada Definisi 1.

Definisi 1. Diketahui X himpunan tak kosong dan $s \in \mathbb{R}$ dengan $s \geq 1$. Pemetaan $\nu : (0, \infty) \times X \times X \to [0, \infty]$ disebut b-metrik modular jika untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $\nu(\lambda, x, y) = 0$, untuk setiap $\lambda > 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $\nu(\lambda, x, y) = \nu(\lambda, y, x)$, untuk setiap $\lambda > 0$,
3. $\nu(\lambda + \mu, x, y) \leq s(\nu(\lambda, x, z) + \nu(\mu, z, y))$, untuk setiap $\lambda, \mu > 0$.

Pada pembahasan selanjutnya, pemetaan $\nu : (0, \infty) \times X \times X \to [0, \infty]$ dinotasikan dengan $\nu_\lambda(x, y) = \nu(\lambda, x, y)$, untuk setiap $\lambda \in (0, \infty)$ dan $x, y \in X$. Selanjutnya, Ege dan Alaca [11] juga menyatakan bahwa pasangan (X, ν) disebut ruang b-metrik modular. Lebih lanjut, setiap ruang metrik modular merupakan ruang b-metrik modular dengan $s = 1$. Dengan kata lain, ruang b-metrik modular merupakan perumuman ruang metrik modular.

Contoh 1. Diberikan ruang b-metrik modular (X, d) dengan $X = [0, 1]$ dan $d : X \times X \to [0, \infty]$ dengan definisi $d(x, y) = (x - y)^2$, untuk setiap $x, y \in X$ [19]. Pasangan (X, ν) dengan $\nu : (0, \infty) \times X \times X \to [0, \infty]$ didefinisikan dengan $\nu(x, y) = \frac{(x-y)^2}{\lambda}$, untuk setiap $\lambda \in (0, \infty)$ dan $x, y \in X$ merupakan ruang b-metrik modular.

Solusi. Cukup jelas bahwa Aksioma (1) dan (2) pada Definisi 1 terpenuhi. Selanjutnya, diperhatikan bahwa untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku

$$
\begin{aligned}
((x-y)-(y-z))^2 \geq 0 &\Leftrightarrow (x-y)^2 - 2(x-y)(y-z) + (y-z)^2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 \geq 2(x-y)(y-z),
\end{aligned}
$$

maka untuk setiap $\lambda, \mu \in (0, \infty)$ dan $x, y \in X$ berlaku

$$
\begin{aligned}
\nu_{\lambda+\mu}(x,z) &= \frac{(x-z)^2}{\lambda+\mu} \\
&= \frac{((x-y)+(y-z))^2}{\lambda+\mu} \\
&= \frac{(x-y)^2}{\lambda+\mu} + \frac{(y-z)^2}{\lambda+\mu} + \frac{2(x-y)(y-z)}{\lambda+\mu} \\
&\leq \frac{(x-y)^2}{\lambda+\mu} + \frac{(y-z)^2}{\lambda+\mu} + \frac{(x-y)^2}{\lambda+\mu} + \frac{(y-z)^2}{\lambda+\mu} \\
&= 2\left[\frac{(x-y)^2}{\lambda+\mu} + \frac{(y-z)^2}{\lambda+\mu}\right] \\
&\leq 2\left[\frac{(x-y)^2}{\lambda} + \frac{(y-z)^2}{\mu}\right] \\
&= 2\left[\nu_\lambda(x,y) + \nu_\mu(y,z)\right].
\end{aligned}
$$

Dengan kata lain, Aksioma (3) dalam Definisi 1 terpenuhi dengan $s = 2$. Dengan demikian, benar bahwa (X,ν) merupakan ruang b-metrik modular.

Selain mendefinisikan ruang b-metrik modular, Ege dan Alaca [11] juga memberikan definisi himpunan bagian dari suatu ruang b-metrik modular (X,ν) yang selanjutnya dinyatakan dengan Definisi 2.

Definisi 2. Diberikan suatu b-metrik modular ν pada X. Untuk $x, y \in X$, didefinisikan suatu relasi $\sim^\nu$ pada X dengan definisi

$$x \sim^\nu y \Leftrightarrow \lim_{\lambda\to\infty} \nu_\lambda(x,y) = 0.$$

Suatu himpunan modular didefinisikan

$$X_\nu = y \in X \; : y \sim^\nu x$$

dan didefinisikan pula himpunan sebagai beriku

$X_\nu^* = x \in X \; : \exists \lambda = \lambda(x) > 0$ sehingga $\nu_\lambda(x, x_0) < \infty$ dengan $x_0 \in X$.

Berdasarkan Definisi 2, dapat dibuktikan bahwa relasi $\sim^\nu$ merupakan relasi ekuivalensi dan $X_\nu^* \subseteq X$. Selain itu, jika (X,ν) ruang b-metrik modular, maka (X_ν^*,ν) juga merupakan ruang b-metrik modular. Pada pembahasan selanjutnya, ruang b-metrik modular (X_ν^*,ν) ditulis dengan X_ν^*.

Selanjutnya, diberikan konsep barisan di dalam ruang b-metrik modular. Konsep barisan dalam ruang b-metrik modular merujuk pada Ege dan Alaca [11], yang dinyatakan dengan Definisi 3.

Definisi 3. Diberikan (X,ν) ruang b-metrik modular. Berlaku:

1. Barisan x_n di dalam X_ν^* dikatakan konvergen-ν ke $x \in X_\nu^*$ jika untuk setiap $\lambda > 0$ berlaku $\nu_\lambda(x_n, x) \to 0$, untuk $n \to \infty$.

2. Barisan x_n di dalam X_ν^* disebut barisan Cauchy-ν jika untuk setiap $\lambda > 0$ berlaku $\nu_\lambda(x_n, x_m) \to 0$, untuk $m, n \to \infty$.
3. Ruang b-metrik modular X_ν^* dikatakan lengkap-ν jika setiap barisan Cauchy-ν di dalam X_ν^* konvergen-ν dan limitnya di dalam X_ν^*.

3.1.2. Fungsi *Subadditive Altering Distance*

Dalam pendefinisian pemetaan tipe Kannan yang diperumum pada ruang b-metrik modular, diperlukan definisi fungsi *altering distance* yang diberikan oleh Khan, *et al.* [4]. Definisi pemetaan tersebut dinyatakan sebagai Definisi 4.

Definisi 4. Fungsi $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ disebut fungsi *altering distance* jika:

1. fungsi ϕ kontinu,
2. fungsi ϕ naik tegas, dan
3. $\phi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Selanjutnya, diberikan suatu fungsi *altering distance* yang ditambahkan sifat *subadditive*, menjadi fungsi *subadditive altering distance* yang dinyatakan sebagai Definisi 5.

