RESEARCH ARTICLE • OPEN ACCESS

Klasifikasi Aljabar Lie Forbenius-Quasi dari Aljabar Lie Filiform Berdimensi ≤ 5

Putri Nisa Pratiwi, Edi Kurniadi, dan Firdaniza Firdaniza

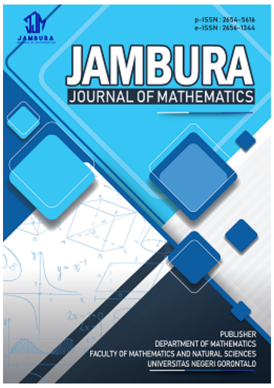
JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS

Volume 6, Issue 1, Pages 11–15, February 2024

Submit 17 Oktober 2023, Direvisi 11 November 2023, Disetujui 17 November 2023

To Cite this Article : P. N. Pratiwi, E. Kurniadi, dan F. Firdaniza,“Klasifikasi Aljabar Lie Forbenius-Quasi dari Aljabar Lie Filiform Berdimensi $\leq$ 5”, *Jambura J. Math*, vol. 6, no. 1, pp. 11–15, 2024, *https://doi.org/10.37905/jjom.v6i1.22481*

JOURNAL INFO • JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS



Homepage	:	http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/index
Journal Abbreviation	:	Jambura J. Math.
Frequency	:	Biannual (February and August)
Publication Language	:	English (preferable), Indonesia
DOI	:	https://doi.org/10.37905/jjom
Online ISSN	:	2656-1344
Editor-in-Chief	:	Hasan S. Panigoro
Publisher	:	Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo
Country	:	Indonesia
OAI Address	:	http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/oai
Google Scholar ID	:	iWLjgaUAAAAJ
Email	:	info.jjom@ung.ac.id

Jambura Journal of Mathematics, Volume 6, Issue 1, Pages 11–15, February 2024 https://doi.org/10.37905/jjom.v6i1.22481

Research Article

Check for updates

Klasifikasi Aljabar Lie Forbenius-Quasi dari Aljabar Lie Filiform Berdimensi ≤ 5

Putri Nisa Pratiwi[1,*], **Edi Kurniadi**[1], **dan Firdaniza Firdaniza**[1]

[1]*Departemen Matematika, Universitas Padjadjaran, Indonesia*

ARTICLE HISTORY
Submit 17 Oktober 2023
Direvisi 11 November 2023
Disetujui 17 November 2023

KATA KUNCI
Aljabar Lie filiform
Aljabar Lie Frobenius-quasi
Nondegenerate 2-*cocycle*

KEYWORDS
Filiform Lie Algebra
Quasi-Frobenius Lie Algebra
Nondegenerate 2-cocycle

ABSTRAK. *Dalam penelitian ini dipelajari tentang aljabar Lie Frobenius-quasi real dan aljabar Lie filiform berdimensi ≤ 5. Penelitian ini bertujuan untuk menetapkan klasifikasi aljabar Lie filiform berdimensi ≤ 5 ke dalam aljabar Lie Frobenius-quasi real. Metode yang digunakan adalah dengan mengkonstruksi skew-symmetric 2-form pada aljabar Lie real yang nondegenerate 2-cocycle. Hasil yang diperoleh adalah terdapat suatu kelas aljabar Lie filiform berdimensi ≤ 5 yang termasuk ke dalam aljabar Lie Frobenius-quasi real. Untuk selanjutnya, penelitian ini dapat dikembangkan untuk mengklasifikasikan aljabar Lie filiform berdimensi lebih tinggi ke dalam aljabar Lie Frobenius-quasi real.*

ABSTRACT. *In this research, we studied quasi-Frobenius Lie algebras and filiform Lie algebras of dimensions ≤ 5 over real field. The primary objective of this research is to classify the classification of filiform Lie algebras of dimensions ≤ 5 into quasi-Frobenius Lie algebras. The method employed in this research involves constructing a skew-symmetric 2-form in real Lie algebra which also a nondegenerate 2-cocycle. The outcomes of this research reveal that there exists a class of filiform Lie algebras of dimensions ≤ 5 that can be classified as a quasi-Frobenius real Lie algebra. Furthermore, this research can be developed to classify higher dimensional filiform Lie algebras as quasi-Frobenius real Lie algebras.*

 Editorial of JJBM: Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo, Jln. Prof. Dr. Ing. B. J. Habibie, Bone Bolango 96554, Indonesia.