Definisi 5. Fungsi $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ disebut fungsi *subadditive altering distance* jika

1. ϕ merupakan fungsi *altering distance* dan
2. $\phi(x+y) \leq \phi(x) + \phi(y)$, untuk setiap $x, y \in [0,\infty)$.

Berikut diberikan contoh fungi *subadditive altering distance*.

Contoh 2. Fungsi-fungsi berikut merupakan fungsi *subadditive altering distance*.

1. $\phi_1(x) = kx$, untuk suatu $k \geq 1$
2. $\phi_2(x) = \log(1+x)\,,\, x \geq 0$

Berdasarkan Definisi 4 dan Definisi 5, terdapat sifat dari fungsi *subadditive altering distance* yang diberikan oleh Corazza [20]. Sifat fungsi tersebut, dinyatakan sebagai Teorema 1.

Teorema 1. *Jika ϕ subadditive, maka untuk setiap bilangan bulat positif n dan $x \in [0,\infty)$ berlaku*

$$\phi(nx) \leq n\phi(x)\,. \tag{2}$$

Bukti. Dengan induksi matematika, akan dibuktikan bahwa pernyataan di atas berlaku.

Akan dibuktikan pernyataan benar untuk $n = 1$. Karena $\phi(1.x) = \phi(x) = 1.\phi(x)$, maka jelas bahwa

$$\phi(1.x) \leq 1.\phi(x)\,.$$

Selanjutnya, diasumsikan pernyataan benar untuk $n = k$, yaitu

$$\phi(kx) \leq k\phi(x)\,.$$

Akan dibuktikan bahwa pernyataan benar untuk $n = k+1$.

Diketahui ϕ *subadditive*, maka

$$\phi((k+1)x) = \phi(kx + x) \leq \phi(kx) + \phi(x)\,.$$

Berdasarkan asumsi, diperoleh bahwa

$$\phi\left(\left(k+1\right)x\right) \leq \phi\left(kx\right) + \phi\left(x\right) \leq k\phi\left(x\right) + \phi\left(x\right) = \left(k+1\right)\phi\left(x\right)$$

sehingga

$$\phi\left(\left(k+1\right)x\right) \leq \left(k+1\right)\phi\left(x\right).$$

Dengan kata lain, pernyataan benar untuk $n = k+1$. Jadi benar bahwa untuk setiap bilanngan bulat positif n dan $x \geq 0$ berlaku $\phi\left(nx\right) \leq n\phi\left(x\right)$. □

3.2. Hasil Utama dan Pembahasan

Bagian ini berisi hasil utama penelitian dan pembahasannya, yang dinyatakan dengan teori titik tetap untuk pemetaan tipe Kannan yang diperumum dalam Ruang b-metrik modular. Haokip dan Goswami [8] memberikan sifat yang menyatakan hubungan suatu b-metrik dengan fungsi *subadditive altering distance* dalam ruang b-metrik. Oleh karena itu, diberikan sifat yang menyatakan hubungan suatu b-metrik modular v dengan suatu fungsi *subadditive altering distance* ϕ dalam ruang b-metrik modular.

Teorema 2. *Diberikan $\lambda > 0$, b-metrik modular ν pada X, dan ruang b-metrik modular X_ν^*. Jika ϕ subadditive, maka untuk setiap $k \in [0,1)$ dan $x, y \in X_\nu^*$ dengan*

$$\phi\left(\nu_\lambda\left(x,y\right)\right) \leq k\,\phi\left(\nu_\lambda\left(a,b\right)\right), \text{ untuk suatu } a,b \in X_\nu^*, \tag{3}$$

berakibat

$$\nu_\lambda\left(x,y\right) \leq k'\,\nu_\lambda\left(a,b\right) \tag{4}$$

untuk suatu $k' \in (0,1)$.

Bukti. Andaikan untuk setiap $k' \in (0,1)$ berlaku

$$\nu_\lambda\left(x,y\right) > k'\,\nu_\lambda\left(a,b\right)$$

sehingga

$$\nu_\lambda\left(a,b\right) < \frac{1}{k'}\,\nu_\lambda\left(x,y\right).$$

Karena ϕ naik tegas, maka

$$\phi\left(\nu_\lambda\left(a,b\right)\right) < \phi\left(\frac{1}{k'}\,\nu_\lambda\left(x,y\right)\right).$$

Karena $\frac{1}{k'} \in \mathbb{R}$, maka menurut Sifat Archimedian terdapat bilangan asli n_0 sehingga $\frac{1}{k'} < n_0$. Akibatnya, karena ϕ naik tegas, maka diperoleh

$$\phi\left(\nu_\lambda\left(a,b\right)\right) < \phi\left(\frac{1}{k'}\,\nu_\lambda\left(x,y\right)\right) < \phi\left(n_0\,\nu_\lambda\left(x,y\right)\right).$$

Diketahui ϕ *subadditive*, maka menurut Teorema 1, diperoleh

$$\phi\left(\nu_\lambda\left(a,b\right)\right) < \phi\left(n_0\,\nu_\lambda\left(x,y\right)\right) \leq n_0\,\phi\left(\nu_\lambda\left(x,y\right)\right)$$

sehingga

$$\phi\left(\nu_\lambda\left(x,y\right)\right) > \frac{1}{n_0}\phi\left(\nu_\lambda\left(a,b\right)\right).$$

Dengan kata lain, terdapat $k = \frac{1}{n_0} \in (0,1)$ sehingga

$$\phi\left(\nu_\lambda\left(x,y\right)\right) > k\,\phi\left(\nu_\lambda\left(a,b\right)\right).$$

Terjadi kontradiksi dengan yang diketahui yang berarti pengandaian salah. Jadi, benar bahwa $\nu_\lambda\left(x,y\right) \leq k'\,\nu_\lambda\left(a,b\right)$, untuk suatu $k' \in (0,1)$. □

Berdasarkan definisi pemetaan tipe Kannan yang diperumum pada ruang b-metrik pada Definisi 4 dan Definisi 5, diberikan definisi pemetaan tipe Kannan yang diperumum pada ruang b-metrik modular. Definisi tersebut dinyatakan sebagai Definisi 6.

Definisi 6. Diberikan $\lambda > 0$, b-metrik modular ν pada X, dan ruang b-metrik lengkap X_ν^* dengan koefisien $s \geq 1$. Pemetaan $T : X_\nu^* \to X_\nu^*$ disebut pemetaan tipe Kannan-ν_λ yang diperumum jika terdapat $p \in \left(0, \frac{1}{2s+1}\right)$ dan pemetaan *subadditive altering distance* ϕ sehingga untuk setiap $x, y \in X_\nu^*$ berlaku

$$\phi\left(\nu_\lambda\left(Tx,Ty\right)\right) \leq p\{\phi\left(\nu_\lambda\left(x,y\right)\right) + \phi\left(\nu_\lambda\left(x,Tx\right)\right) + \phi\left(\nu_\lambda\left(y,Ty\right)\right)\}. \tag{5}$$

Selanjutnya, diberikan teorema titik tetap untuk pemetaan tipe Kannan yang diperumum pada ruang b-metrik modular yang lengkap. Teorema tersebut dinyatakan sebagai Teorema 3.