1. Pendahuluan

Aljabar Lie ditemukan pada akhir abad ke-19 oleh seorang matematikawan asal Norwegia bernama Marius Sophus Lie. Penelitian mengenai aljabar Lie sudah banyak dilakukan, seperti klasifikasi aljabar Lie nilpoten berdimensi ≤ 7 oleh Michele Vergne yang sekaligus memperkenalkan aljabar Lie filiform dan mengklasifikasikannya hingga dimensi 6 [1]. Secara umum, aljabar Lie filiform berdimensi n memiliki *adapted basis* $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ dan *bracket* tak nol $[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_j] = \boldsymbol{x}_{j-1}$ untuk setiap $3 \leq j \leq n$ [2]. Namun, klasifikasi aljabar Lie filiform atas lapangan kompleks baru diperoleh sampai dimensi ≤ 12 [3–5]. Klasifikasi aljabar Lie filiform dapat dipelajari lebih lanjut, seperti klasifikasi aljabar Lie filiform *symplectic* kompleks berdimensi ≤ 10 beserta semua *symplectic form*-nya [6].

Aljabar Lie *symplectic* dapat disebut juga sebagai aljabar Lie Frobenius-quasi [7]. Suatu aljabar Lie dikatakan *symplectic* atau Frobenius-quasi jika terdapat *skew-symmetric* 2-*form* yang *nondegenerate* dan 2-*cocycle* [8]. *Symplectic form* suatu aljabar Lie ditunjukkan di dalam beberapa penelitian, seperti *symplectic form* untuk aljabar Lie berdimensi 4 [9], *complex symplectic form* untuk aljabar Lie nilpoten [10], *symplectic form* untuk *3-Lie algebras* [11], gambaran eksplisit mengenai *free nilpotent Lie algebras* yang memiliki *symplectic form* [12], *symplectic form* untuk aljabar Lie filiform [13, 14], dan *symplectic form* pada *characteristically nilpotent Lie algebras* (CNLAs) termasuk filiform CNLAs berdimensi ≤ 14 [7]. *Symplectic form* untuk aljabar Lie filiform berdimensi 4 secara eksplisit didefinisikan oleh Pham [8] sebagai

$$\beta = \boldsymbol{x}_1^* \wedge \boldsymbol{x}_4^* + \boldsymbol{x}_2^* \wedge \boldsymbol{x}_3^* \tag{1}$$

dimana $\{\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \boldsymbol{x}_3^*, \boldsymbol{x}_4^*\}$ merupakan basis dual dan β memenuhi kondisi Frobenius-quasi. Untuk membuktikannya, perlu ditunjukkan bahwa β merupakan bentuk *skew-symmetric* 2-*form* yang *nondegenerate* dan 2-*cocycle*.

Berbeda dari penelitian sebelumnya, pada penelitian ini diberikan pembuktian secara detail bahwa aljabar Lie filiform berdimensi 4 merupakan Frobenius-quasi. Kemudian diperiksa apakah aljabar Lie filiform berdimensi 3 dan 5 merupakan Frobenius-quasi. Selain itu, dijelaskan mengenai konstruksi *skew-symmetric* 2-*form* untuk aljabar Lie filiform berdimensi ≤ 5.

2. Metode

Metode yang digunakan adalah metode penelitian kualitatif berupa studi literatur yang mengacu pada [8] serta beberapa artikel lainnya yang terkait dengan aljabar Lie Frobenius-quasi dan aljabar Lie filiform. Metode yang digunakan untuk mengklasifikasikan aljabar Lie Frobenius-quasi dari aljabar Lie filiform berdimensi ≤ 5 adalah dengan mengonstruksi 2-*form* dari dua 1-*form*

*Penulis Korespondensi.

Email : *putri20003@mail.unpad.ac.id* (P. N. Pratiwi)
Homepage : http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/index / E-ISSN : 2656-1344

berbeda yang *nondegenerate* dan 2-*cocycle*. Berikut diberikan beberapa landasan teori yang merujuk pada [8] untuk membuktikan hasil penelitian.

Definisi 1. [15] *Misalkan V suatu ruang vektor berdimensi n dengan basis $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ dan $B^* = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ basis untuk V^* dual dari B. Untuk $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$, definisikan k-form pada V sebagai*

$$(\varepsilon_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{i_k})(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{i_1}(\boldsymbol{v}_1) & \cdots & \varepsilon_{i_1}(\boldsymbol{v}_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{i_k}(\boldsymbol{v}_1) & \cdots & \varepsilon_{i_k}(\boldsymbol{v}_k) \end{vmatrix} \tag{2}$$

untuk setiap $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$.

Definisi 2. [15] *Misalkan V suatu ruang vektor berdimensi n dengan basis $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ dan $B^* = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ basis untuk V^*. Penjumlahan 2-form pada V untuk $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$ didefinisikan sebagai*

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2} + \cdots + \varepsilon_{i_{k-1}} \wedge \varepsilon_{i_k})(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = (\varepsilon_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2})\\ (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) + \cdots + (\varepsilon_{i_{k-1}} \wedge \varepsilon_{i_k})(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\end{aligned} \tag{3}$$

untuk setiap $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$.