Teorema 3. *Diberikan $\lambda > 0$, b-metrik modular ν pada X, dan ruang b-metrik lengkap X_ν^* dengan koefisien $s \geq 1$. Jika $T : X_\nu^* \to X_\nu^*$ pemetaan tipe Kannan-ν_λ yang diperumum, yaitu terdapat $p \in \left(0, \frac{1}{2s+1}\right)$ dan pemetaan subadditive altering distance ϕ yang memenuhi*

$$\phi\left(\nu_\lambda\left(Tx,Ty\right)\right) \leq p\{\phi\left(\nu_\lambda\left(x,y\right)\right) + \phi\left(\nu_\lambda\left(x,Tx\right)\right) + \phi\left(\nu_\lambda\left(y,Ty\right)\right)\}. \tag{6}$$

untuk setiap $x, y \in X_\nu^*$, maka T mempunyai titik tetap $z \in X_\nu^*$ dan untuk setiap $x \in X_\nu^*$, barisan $T^n x$ konvergen-ν ke z dan untuk $q = \frac{2p}{1-p} < 1$ dengan $q > 0$, berlaku

$$\nu_\lambda\left(T^{n+1}x, T^n x\right) \leq q^n\,\nu_\lambda\left(x,Tx\right),\ n = 0,1,2,\ldots. \tag{7}$$

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa:

1. T mempunyai titik tetap z, dan
2. z tunggal.
3. untuk setiap $x \in X_\nu^*$, barisan $T^n x$ konvergen ke z dan untuk $q = \frac{2p}{1-p} < 1$ berlaku

$$\nu_\lambda\left(T^{n+1}x, T^n x\right) \leq q^n\,\nu_\lambda\left(x,Tx\right),\ n = 1,2,\ldots.$$

1. Akan ditunjukkan bahwa T mempunyai titik tetap z.
   Diambil sebarang $x \in X_\nu^*$ dan diambil $u = Tx$. Diperhatikan bahwa $T : X_\nu^* \to X_\nu^*$, maka $u, T\left(u\right) \in X_\nu^*$. Karena T pemetaan tipe Kannan-ν_λ yang diperumum dan

$u, T(u) \in X_{\nu}^{*}$, maka

$$\phi\left(\nu_{\lambda}\left(u, Tu\right)\right) = \phi\left(\nu_{\lambda}\left(Tx, Tu\right)\right) \leq p\{\phi\left(\nu_{\lambda}\left(x, u\right)\right) + \phi\left(\nu_{\lambda}\left(x, Tx\right)\right) + \phi\left(\nu_{\lambda}\left(u, Tu\right)\right)\}.$$

sehingga

$$\begin{aligned}
&\phi\left(\nu_{\lambda}\left(u, Tu\right)\right) \leq p\phi\left(\nu_{\lambda}\left(x, u\right)\right) + p\phi\left(\nu_{\lambda}\left(x, Tx\right)\right) + p\phi\left(\nu_{\lambda}\left(u, Tu\right)\right) \\
\Leftrightarrow\ &(1-p)\,\phi\left(\nu_{\lambda}\left(u, Tu\right)\right) \leq p\phi\left(\nu_{\lambda}\left(x, u\right)\right) + p\phi\left(\nu_{\lambda}\left(x, Tx\right)\right) \\
\Leftrightarrow\ &(1-p)\,\phi\left(\nu_{\lambda}\left(u, Tu\right)\right) \leq p\phi\left(\nu_{\lambda}\left(x, Tx\right)\right) + p\phi\left(\nu_{\lambda}\left(x, Tx\right)\right) \\
\Leftrightarrow\ &(1-p)\,\phi\left(\nu_{\lambda}\left(u, Tu\right)\right) \leq 2p\,\phi\left(\nu_{\lambda}\left(x, Tx\right)\right) \\
\Leftrightarrow\ &\phi\left(\nu_{\lambda}\left(u, Tu\right)\right) \leq \frac{2p}{1-p}\,\phi\left(\nu_{\lambda}\left(x, Tx\right)\right).
\end{aligned}$$

Diperhatikan bahwa $s \geq 1 \Leftrightarrow 2s \geq 2 \Leftrightarrow 2s+1 \geq 3$, maka $p < \frac{1}{2s+1} \leq \frac{1}{3}$ sehingga $2p < \frac{2}{3}$ dan $-p > -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 1-p > \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{1-p} < \frac{3}{2}$. Akibatnya, diperoleh $\frac{2p}{1-p} = 2p\frac{1}{1-p} < \frac{2}{3} . \frac{3}{2} = 1$. Namakan $q = \frac{2p}{1-p}$, maka

$$\phi\left(\nu_{\lambda}\left(u, Tu\right)\right) \leq q\,\phi\left(\nu_{\lambda}\left(x, Tx\right)\right), \textit{ dengan } q < 1. \tag{8}$$

Menurut Teorema 2, hal ini berakibat

$$\nu_{\lambda}\left(u, Tu\right) \leq q' \nu_{\lambda}\left(x, Tx\right), \textit{ untuk suatu } q' < 1. \tag{9}$$

Tanpa mengurangi arti, diasumsikan bahwa $q' = q$. Selanjutnya, diambil sebarang $x_0 \in X_{\nu}^{*}$. Dibentuk barisan x_n dengan

$$x_{n+1} = Tx_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa untuk setiap $m, n \in N \cup 0$ dengan $m > n$ berlaku

$$\nu_{\lambda}\left(x_n, x_m\right) \leq s\,\nu_{\lambda}\left(x_n, x_{n+1}\right) + s^2\,\nu_{\lambda}\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right) + \cdots + s^{m-n}\,\nu_{\lambda}\left(x_{m-1}, x_m\right). \tag{11}$$

Jika $m - n = 1$, maka diperoleh

$$\nu_{\lambda}\left(x_n, x_{n+1}\right) \leq s\left[\nu_{\lambda}\left(x_n, x_n\right) + \nu_{\lambda}\left(x_n, x_{n+1}\right)\right] = s\,\nu_{\lambda}\left(x_n, x_{n+1}\right).$$

Jika $m - n = 2$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\nu_{\lambda}\left(x_n, x_{n+2}\right) &\leq s\left[\nu_{\lambda}\left(x_n, x_{n+1}\right) + \nu_{\lambda}\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right)\right] \\
&\leq s\left[\nu_{\lambda}\left(x_n, x_{n+1}\right) + s\ \left[\nu_{\lambda}\left(x_{n+1}, x_{n+1}\right) + \nu_{\lambda}\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right)\right]\right] \\
&= s\nu_{\lambda}\left(x_n, x_{n+1}\right) + s^2\,\nu_{\lambda}\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right).
\end{aligned}$$

Jika $m - n = 3$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\nu_\lambda(x_n, x_{n+3}) &\le s\left[\nu_\lambda(x_n, x_{n+1}) + \nu_\lambda(x_{n+1}, x_{n+3})\right] \\
&\le s\left[\nu_\lambda(x_n, x_{n+1}) + s\ \left[\nu_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2}) + \nu_\lambda(x_{n+2}, x_{n+3})\right]\right] \\
&= s\,\nu_\lambda(x_n, x_{n+1}) + s^2\,\nu_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^2\nu_\lambda(x_{n+2}, x_{n+3}) \\
&\le s\,\nu_\lambda(x_n, x_{n+1}) + s^2\,\nu_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^2 s\left[\nu_\lambda(x_{n+2}, x_{n+2}) + \nu_\lambda(x_{n+2}, x_{n+3})\right] \\
&= s\,\nu_\lambda(x_n, x_{n+1}) + s^2\,\nu_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^3\nu_\lambda(x_{n+2}, x_{n+3}).
\end{aligned}$$

Jika proses dilanjutkan, maka untuk setiap $m, n \in N \cup 0$ dengan $m > n$ berlaku

$$\nu_\lambda(x_n, x_m) \le s\,\nu_\lambda(x_n, x_{n+1}) + s^2\,\nu_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + s^{m-n}\,\nu_\lambda(x_{m-1}, x_m). \quad (12)$$

Selanjutnya, diperhatikan bahwa untuk $n = 0, 1, 2, \ldots,$ berlaku $x_{n+1} = Tx_n$. Akibatnya, jika $x_1 = Tx_0$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\phi(\nu_\lambda(x_1, x_2)) &= \phi(\nu_\lambda(x_1, Tx_1)) \\
&= \phi(\nu_\lambda(Tx_0, Tx_1)) \\
&\le p\{\phi(\nu_\lambda(x_0, x_1)) + \phi(\nu_\lambda(x_0, Tx_0)) + \phi(\nu_\lambda(x_1, Tx_1))\}.
\end{aligned} \quad (13)$$

Analog dengan cara yang sama pada pernyataan (8), diperoleh

$$\phi(\nu_\lambda(x_1, x_2)) = \phi(\nu_\lambda(x_1, Tx_1)) \le q\,\phi(\nu_\lambda(x_0, Tx_0)) \text{ dengan } q = \frac{2p}{1-p} < 1. \quad (14)$$

Dengan demikian, menurut Teorema 2, diperoleh

$$\nu_\lambda(x_1, x_2) \le q\,\nu_\lambda(x_0, Tx_0). \quad (15)$$

Selanjutnya, jika $x_2 = Tx_1$, maka

$$\begin{aligned}
\phi(\nu_\lambda(x_2, x_3)) &= \phi(\nu_\lambda(x_2, Tx_2)) \\
&= \phi(\nu_\lambda(Tx_1, Tx_2)) \\
&\le p\{\phi(\nu_\lambda(x_1, x_2)) + \phi(\nu_\lambda(x_1, Tx_1)) + \phi(\nu_\lambda(x_2, Tx_2))\}.
\end{aligned} \quad (16)$$

Analog dengan cara yang sama pada pernyataan (8), diperoleh

$$\phi(\nu_\lambda(x_2, x_3)) = \phi(\nu_\lambda(x_2, Tx_3)) \le q\,\phi(\nu_\lambda(x_1, Tx_1)) \text{ dengan } q = \frac{2p}{1-p} < 1. \quad (17)$$

Dengan demikian, menurut Teorema 2, diperoleh

$$\nu_\lambda(x_2, x_3) \le q\,\nu_\lambda(x_1, Tx_1) \Leftrightarrow \nu_\lambda(x_2, x_3) \le q\,\nu_\lambda(x_1, x_2). \quad (18)$$

Akibatnya, diperoleh

$$\nu_\lambda(x_2, x_3) \le q\,\nu_\lambda(x_1, x_2) \le q^2\,\nu_\lambda(x_0, Tx_0). \quad (19)$$

Jika proses dilanjutkan, maka diperoleh untuk $n = 0, 1, 2, \ldots,$ berlaku

$$\nu_\lambda(x_n, x_{n+1}) \le q^n\,\nu_\lambda(x_0, Tx_0) \quad (20)$$

Berdasarkan pernyataan (12), diperoleh untuk setiap $m, n \in \mathbb{N} \cup 0$ dengan $m > n$ berlaku

$$
\begin{aligned}
\nu_\lambda\left(x_n, x_m\right) &\leq s\, \nu_\lambda\left(x_n, x_{n+1}\right) + s^2\, \nu_\lambda\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right) + \cdots + s^{m-n}\, \nu_\lambda\left(x_{m-1}, x_m\right) \\
&\leq s q^n\, \nu_\lambda\left(x_0, T x_0\right) + s^2 q^{n+1}\, \nu_\lambda\left(x_0, T x_0\right) + \cdots + s^{m-n}\, q^{m-1} \nu_\lambda\left(x_0, T x_0\right) \\
&= q^{n-1}\, \nu_\lambda\left(x_0, T x_0\right)\ sq + q^{n-1}\, \nu_\lambda\left(x_0, T x_0\right) s^2 q^2 + \ldots q^{n-1} \nu_\lambda\left(x_0, T x_0\right) s^{m-n}\, q^{m-n} \\
&= q^{n-1}\, \nu_\lambda\left(x_0, T x_0\right)\ \left(sq + (sq)^2 + \cdots + (sq)^{m-n}\right) \\
&\leq q^{n-1}\, \nu_\lambda\left(x_0, T x_0\right) \left(sq + (sq)^2 + \cdots + (sq)^{m-n} + (sq)^{m-n+1} + \cdots + (sq)^m\right) \\
&= q^{n-1}\, \nu_\lambda\left(x_0, T x_0\right) \left(sq + (sq)^2 + \cdots + (sq)^m\right).
\end{aligned}
$$

Diperhatikan bahwa $p < \frac{1}{2s+1} \Leftrightarrow 2sp + p < 1 \Leftrightarrow 2sp < 1 - p \Leftrightarrow \frac{2sp}{1-p} < 1$ dan $q = \frac{2p}{1-p} < 1$, maka $sq = \frac{2sp}{1-p} < 1$. Akibatnya, karena $sq < 1$, maka untuk $m \to \infty$, diperoleh

$$
sq + (sq)^2 + \cdots + (sq)^m \to \frac{sq}{1 - sq}, \tag{21}
$$

sehingga untuk $m \to \infty$ diperoleh

$$
\begin{aligned}
\nu_\lambda\left(x_n, x_m\right) &\leq q^{n-1}\, \nu_\lambda\left(x_0, T x_0\right) \left(sq + (sq)^2 + \cdots + (sq)^m\right) \\
&\to q^{n-1}\, \nu_\lambda\left(x_0, T x_0\right) \frac{sq}{1 - sq} \\
&= \frac{s\, q^n}{1 - sq}\, \nu_\lambda\left(x_0, T x_0\right).
\end{aligned} \tag{22}
$$