Teorema 1. *[16] Misalkan $\mathfrak{g}$ aljabar Lie atas lapangan $\mathbb{R}$ dengan basis $S = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ dan β skew-symmetric 2-form pada $\mathfrak{g}$. β dikatakan nondegenerate jika dan hanya jika untuk setiap $1 \leq i, j \leq n$ berlaku*

$$|M| = \begin{vmatrix} \beta(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) & \beta(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) & \cdots & \beta(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_j) \\ \beta(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1) & \beta(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) & \cdots & \beta(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_1) & \beta(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_2) & \cdots & \beta(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_n) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4}$$

Bukti. $(\Rightarrow)$ β *nondegenerate*, menurut Definisi 1 jika $\boldsymbol{u} \in \mathfrak{g}$ dengan $\beta(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ untuk setiap $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}$, maka $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$. Untuk menunjukkan bahwa $|M| \neq 0$, klaim matriks persegi $M = (\beta(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j)), 1 \leq i, j \leq n$, sebagai matriks representasi untuk β. Sehingga $\beta(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}^T M \boldsymbol{u} = 0$, maka $\boldsymbol{v}^T M \boldsymbol{u} = 0 \; \forall \boldsymbol{v} \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow M\boldsymbol{u} = 0$. Karena β *nondegenerate*, maka $M\boldsymbol{u} = 0$ dipenuhi oleh $\boldsymbol{u} = 0$ artinya M *invertible*. Karena M *invertible*, maka $|M| \neq 0$.

$(\Leftarrow)$ Sebaliknya, $|M| \neq 0$, artinya matriks M *invertible*. Untuk menunjukkan β *nondegenerate*, terlihat jelas bahwa $\beta(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}^T M \boldsymbol{u} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v}^T M \boldsymbol{u} = 0$. Karena M *invertible*, maka $M\boldsymbol{u} = 0$ hanya dipenuhi oleh $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$. □

Definisi 3. [8] *Misalkan $\mathfrak{g}$ adalah aljabar Lie dan β skew-symmetric 2-form pada $\mathfrak{g}$. β dikatakan 2-cocycle pada aljabar Lie $\mathfrak{g}$ jika memenuhi*

$$\beta([\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}], \boldsymbol{z}) + \beta([\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}], \boldsymbol{x}) + \beta([\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}], \boldsymbol{y}) = 0, \; \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathfrak{g}. \tag{5}$$

Definisi 4. [8] *Suatu aljabar Lie Frobenius-quasi atas $\mathbb{R}$ adalah pasangan $(\mathfrak{g}, \beta)$ dengan $\mathfrak{g}$ aljabar Lie atas $\mathbb{R}$ dan β suatu nondegenerate 2-cocycle pada aljabar Lie yang bernilai real.*

Selanjutnya, langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian adalah:

1. Tentukan aljabar Lie yang digunakan, yaitu aljabar Lie filiform berdimensi n, dengan $n \leq 5$.
2. Tentukan *skew-symmetric* 2-*form*, yaitu β. Untuk menentukan 2-*form*, pilih dua 1-*form* yang berbeda lalu operasikan dengan *wedge product* yang didefinisikan dalam Definisi 1. Dalam hal ini, 1-*form* merupakan dual basis dari aljabar Lie filiform berdimensi n, dengan $n \leq 5$.
3. Periksa apakah β memenuhi sifat *nondegenerate* menggunakan Teorema 1.
4. Periksa apakah β memenuhi kondisi 2-*cocycle* menggunakan Definisi 3.
5. Klasifikasikan aljabar Lie Frobenius-quasi dari aljabar Lie filiform berdimensi n, dengan $n \leq 5$.

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini, ditunjukkan hasil utama yang merupakan pembuktian detail dari [8], yaitu bahwa aljabar Lie filiform berdimensi 4 adalah Frobenius-quasi. Selain itu, diperiksa apakah aljabar Lie filiform berdimensi 3 dan 5 merupakan Frobenius-quasi. Misalkan $\mathfrak{g}_n$ aljabar Lie filiform standar dan nonstandar berdimensi ≤ 5 dengan *bracket* tak nolnya adalah

$$\mathfrak{g}_3 \quad : \quad [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2] = x_3, \tag{6}$$

$$\mathfrak{g}_4 \quad : \quad [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2] = \boldsymbol{x}_3, \; [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3] = \boldsymbol{x}_4, \tag{7}$$

$$\mathfrak{g}_5 \quad : \quad \begin{cases} \mathfrak{g}_5^1 : [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_i] = \boldsymbol{x}_{i+1}, \text{ untuk } i = 2, 3, 4 \\ \mathfrak{g}_5^2 : [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_i] = \boldsymbol{x}_{i+1}, \; i = 2, 3, 4 \text{ dan } [\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3] = \boldsymbol{x}_5. \end{cases} \tag{8}$$