Lebih lanjut, karena $0 < q < 1$, maka untuk $n \to \infty$ berlaku

$$
q^n \to 0. \tag{23}
$$

Akibatnya, berdasarkan pernyataan (22) dan pernyataan (23), untuk $n, m \to \infty$ berlaku

$$
\nu_\lambda\left(x_n, x_m\right) \to 0. \tag{24}
$$

Dengan kata lain, barisan x_n merupakan barisan Cauchy-ν di dalam X_ν^*. Karena X_ν^* lengkap, maka terdapat $x \in X_\nu^*$ sehingga untuk $n \to \infty$ berlaku

$$
\nu_\lambda\left(x_n, z\right) \to 0. \tag{25}
$$

Selanjutnya, diperhatikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$
\begin{aligned}
\nu_\lambda\left(Tz, z\right) &\leq s\left[\nu_\lambda\left(Tz, T x_n\right) + \nu_\lambda\left(T x_n, z\right)\right] \\
&\leq s\left[\nu_\lambda\left(Tz, T x_n\right) + s\left[\nu_\lambda\left(T x_n, x_n\right) + \nu_\lambda\left(x_n, z\right)\right]\right] \\
&= s\, \nu_\lambda\left(Tz, T x_n\right) + s^2\, \nu_\lambda\left(T x_n, x_n\right) + s^2\, \nu_\lambda\left(x_n, z\right)
\end{aligned} \tag{26}
$$

sehingga menurut sifat *subadditive* ϕ diperoleh

$$\begin{aligned}\phi\left(\nu_\lambda\left(Tz,z\right)\right) &\leq \phi\left(s\,\nu_\lambda\left(Tz,Tx_n\right)+s^2\,\nu_\lambda\left(Tx_n,x_n\right)+s^2\,\nu_\lambda\left(x_n,z\right)\right)\\ &\leq \phi\left(s\,\nu_\lambda\left(Tz,Tx_n\right)\right)+\phi\left(s^2\,\nu_\lambda\left(Tx_n,x_n\right)\right)+\phi\left(s^2\,\nu_\lambda\left(x_n,z\right)\right).\end{aligned} \tag{27}$$

Tanpa mengurangi arti, diasumsikan s bilangan bulat positif sehingga menurut Teorema 1 dan pernyataan (27) diperoleh

$$\phi\left(\nu_\lambda\left(Tz,z\right)\right) \leq s\,\phi\left(\nu_\lambda\left(Tz,Tx_n\right)\right)+s^2\,\phi\left(\nu_\lambda\left(Tx_n,x_n\right)\right)+s^2\,\phi\left(\nu_\lambda\left(x_n,z\right)\right). \tag{28}$$

Karena T pemetaan tipe Kannan-ν_λ yang diperumum, maka menurut pernyataan (28), untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\begin{aligned}\phi\left(\nu_\lambda\left(Tz,z\right)\right) \leq sp\;\; &\phi\left(\nu_\lambda\left(z,x_n\right)\right)+\phi\left(\nu_\lambda\left(z,Tz\right)\right)+\phi\left(\nu_\lambda\left(x_n,Tx_n\right)\right)+s^2\,\phi\left(\nu_\lambda\left(Tx_n,x_n\right)\right)\\ &+\; s^2\,\phi\left(\nu_\lambda\left(x_n,z\right)\right)\end{aligned} \tag{29}$$

sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\begin{aligned}\phi\left(\nu_\lambda\left(Tz,z\right)\right)-sp\,\phi\left(\nu_\lambda\left(Tz,z\right)\right) &\leq \left(sp+s^2\right)\phi\left(\nu_\lambda\left(z,x_n\right)\right)+\left(sp+s^2\right)\phi\left(\nu_\lambda\left(x_n,Tx_n\right)\right)\\ \Leftrightarrow\;\left(1-sp\right)\phi\left(\nu_\lambda\left(Tz,z\right)\right) &\leq \left(sp+s^2\right)\left(\phi\left(\nu_\lambda\left(z,x_n\right)\right)+\phi\left(\nu_\lambda\left(x_n,Tx_n\right)\right)\right)\\ \Leftrightarrow\;\left(1-sp\right)\phi\left(\nu_\lambda\left(Tz,z\right)\right) &\leq \left(sp+s^2\right)\left(\phi\left(\nu_\lambda\left(z,x_n\right)\right)+\phi\left(q^n\,\nu_\lambda(Tx_0,x_0)\right)\right).\end{aligned} \tag{30}$$

Selanjutnya, diperhatikan bahwa untuk $n \to \infty$ berlaku $\nu_\lambda\left(z,x_n\right) \to 0$ serta ϕ kontinu dan $\phi\left(0\right)=0$, maka untuk $n \to \infty$ berlaku

$$\phi\left(\nu_\lambda\left(z,x_n\right)\right) \to 0. \tag{31}$$

Karena $0 < q < 1$, ϕ kontinu, dan $\phi\left(0\right)=0$, maka

$$\phi\left(q^n\,\nu_\lambda(Tx_0,x_0)\right) \to 0. \tag{32}$$

Berdasarkan pernyataan (30), (31), dan (32), untuk $n \to \infty$ berlaku

$$\left(1-sp\right)\phi\left(\nu_\lambda\left(Tz,z\right)\right) \to 0 \tag{33}$$

Dengan demikian, diperoleh $\left(1-sp\right)\phi\left(\nu_\lambda\left(Tz,z\right)\right)=0$. Karena $1-sp \neq 0$, maka $\phi\left(\nu_\lambda\left(Tz,z\right)\right)=0$. Lebih lanjut, karena $\phi\left(0\right)=0$, maka $\nu_\lambda\left(Tz,z\right)=0$ sehingga $Tz=z$. Jadi, benar bahwa T mempunyai titik tetap z.

2. Lebih lanjut, akan ditunjukkan bahwa z tunggal.
Diasumsikan terdapat $w \in X_\nu^*$ sehingga $Tw=w$, maka

$$\begin{aligned}\phi\left(\nu_\lambda\left(z,w\right)\right) &= \phi\left(\nu_\lambda\left(Tz,Tw\right)\right)\\ &\leq p\{\phi\left(\nu_\lambda\left(z,w\right)\right)+\phi\left(\nu_\lambda\left(z,Tz\right)\right)+\phi\left(\nu_\lambda\left(w,Tw\right)\right)\}\\ &= p\,\phi\left(\nu_\lambda\left(z,w\right)\right)\end{aligned} \tag{34}$$

sehingga

$$(1-p)\,\phi\left(\nu_\lambda\left(z,w\right)\right)\leq 0.$$

Diperhatikan bahwa $p<\frac{1}{2s+1}$ dan $s\geq 1$, maka $1-p>0$ sehingga $\phi\left(\nu_\lambda\left(z,w\right)\right)=0$. Karena $\phi\left(0\right)=0$, maka $\nu_\lambda\left(z,w\right)=0$ sehingga diperoleh $z=w$. Dengan demikian, benar bahwa titik tetap T tunggal.

3. Selanjutnya, akan dibuktikan untuk setiap $x\in X_\nu^*$, barisan $T^n x$ konvergen ke z dan untuk $q=\frac{2p}{1-p}<1$ berlaku

$$\nu_\lambda\left(T^{n+1}x,T^n x\right)\leq q^n\,\nu_\lambda\left(x,Tx\right),\ n=1,2,\ldots.$$

Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\phi\left(\nu_\lambda\left(T^{n+1}x,T^n x\right)\right)&=\phi\left(\nu_\lambda\left(TT^n x,TT^{n-1}x\right)\right)\\&\leq p\left\{\begin{array}{l}\phi\left(\nu_\lambda\left(T^n x,T^{n-1}x\right)\right)+\phi\left(\nu_\lambda\left(T^n x,T^{n+1}x\right)\right)\\+\,\phi\left(\nu_\lambda\left(T^{n-1}x,T^n x\right)\right)\end{array}\right\}.\end{aligned}\tag{35}$$

Dengan analog yang serupa dengan pernyataan (8), diperoleh

$$\phi\left(\nu_\lambda\left(T^{n+1}x,T^n x\right)\right)\leq q\,\phi\left(\nu_\lambda\left(T^{n-1}x,\ T^n x\right)\right).\tag{36}$$

Akibatnya, menurut Teorema 2, untuk setiap $n\in N$ berlaku

$$\nu_\lambda\left(T^{n+1}x,T^n x\right)\leq q\,\nu_\lambda\left(T^{n-1}x,\ T^n x\right).\tag{37}$$

Selanjutnya, jika $n=1$, maka

$$\phi\left(\nu_\lambda\left(T^2x,Tx\right)\right)\leq q\,\phi\left(\nu_\lambda\left(x,\ Tx\right)\right)\tag{38}$$

sehingga menurut Teorema 2, diperoleh

$$\nu_\lambda\left(T^2x,Tx\right)\leq q\,\nu_\lambda\left(x,Tx\right).\tag{39}$$

Jika $n=2$, maka

$$\phi\left(\nu_\lambda\left(T^3x,T^2x\right)\right)\leq q\,\phi\left(\nu_\lambda\left(Tx,T^2x\right)\right)\tag{40}$$

sehingga menurut Teorema 2, diperoleh

$$\nu_\lambda\left(T^3x,T^2x\right)\leq q\,\nu_\lambda\left(Tx,T^2x\right).\tag{41}$$

Akibatnya, berdasarkan pernyataan (39) dan (41), diperoleh

$$\nu_\lambda\left(T^3x,T^2x\right)\leq q\,\nu_\lambda\left(Tx,T^2x\right)\leq q^2\,\nu_\lambda\left(x,Tx\right).\tag{42}$$

Jika $n=3$, maka

$$\phi\left(\nu_\lambda\left(T^4x,T^3x\right)\right)\leq q\,\phi\left(\nu_\lambda\left(T^2x,T^3x\right)\right)\tag{43}$$

sehingga menurut Teorema 2, diperoleh

$$\nu_\lambda\left(T^4x,T^3x\right)\leq q\,\nu_\lambda\left(T^2x,T^3x\right).\tag{44}$$

Akibatnya, berdasarkan pernyataan (42) dan (44), diperoleh

$$\nu_\lambda\left(T^4x, T^3x\right) \le q\,\nu_\lambda\left(T^2x, T^3x\right) \le q^3\,\nu_\lambda\left(x, Tx\right). \tag{45}$$

Jika proses dilanjutkan, maka diperoleh untuk setiap $n \in N$ berlaku

$$\nu_\lambda\left(T^{n+1}x, T^nx\right) \le q^n\,\nu_\lambda\left(x, Tx\right). \tag{46}$$

Karena $q < 1$, menurut pernyataan (23) dan (46), untuk $n \to \infty$ berlaku

$$\nu_\lambda\left(T^{n+1}x, T^nx\right) \to 0. \tag{47}$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\begin{aligned}\phi\left(\nu_\lambda\left(T^{n+1}x, z\right)\right) &= \phi\left(\nu_\lambda\left(TT^nx, Tz\right)\right)\\ &\le p\{\phi\left(\nu_\lambda\left(T^nx, z\right)\right) + \phi\left(\nu_\lambda\left(T^nx, T^{n+1}x\right)\right) + \phi\left(\nu_\lambda\left(z, Tz\right)\right)\}\\ &= p\{\phi\left(\nu_\lambda\left(T^nx, z\right)\right) + \phi\left(\nu_\lambda\left(T^nx, T^{n+1}x\right)\right)\}.\end{aligned} \tag{48}$$

Namakan $w_n = \nu_\lambda\left(T^nx, z\right)$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka

$$\phi\left(w_{n+1}\right) \le p\,\phi\left(w_n\right) + \phi\left(\nu_\lambda\left(T^nx, T^{n+1}x\right)\right) \tag{49}$$

Selanjutnya, diasumsikan untuk $n \to \infty$ berlaku $w_n \to h$ maka untuk $n \to \infty$ berlaku $w_{n+1} \to h$. Untuk membuktikan barisan $\{T^nx\}$ konvergen-ν ke z, cukup dengan membuktikan $h = 0$.
Berdasarkan Pernyataan (47), karena ϕ kontinu serta $\phi\left(0\right) = 0$, maka

$$\phi\left(\nu_\lambda\left(T^{n+1}x, T^nx\right)\right) \to 0. \tag{50}$$

Akibatnya, berdasarkan Pernyataan (49) dan (50), karena ϕ kontinu dan $\phi\left(0\right) = 0$, maka untuk $n \to \infty$ berlaku

$$\phi\left(h\right) \le p\,\phi\left(h\right) + \phi\left(0\right) \Leftrightarrow \left(1 - p\right)\,\phi\left(h\right) \le 0. \tag{51}$$

Selanjutnya, karena $1 - p > 0$, maka $\phi\left(h\right) = 0$ sehingga $h = 0$. Dengan kata lain, benar bahwa untuk setiap $x \in X_\nu^*$, barisan $\{T^nx\}$ konvergen-ν ke z dan untuk $q = \frac{2p}{1-p} < 1$, berlaku $\nu_\lambda\left(T^{n+1}x, T^nx\right) \le q^n\,\nu_\lambda\left(x, Tx\right),\ n = 1, 2, \ldots.$

□

Berdasarkan Teorema 3, terdapat beberapa akibat yang dinyatakan sebagai Teorema 4, Teorema 5, dan Teorema 6.