Proposisi 1. *Misalkan $\mathfrak{g}_3$ aljabar Lie filiform berdimensi 3 dengan basis $B_3 = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$ dan bracket Lie tak nolnya didefinisikan oleh persamaan (6). Misalkan β sebagai skew-symmetric 2-form pada $\mathfrak{g}_3$, maka untuk setiap β, pasangan $(\mathfrak{g}_3, \beta)$ bukan aljabar Lie Frobenius-quasi.*

Bukti. Jelas bahwa $\mathfrak{g}_3$ berdimensi ganjil, maka $\mathfrak{g}_3$ tidak memiliki *symplectic form*. Hal ini disebabkan oleh setiap 2-*form* yang mungkin pada $\mathfrak{g}_3$ tidak memenuhi sifat *nondegenerate*. Untuk menunjukkannya, konstruksi β sebagai 2-*form* untuk $\mathfrak{g}_3$ dengan memilih dua 1-*form* berbeda yang dioperasikan dengan *wedge product*. Diberikan 1-*form* yaitu $B_3^* = \{\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \boldsymbol{x}_3^*\}$, sehingga konstruksi 2-*form* yang mungkin ada pada $\mathfrak{g}_3$ adalah $\beta = \text{Span}\{\boldsymbol{x}_1^* \wedge \boldsymbol{x}_2^*, \boldsymbol{x}_1^* \wedge \boldsymbol{x}_3^*, \boldsymbol{x}_2^* \wedge \boldsymbol{x}_3^*\}$. *Wedge product* yang didefinisikan oleh Definisi 1 menjelaskan bahwa setiap 2-*form* $\boldsymbol{x}_i^* \wedge \boldsymbol{x}_j^*$ pasti *skew-symmetric* berdasarkan sifat fungsi determinan matriks.

Dengan kata lain, $\beta = \text{Span}\left\{\boldsymbol{x}_1^* \wedge \boldsymbol{x}_2^*, \boldsymbol{x}_1^* \wedge \boldsymbol{x}_3^*, \boldsymbol{x}_2^* \wedge \boldsymbol{x}_3^*\right\}$ merupakan *skew-symmetric* 2-*form* untuk $\mathfrak{g}_3$.

Selanjutnya, misalkan $\beta = \text{Span}\left\{\boldsymbol{x}_1^* \wedge \boldsymbol{x}_2^*, \boldsymbol{x}_1^* \wedge \boldsymbol{x}_3^*, \boldsymbol{x}_2^* \wedge \boldsymbol{x}_3^*\right\}$= Span $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ dan M_1, M_2, M_3 adalah matriks representasi untuk masing-masing $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Berdasarkan Teorema 1, perhatikan bahwa

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Misalkan M matriks representasi untuk β, maka berdasarkan Definisi 2 terlihat jelas bahwa setiap β di $\mathfrak{g}_3$ menghasilkan $|M| = 0$ sehingga β tidak *nondegenerate*. Dengan kata lain, setiap 2-*form* yang mungkin ada pada $\mathfrak{g}_3$ tidak memenuhi sifat *nondegenerate*. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 4, pasangan $(\mathfrak{g}_3, \beta)$ bukan aljabar Lie Frobenius-quasi. □

Proposisi 2. *Misalkan $\mathfrak{g}_4$ aljabar Lie filiform berdimensi 4 dengan basis $B_4 = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4\}$ dan bracket Lie tak nolnya didefinisikan oleh persamaan* (7). *Misalkan β sebagai skew-symmetric 2-form pada $\mathfrak{g}_4$ yang didefinisikan sebagai*

$$\beta = \boldsymbol{x}_1^* \wedge \boldsymbol{x}_4^* + \boldsymbol{x}_2^* \wedge \boldsymbol{x}_3^* \tag{9}$$

dengan $B_4^* = \{\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \boldsymbol{x}_3^*, \boldsymbol{x}_4^*\}$. basis dual dari B_4, maka pasangan $(\mathfrak{g}_4, \beta)$ merupakan aljabar Lie Frobenius-quasi.