Teorema 4. *Diberikan $\lambda > 0$, b-metrik modular ν pada X, dan ruang b-metrik lengkap X_ν^* dengan koefisien $s \ge 1$. Jika $T : X_\nu^* \to X_\nu^*$ pemetaan yang memenuhi*

$$\nu_\lambda\left(Tx, Ty\right) \le p\{\nu_\lambda\left(x, y\right) + \nu_\lambda\left(x, Tx\right) + \nu_\lambda\left(y, Ty\right)\} \tag{52}$$

untuk setiap $x, y \in X_\nu^*$ *dengan* $p \in \left(0, \frac{1}{2s+1}\right)$, *maka* T *mempunyai titik tetap tunggal* $z \in X_\nu^*$ *dan untuk setiap* $x_0 \in X_\nu^*$, *barisan* $\left\{T^n x_0\right\}$ *konvergen ke* z.

Bukti. Dengan mengambil pemetaan *subadditive altering distance* $\phi(x) = x$, untuk setiap $x \in X_\nu^*$, maka untuk setiap $x, y \in X_\nu^*$ berlaku

$$\begin{aligned} \phi\left(\nu_\lambda\left(Tx, Ty\right)\right) &\leq \phi\left(p\, \nu_\lambda\left(x, y\right) + \nu_\lambda\left(x, Tx\right) + \nu_\lambda\left(y, Ty\right)\right) \\ &= p\{\nu_\lambda\left(x, y\right) + \nu_\lambda\left(x, Tx\right) + \nu_\lambda\left(y, Ty\right)\} \\ &= p\{\phi\left(\nu_\lambda\left(x, y\right)\right) + \phi\left(\nu_\lambda\left(x, Tx\right)\right) + \phi\left(\nu_\lambda\left(y, Ty\right)\right)\}. \end{aligned} \tag{53}$$

Dengan kata lain, T merupakan pemetaan tipe Kannan-ν_λ yang diperumum sehingga menurut Teorema 3, diperoleh bahwa T mempunyai titik tetap tunggal. □

Teorema 5. *Diberikan* $\lambda > 0$, *b-metrik modular* ν *pada* X, *dan ruang b-metrik lengkap* X_ν^* *dengan koefisien* $s \geq 1$. *Jika* $T : X_\nu^* \to X_\nu^*$ *pemetaan kontinu yang memenuhi sifat terdapat pemetaan subadditive altering distance* ϕ *dan* $p \in \left(0, \frac{1}{2s+1}\right)$ *sehingga untuk setiap* $x, y \in X_\nu^*$ *dan untuk suatu* $k \in \mathbb{N}$ *berlaku*

$$\phi\left(\nu_\lambda\left(T^k x, T^k y\right)\right) \leq\; p\left\{\phi\left(\nu_\lambda\left(x, y\right)\right) + \phi\left(\nu_\lambda\left(x, T^k x\right)\right) + \phi\left(\nu_\lambda\left(y, T^k y\right)\right)\right\} \tag{54}$$

dan $T^k x = x$, *maka* T *mempunyai titik tetap tunggal.*

Bukti. Didefinisikan pemetaan $S : X_\nu^* \to X_\nu^*$ dengan definisi

$$Sx = T^k x, \text{ untuk setiap } x \in X_\nu^*. \tag{55}$$

Akibatnya, untuk setiap $x, y \in X_\nu^*$ berlaku

$$\phi\left(\nu_\lambda\left(Sx, Sy\right)\right) \leq p\{\phi\left(\nu_\lambda\left(x, y\right)\right) + \phi\left(\nu_\lambda\left(x, Sx\right)\right) + \phi\left(\nu_\lambda\left(y, Sy\right)\right)\} \tag{56}$$

yang berarti S merupakan pemetaan tipe Kannan-ν_λ yang diperumum. Dengan demikian, menurut Teorema 4, diperoleh S mempunyai titik tetap tunggal. Dengan demikian, terdapat $z \in X_\nu^*$ sehingga $T^k z = Sz = z$. Karena $T^k z = z$, maka $T^{k+1} z = TT^k z = Tz$ sehingga $STz = T^k\left(Tz\right) = T^{k+1} z = Tz$. Dengan demikian, Tz juga merupakan titik tetap S. Berdasarkan ketunggalan titik tetap S, maka diperoleh $Tz = z$. □

Teorema 6. *Diberikan* $\lambda > 0$, *b-metrik modular* ν *pada* X, *dan ruang b-metrik lengkap* X_ν^* *dengan koefisien* $s \geq 1$. *Jika* $T : X_\nu^* \to X_\nu^*$ *suatu pemetaan yang memenuhi terdapat* $p \in \left(0, \frac{1}{2s+1}\right)$ *sehingga untuk setiap* $x, y \in X_\nu^*$ *berlaku*

$$1 + \nu_\lambda\left(Tx, Ty\right)^{\frac{1}{p}} < \left(1 + \nu_\lambda\left(x, y\right)\right)\left(1 + \nu_\lambda\left(x, Tx\right)\right)\left(1 + \nu_\lambda\left(y, Ty\right)\right) \tag{57}$$

maka T *mempunyai titik tetap tunggal* $z \in X_\nu^*$ *dan untuk setiap* $x \in X_\nu^*$, *barisan* $\left\{T^n x\right\}$ *konvergen ke* z *serta untuk* $q = \frac{2p}{1-p}$ *berlaku*

$$\nu_\lambda\left(T^{n+1}x, T^n x\right) \leq q^n\, \nu_\lambda(x, Tx),\; n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{58}$$

Bukti. Diperhatikan bahwa untuk setiap $x, y \in X_\nu^*$ berlaku

$$\begin{aligned}
& \{1+\nu_\lambda(Tx,Ty)\}^{\frac{1}{p}} < (1+\nu_\lambda(x,y))(1+\nu_\lambda(x,Tx))(1+\nu_\lambda(y,Ty)) \\
\Leftrightarrow\; & \ln\{1+\nu_\lambda(Tx,Ty)\}^{\frac{1}{p}} < \ln\{(1+\nu_\lambda(x,y))(1+\nu_\lambda(x,Tx))(1+\nu_\lambda(y,Ty))\} \\
\Leftrightarrow\; & \frac{1}{p}\ln\{1+\nu_\lambda(Tx,Ty)\} < \ln(1+\nu_\lambda(x,y)) + \ln(1+\nu_\lambda(x,Tx)) + \ln(1+\nu_\lambda(y,Ty)) \\
\Leftrightarrow\; & \ln\{1+\nu_\lambda(Tx,Ty)\} < p\{\ln(1+\nu_\lambda(x,y)) + \ln(1+\nu_\lambda(x,Tx)) + \ln(1+\nu_\lambda(y,Ty))\}.
\end{aligned}$$