Bukti. Dalam penelitian [8] telah diperoleh 2-*form* untuk aljabar Lie filiform $\mathfrak{g}_4$ dengan basis $B_4 = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4\}$ dan basis dual $B_4^* = \{\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \boldsymbol{x}_3^*, \boldsymbol{x}_4^*\}$, yaitu diberikan oleh persamaan (9). Perlu dibuktikan bahwa β adalah *skew-symmetric* 2-*form*. Berdasarkan Definisi 2, maka persamaan (9) dapat dinyatakan sebagai,

$$\begin{aligned} \beta(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) &= (\boldsymbol{x}_1^* \wedge \boldsymbol{x}_4^* + \boldsymbol{x}_2^* \wedge \boldsymbol{x}_3^*)(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) \\ &= (\boldsymbol{x}_1^* \wedge \boldsymbol{x}_4^*)(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) + (\boldsymbol{x}_2^* \wedge \boldsymbol{x}_3^*)(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_1^*(\boldsymbol{x}_i) & \boldsymbol{x}_1^*(\boldsymbol{x}_j) \\ \boldsymbol{x}_4^*(\boldsymbol{x}_i) & \boldsymbol{x}_4^*(\boldsymbol{x}_j) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_2^*(\boldsymbol{x}_i) & \boldsymbol{x}_2^*(\boldsymbol{x}_j) \\ \boldsymbol{x}_3^*(\boldsymbol{x}_i) & \boldsymbol{x}_3^*(\boldsymbol{x}_j) \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

untuk setiap $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j \in \mathfrak{g}_4$ dengan $1 \leq i, j \leq 4$. Berdasarkan sifat fungsi determinan suatu matriks, maka terbukti bahwa β merupakan *skew-symmetric* 2-*form*. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa β memenuhi kondisi *nondegenerate* dan 2-*cocycle*. Dengan menggunakan Teorema 1 diperoleh matriks representasi untuk β, yaitu

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

dan terlihat jelas bahwa $|M| = 1 \neq 0$, maka β *nondegenerate*.

Selanjutnya, perlu dibuktikan bahwa kondisi 2-*cocycle* dipenuhi oleh β. Diketahui bahwa B_4 basis untuk $\mathfrak{g}_4$, maka $\mathfrak{g}_4$ = Span B_4 sehingga sembarang elemen $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathfrak{g}_4$ dapat ditulis sebagai

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3 + a_4\boldsymbol{x}_4 = \sum_{i=1}^4 a_i\boldsymbol{x}_i, \{a_i\}_{i=1}^4 \in \mathbb{R}, \\ \boldsymbol{y} = b_1\boldsymbol{x}_1 + b_2\boldsymbol{x}_2 + b_3\boldsymbol{x}_3 + b_4\boldsymbol{x}_4 = \sum_{j=1}^4 b_j\boldsymbol{x}_j, \{b_j\}_{j=1}^4 \in \mathbb{R}, \\ \boldsymbol{z} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 + c_4\boldsymbol{x}_4 = \sum_{k=1}^4 c_k\boldsymbol{x}_k, \{c_k\}_{k=1}^4 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{12}$$

Selanjutnya diperiksa apakah persamaan (5) terpenuhi.

$$\begin{aligned} \beta([\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}], \boldsymbol{z}) = \beta & \left(\left[\sum_{i=1}^4 a_i\boldsymbol{x}_i, \sum_{j=1}^4 b_j\boldsymbol{x}_j \right], \sum_{k=1}^4 c_k\boldsymbol{x}_k \right) \\ &= \beta(a_1b_2\boldsymbol{x}_3 + a_1b_3\boldsymbol{x}_4 - a_2b_1\boldsymbol{x}_3 - a_3b_1\boldsymbol{x}_4, \\ &\quad c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 + c_4\boldsymbol{x}_4) \\ &= (\boldsymbol{x}_1^* \wedge \boldsymbol{x}_4^* + \boldsymbol{x}_2^* \wedge \boldsymbol{x}_3^*)(a_1b_2\boldsymbol{x}_3 + a_1b_3\boldsymbol{x}_4 - a_2b_1\boldsymbol{x}_3 \\ &\quad - a_3b_1\boldsymbol{x}_4, c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 + c_4\boldsymbol{x}_4) \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_1^*(\boldsymbol{k_1}) & \boldsymbol{x}_1^*(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 + c_4\boldsymbol{x}_4) \\ \boldsymbol{x}_4^*(\boldsymbol{k_1}) & \boldsymbol{x}_4^*(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 + c_4\boldsymbol{x}_4) \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_2^*(\boldsymbol{k_1}) & \boldsymbol{x}_2^*(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 + c_4\boldsymbol{x}_4) \\ \boldsymbol{x}_3^*(\boldsymbol{k_1}) & \boldsymbol{x}_3^*(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 + c_4\boldsymbol{x}_4) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & c_1 \\ a_1b_3 - a_3b_1 & c_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & c_2 \\ a_1b_2 - a_2b_1 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= a_3b_1c_1 - a_1b_3c_1 + a_2b_1c_2 - a_1b_2c_2. \end{aligned} \tag{13}$$

dengan

$$\boldsymbol{k_1} = a_1b_2\boldsymbol{x}_3 + a_1b_3\boldsymbol{x}_4 - a_2b_1\boldsymbol{x}_3 - a_3b_1\boldsymbol{x}_4$$

$$\begin{aligned} \beta([\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}], \boldsymbol{x}) = \beta & \left(\left[\sum_{j=1}^4 b_j\boldsymbol{x}_j, \sum_{k=1}^4 c_k\boldsymbol{x}_k \right], \sum_{i=1}^4 a_i\boldsymbol{x}_i \right) \\ &= \beta(b_1c_2\boldsymbol{x}_3 + b_1c_3\boldsymbol{x}_4 - b_2c_1\boldsymbol{x}_3 - b_3c_1\boldsymbol{x}_4, \\ &\quad a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3 + a_4\boldsymbol{x}_4) \\ &= (\boldsymbol{x}_1^* \wedge \boldsymbol{x}_4^* + \boldsymbol{x}_2^* \wedge \boldsymbol{x}_3^*)(b_1c_2\boldsymbol{x}_3 + b_1c_3\boldsymbol{x}_4 - \\ &\quad b_2c_1\boldsymbol{x}_3 - b_3c_1\boldsymbol{x}_4, a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3 + a_4\boldsymbol{x}_4) \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_1^*(\boldsymbol{k_2}) & \boldsymbol{x}_1^*(a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3 + a_4\boldsymbol{x}_4) \\ \boldsymbol{x}_4^*(\boldsymbol{k_2}) & \boldsymbol{x}_4^*(a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3 + a_4\boldsymbol{x}_4) \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_2^*(\boldsymbol{k_2}) & \boldsymbol{x}_2^*(a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3 + a_4\boldsymbol{x}_4) \\ \boldsymbol{x}_3^*(\boldsymbol{k_2}) & \boldsymbol{x}_3^*(a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3 + a_4\boldsymbol{x}_4) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & a_1 \\ b_1c_3 - b_3c_1 & a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_2 \\ b_1c_2 - b_2c_1 & a_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 + a_2b_2c_1 - a_2b_1c_2. \end{aligned} \tag{14}$$

dengan

$$\boldsymbol{k_2} = b_1c_2\boldsymbol{x}_3 + b_1c_3\boldsymbol{x}_4 - b_2c_1\boldsymbol{x}_3 - b_3c_1\boldsymbol{x}_4$$

$$
\begin{aligned}
\beta\left(\left[\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}\right],\boldsymbol{y}\right) = \beta&\left(\left[\sum_{k=1}^{4} c_k\boldsymbol{x}_k, \sum_{i=1}^{4} a_i\boldsymbol{x}_i\right], \sum_{j=1}^{4} b_j\boldsymbol{x}_j\right)\\
=&\beta\left(a_2c_1\boldsymbol{x}_3 + a_3c_1\boldsymbol{x}_4 - a_1c_2\boldsymbol{x}_3 - a_1c_3\boldsymbol{x}_4,\right.\\
&\left. b_1\boldsymbol{x}_1 + b_2\boldsymbol{x}_2 + b_3\boldsymbol{x}_3 + b_4\boldsymbol{x}_4\right)\\
=&\left(\boldsymbol{x}_1^*\wedge\boldsymbol{x}_4^* + \boldsymbol{x}_2^*\wedge\boldsymbol{x}_3^*\right)\left(a_2c_1\boldsymbol{x}_3 + a_3c_1\boldsymbol{x}_4 -\right.\\
&\left. a_1c_2\boldsymbol{x}_3 - a_1c_3\boldsymbol{x}_4, b_1\boldsymbol{x}_1 + b_2\boldsymbol{x}_2 + b_3\boldsymbol{x}_3 + b_4\boldsymbol{x}_4\right)\\
=&\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_1^*\left(\boldsymbol{k_3}\right) & \boldsymbol{x}_1^*\left(b_1\boldsymbol{x}_1 + b_2\boldsymbol{x}_2 + b_3\boldsymbol{x}_3 + b_4\boldsymbol{x}_4\right)\\ \boldsymbol{x}_4^*\left(\boldsymbol{k_3}\right) & \boldsymbol{x}_4^*\left(b_1\boldsymbol{x}_1 + b_2\boldsymbol{x}_2 + b_3\boldsymbol{x}_3 + b_4\boldsymbol{x}_4\right)\end{vmatrix}\\
+&\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_2^*\left(\boldsymbol{k_3}\right) & \boldsymbol{x}_2^*\left(b_1\boldsymbol{x}_1 + b_2\boldsymbol{x}_2 + b_3\boldsymbol{x}_3 + b_4\boldsymbol{x}_4\right)\\ \boldsymbol{x}_3^*\left(\boldsymbol{k_3}\right) & \boldsymbol{x}_3^*\left(b_1\boldsymbol{x}_1 + b_2\boldsymbol{x}_2 + b_3\boldsymbol{x}_3 + b_4\boldsymbol{x}_4\right)\end{vmatrix}\\
=&\begin{vmatrix} 0 & b_1\\ a_3c_1 - a_1c_3 & b_4\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b_2\\ a_2c_1 - a_1c_2 & b_3\end{vmatrix}\\
=&a_1b_1c_3 - a_3b_1c_1 + a_1b_2c_2 - a_2b_2c_1.
\end{aligned} \tag{15}
$$