Diambil pemetaan *subadditive altering distance* $\phi(z) = \ln(1+z)$, untuk setiap $z \in [0, \infty)$, maka untuk setiap $x, y \in X_\nu^*$ berlaku

$$\phi(\nu_\lambda(Tx,Ty)) \leq p\{\phi(\nu_\lambda(x,y)) + \phi(\nu_\lambda(x,Tx)) + \phi(\nu_\lambda(y,Ty))\} \tag{59}$$

Dengan kata lain, T merupakan pemetaan tipe Kannan-ν_λ yang diperumum sehingga menurut Teorema 3, diperoleh T mempunyai titik tetap tunggal untuk setiap $x \in X_\nu^*$, barisan $\{T^n x\}$ konvergen ke z serta untuk $q = \frac{2p}{1-p}$ dengan $q > 0$ berlaku

$$\nu_\lambda\left(T^{n+1}x, T^n x\right) \leq q^n\, \nu_\lambda(x, Tx),\; n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{60}$$

$\square$

4. Kesimpulan

Pemetaan tipe Kannan yang diperumum $T : X_\nu^* \to X_\nu^*$ dapat didefinisikan pada ruang b-metrik modular (X, ν) dan mempunyai titik tetap tunggal pada ruang b-metrik modular X_ν^* yang lengkap. Selain itu, suatu $T : X_\nu^* \to X_\nu^*$ dengan X_ν^* ruang b-metrik modular lengkap yang memenuhi kondisi tertentu dapat ditentukan suatu fungsi *subadditive altering distance* sehingga pemetaan tersebut menjadi pemetaan tipe Kanan yang diperumum yang mengakibatkan pemetaan tersebut akan mempunyai titik tetap yang tunggal.

Ucapan Terima Kasih

Ucapan terima kasih kepada Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakt (LPPM) Universitas Nahdlatul Ulama Purwokerto yang telah membantu dan mendukung pelaksanaan penelitian ini.

Referensi

[1] R. P. Agarwal, M. Meehan, and D. O'Regan, *Fixed Point Theory and Applications*. Cambridge University Press, 2001, doi: 10.1017/CBO9780511543005.

[2] S. Banach, "Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales," *Fundamenta Mathematicae*, vol. 3, no. 1, pp. 133–181, 1922, [online]. available: http://eudml.org/doc/213289.

[3] J. Morales and E. Rojas, "Some fixed point theorems by altering distance functions," *Palestine Journal of Mathematics*, vol. 1, no. 2, pp. 110–116, 2012.

[4] M. Khan, M. Swaleh, and S. Sessa, "Fixed point theorems by altering distances between the points," *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, vol. 30, no. 1, pp. 1–9, 1984, doi: 10.1017/S0004972700001659.

[5] S. Czerwik, "Contraction mappings in *b*-metric spaces," *Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis*, vol. 01, no. 1, pp. 5–11, 1993, [online]. available: http://eudml.org/doc/23748.

[6] R. Kannan, "Some results on fixed points–ii," *The American Mathematical Monthly*, vol. 76, no. 4, p. 405, 1969, doi: 10.2307/2316437.

[7] J. Gornicki, "Fixed point theorems for kannan type mappings," *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, vol. 19, no. 3, pp. 2145–2152, 2017, doi: 10.1007/s11784-017-0402-8.

[8] N. Haokip and N. Goswami, "Some fixed point theorems for generalized kannan type mappings in b-metric spaces," *Proyecciones (Antofagasta)*, vol. 38, no. 4, pp. 763–782, 2019, doi: 10.22199/issn.0717-6279-2019-04-0050.

[9] J. Musielak and W. Orlicz, "On modular spaces," *Studia Mathematica*, vol. 18, no. 1, pp. 49–65, 1959, [online]. available: http://eudml.org/doc/216946.

[10] V. V. Chistyakov, "Modular metric spaces, i: Basic concepts," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 72, no. 1, pp. 1–14, 2010, doi: https://doi.org/10.1016/j.na.2009.04.057.

[11] M. E. Ege and C. Alaca, "Some results for modular b-metric spaces and an application to system of linear equations," *Azerbaijan Journal of Mathematics*, vol. 8, no. 1, pp. 1–11, 2018.

[12] V. Parvaneh and S. J. Hosseini Ghoncheh, "Fixed points of (ψ, φ) ω-contractive mappings in ordered p-metric spaces," *Global Analysis and Discrete Mathematics*, vol. 4, no. 1, pp. 15–29, 2019, doi: 10.22128/gadm.2019.290.1019.

[13] A. Gholidahneh, S. Sedghi, O. Ege, Z. D. Mitrovic, and M. de la Sen, "The meir-keeler type contractions in extended modular *b*-metric spaces with an application," *AIMS Mathematics*, vol. 6, no. 2, pp. 1781–1799, 2021, doi: 10.3934/math.2021107.

[14] A. Hayati, "Some coincidence point theorems in modular spaces," *Mathline : Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, vol. 7, no. 1, pp. 91–109, 2022, doi: 10.31943/mathline.v7i1.260.

[15] R. Özçelik and E. E. Kara, "Coincidence point theorems on *b*-metric spaces via $c_{\{F\}}$-simulation functions," *Communications in Advanced Mathematical Sciences*, vol. 2, no. 4, pp. 244–250, 2019, doi: 10.33434/cams.567268.

[16] M. Berzig and M. Bouali, "A coincidence point theorem and its applications to fractional differential equations," *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, vol. 22, no. 3, p. 56, 2020, doi: 10.1007/s11784-020-00794-5.

[17] A. Hayati, L. Harini, A. Winarni, and N. Muhassanah, "Teori titik tetap untuk pemetaan $(\psi,\varphi)\omega$-kontraksi pada ruang p-metrik modular berorder," *PYTHAGORAS Jurnal Pendidikan Matematika*, vol. 17, no. 2, 2022, doi: 10.21831/pythagoras.v17i2.52985.

[18] J. Hernadi, "Metoda pembuktian dalam matematika," *Jurnal Pendidikan Matematika*, vol. 2, no. 1, pp. 1–13, 2018.

[19] M. Demma, R. Saadati, and P. Vetro, "Fixed point result on b-metric spaces via picard sequences and b-simulation functions," *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, vol. 11, no. 1, pp. 123–136, 2016.

[20] P. Corazza, "Introduction to metric-preserving functions," *The American Mathematical Monthly*, vol. 106, no. 4, pp. 309–323, 1999, doi: 10.2307/2589554.