dengan

$$
\boldsymbol{k_3} = a_2c_1\boldsymbol{x}_3 + a_3c_1\boldsymbol{x}_4 - a_1c_2\boldsymbol{x}_3 - a_1c_3\boldsymbol{x}_4
$$

Tinjau persamaan (13)-(15), terlihat bahwa

$$
\begin{aligned}
&\beta\left(\left[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right],\boldsymbol{z}\right) + \beta\left(\left[\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\right],\boldsymbol{x}\right) + \beta\left(\left[\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}\right],\boldsymbol{y}\right)\\
&= \left(a_3b_1c_1 - a_1b_3c_1 + a_2b_1c_2 - a_1b_2c_2\right)\\
&+ \left(a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 + a_2b_2c_1 - a_2b_1c_2\right)\\
&+ \left(a_1b_1c_3 - a_3b_1c_1 + a_1b_2c_2 - a_2b_2c_1\right)\\
&= \ a_3b_1c_1 - a_3b_1c_1 + a_1b_3c_1 - a_1b_3c_1 + a_2b_1c_2\\
&- a_2b_1c_2 + a_1b_2c_2 - a_1b_2c_2 + a_1b_1c_3\\
&- a_1b_1c_3 + a_2b_2c_1 - a_2b_2c_1 = 0.
\end{aligned}
$$

Oleh karena itu, persamaan (5) terpenuhi atau β memenuhi kondisi 2-*cocycle*. Berdasarkan Definisi 4, maka terbukti bahwa pasangan $(\mathfrak{g}_4, \beta)$ merupakan aljabar Lie Frobenius-quasi. □

Proposisi 3. *Misalkan $\mathfrak{g}_5$ aljabar Lie filiform standar dan non-standar berdimensi 5 dengan basis $B_5 = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5\}$ dengan bracket Lie tak nolnya didefinisikan oleh persamaan (8). Misalkan β sebagai skew-symmetric 2-form pada $\mathfrak{g}_5$, maka untuk setiap β, pasangan $(\mathfrak{g}_5, \beta)$ bukan aljabar Lie Frobenius-quasi.*

Bukti. Jelas bahwa $\mathfrak{g}_5$ berdimensi ganjil, maka $\mathfrak{g}_5$ tidak memiliki *symplectic form*. Sama dengan $\mathfrak{g}_3$, setiap 2-*form* yang mungkin pada $\mathfrak{g}_5$ tidak *nondegenerate*. Diberikan 1-*form* pada $\mathfrak{g}_5$, yaitu $B_5^* = \{\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \boldsymbol{x}_3^*, \boldsymbol{x}_4^*, \boldsymbol{x}_5^*\}$. Misalkan $S = \{\omega_{i,j}\} = \{\boldsymbol{x}_i^* \wedge \boldsymbol{x}_j^*\}$ dengan $1 \leq i < j \leq 5$, maka konstruksi 2-*form* yang mungkin ada pada $\mathfrak{g}_5$ adalah β = Span (S). *Wedge product* yang dinyatakan oleh Definisi 1 menjelaskan bahwa setiap 2-*form* $\boldsymbol{x}_i^* \wedge \boldsymbol{x}_j^*$ pasti *skew-symmetric*. Selanjutnya misalkan $M_{i,j}$ matriks representasi untuk $\omega_{i,j}$ dengan Teorema 1, diperoleh

$$
M_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
M_{1,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{1,5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
M_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{2,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
M_{2,5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{3,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
M_{3,5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{4,5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Misalkan M matriks representasi untuk β, maka berdasarkan Definisi 2 terlihat jelas bahwa $|M| = 0$, sehingga, β atau setiap 2-*form* yang mungkin pada $\mathfrak{g}_5$ tidak memenuhi sifat *nondegenerate*. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 4, pasangan $(\mathfrak{g}_5, \beta)$ bukan Frobenius-quasi. □

Hasil yang diperoleh dalam penelitian ini dapat dikembangkan untuk mengklasifikasikan aljabar Lie filiform berdimensi lebih tinggi ke dalam aljabar Lie Frobenius-quasi.

4. Kesimpulan

Telah dibuktikan bahwa aljabar Lie filiform berdimensi 3 dan 5 bukan aljabar Lie Frobenius-quasi karena setiap *skew-symmetric* 2-*form* pada aljabar Lie tersebut tidak *nondegenerate*. Sebaliknya, aljabar Lie filiform berdimensi 4 merupakan aljabar Lie Frobenius-quasi karena terdapat $\beta = \boldsymbol{x}_1^* \wedge \boldsymbol{x}_4^* + \boldsymbol{x}_2^* \wedge \boldsymbol{x}_3^*$ yang bersifat *nondegenerate* dan 2-*cocycle*.

Referensi

[1] L. Boza, E. Fedriani Martel, J. Valdés, and A. Tenorio, “A historical review of the classifications of Lie algebras,” *Revista de la Unión Matemática Argentina*, vol. 54, Oct. 2013.

[2] J. M. Escobar, J. Núñez, and P. Pérez-Fernández, “Invariant functions and contractions of certain types of Lie algebras of lower dimensions,” *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, vol. 25, no. 3, p. 358, 2021, doi: 10.1080/14029251.2018.1494705.

[3] M. Goze and J. Ancochea Bermudez, “On the varieties of nilpotent Lie algebras of dimension 7 and 8,” *J Pure Appl Algebra*, vol. 77, no. 2, pp. 131–140, Feb. 1992, doi: 10.1016/0022-4049(92)90080-Y.

[4] J. R. Gómez, A. Jimenéz-Merchán, and Y. Khakimdjanov, “Low-dimensional filiform Lie algebras,” *J Pure Appl Algebra*, vol. 130, no. 2, pp. 133–158, Sep. 1998, doi: 10.1016/S0022-4049(97)00096-0.

[5] L. Boza, E. M. Fedriani, and J. Núñez, "A new method for classifying complex filiform Lie algebras," *Appl Math Comput*, vol. 121, no. 2–3, pp. 169–175, Jun. 2001, doi: 10.1016/S0096-3003(99)00270-2.

[6] J. R. Gómez, A. Jiménez-Merchán, and Y. Khakimdjanov, "Symplectic structures on the filiform Lie algebras," *J Pure Appl Algebra*, vol. 156, no. 1, pp. 15–31, Feb. 2001, doi: 10.1016/S0022-4049(99)90120-2.

[7] D. Burde, "Characteristically nilpotent Lie algebras and symplectic structures," *Forum Mathematicum*, vol. 18, no. 5, Jan. 2006, doi: 10.1515/FORUM.2006.038.

[8] D. N. Pham, "$\mathfrak{g}$-quasi-Frobenius Lie algebras," *Archivum Mathematicum*, no. 4, pp. 233–262, 2016, doi: 10.5817/AM2016-4-233.

[9] G. Ovando, "Four dimensional symplectic Lie algebras," *Beitrage zur Algebra und Geometrie*, vol. 47, Oct. 2004.

[10] G. Bazzoni, M. Freibert, A. Latorre, and B. Meinke, "Complex symplectic structures on Lie algebras," *J Pure Appl Algebra*, vol. 225, no. 6, p. 106585, Jun. 2021, doi: 10.1016/j.jpaa.2020.106585.

[11] Y. Sheng and R. Tang, "Symplectic, product and complex structures on 3-Lie algebras," *J Algebra*, vol. 508, pp. 256–300, Aug. 2018, doi: 10.1016/j.jalgebra.2018.05.005.

[12] V. del Barco, "Symplectic structures on free nilpotent Lie algebras," *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, vol. 95, no. 8, Oct. 2019, doi: 10.3792/pjaa.95.88.

[13] D. Millionshchikov, "Graded filiform Lie algebras and symplectic Nilmanifolds," *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, vol. 212, Sep. 2002.

[14] D. V. Millionshchikov, "Deformations of filiform Lie algebras and symplectic structures," *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 252, no. 1, pp. 182–204, Jan. 2006, doi: 10.1134/S0081543806010172.

[15] A. McInerney, *First Steps in Differential Geometry*. in Undergraduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer New York, 2013. doi: 10.1007/978-1-4614-7732-7.

[16] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, vol. 9. New York, NY: Springer New York, 1972. doi: 10.1007/978-1-4612-6398-2.