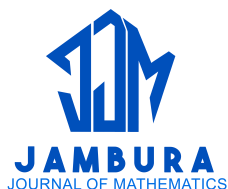


# Klasifikasi Aljabar Lie Forbenius-Quasi dari Aljabar Lie Filiform Berdimensi $\leq 5$

Putri Nisa Pratiwi, Edi Kurniadi, dan Firdaniza Firdaniza



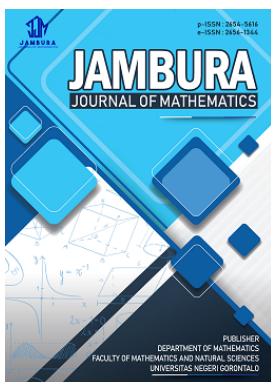
Volume 6, Issue 1, Pages 11–15, February 2024

Submit 17 Oktober 2023, Direvisi 11 November 2023, Disetujui 17 November 2023

To Cite this Article : P. N. Pratiwi, E. Kurniadi, dan F. Firdaniza, "Klasifikasi Aljabar Lie Forbenius-Quasi dari Aljabar Lie Filiform Berdimensi  $\leq 5$ ", *Jambura J. Math*, vol. 6, no. 1, pp. 11–15, 2024, <https://doi.org/10.37905/jjom.v6i1.22481>

© 2024 by author(s)

## JOURNAL INFO • JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS

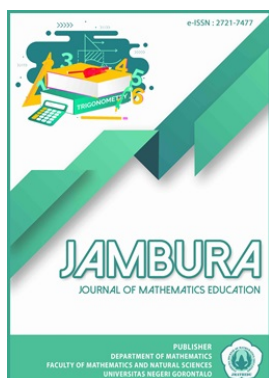


	Homepage	:	<a href="http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/index">http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/index</a>
	Journal Abbreviation	:	Jambura J. Math.
	Frequency	:	Biannual (February and August)
	Publication Language	:	English (preferable), Indonesia
	DOI	:	<a href="https://doi.org/10.37905/jjom">https://doi.org/10.37905/jjom</a>
	Online ISSN	:	2656-1344
	Editor-in-Chief	:	Hasan S. Panigoro
	Publisher	:	Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo
	Country	:	Indonesia
	OAI Address	:	<a href="http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/oai">http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/oai</a>
	Google Scholar ID	:	iWLjgaUAAAAJ
	Email	:	<a href="mailto:info.jjom@ung.ac.id">info.jjom@ung.ac.id</a>

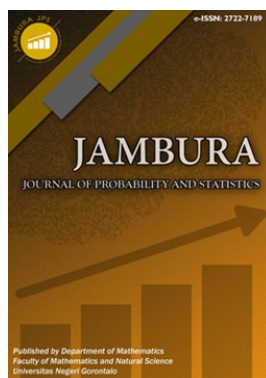
## JAMBURA JOURNAL • FIND OUR OTHER JOURNALS



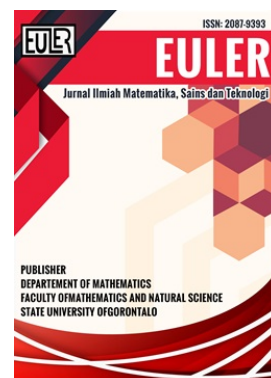
Jambura Journal of Biomathematics



Jambura Journal of Mathematics Education



Jambura Journal of Probability and Statistics



EULER : Jurnal Ilmiah Matematika, Sains, dan Teknologi



# Klasifikasi Aljabar Lie Frobenius-Quasi dari Aljabar Lie Filiform Berdimensi $\leq 5$

Putri Nisa Pratiwi<sup>1,\*</sup>, Edi Kurniadi<sup>1</sup> , dan Firdaniza Firdaniza<sup>1</sup> 

<sup>1</sup>Departemen Matematika, Universitas Padjadjaran, Indonesia

## ARTICLE HISTORY

Submit 17 Oktober 2023  
Direvisi 11 November 2023  
Disetujui 17 November 2023

## KATA KUNCI

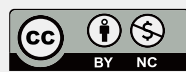
Aljabar Lie filiform  
Aljabar Lie Frobenius-quasi  
Nondegenerate 2-cocycle

## KEYWORDS

Filiform Lie Algebra  
Quasi-Frobenius Lie Algebra  
Nondegenerate 2-cocycle

**ABSTRAK.** Dalam penelitian ini dipelajari tentang aljabar Lie Frobenius-quasi real dan aljabar Lie filiform berdimensi  $\leq 5$ . Penelitian ini bertujuan untuk menetapkan klasifikasi aljabar Lie filiform berdimensi  $\leq 5$  ke dalam aljabar Lie Frobenius-quasi real. Metode yang digunakan adalah dengan mengkonstruksi skew-symmetric 2-form pada aljabar Lie real yang nondegenerate 2-cocycle. Hasil yang diperoleh adalah terdapat suatu kelas aljabar Lie filiform berdimensi  $\leq 5$  yang termasuk ke dalam aljabar Lie Frobenius-quasi real. Untuk selanjutnya, penelitian ini dapat dikembangkan untuk mengklasifikasikan aljabar Lie filiform berdimensi lebih tinggi ke dalam aljabar Lie Frobenius-quasi real.

**ABSTRACT.** In this research, we studied quasi-Frobenius Lie algebras and filiform Lie algebras of dimensions  $\leq 5$  over real field. The primary objective of this research is to classify the classification of filiform Lie algebras of dimensions  $\leq 5$  into quasi-Frobenius Lie algebras. The method employed in this research involves constructing a skew-symmetric 2-form in real Lie algebra which also a nondegenerate 2-cocycle. The outcomes of this research reveal that there exists a class of filiform Lie algebras of dimensions  $\leq 5$  that can be classified as a quasi-Frobenius real Lie algebra. Furthermore, this research can be developed to classify higher dimensional filiform Lie algebras as quasi-Frobenius real Lie algebras.



This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License. *Editorial of JJBM:* Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo, Jln. Prof. Dr. Ing. B. J. Habibie, Bone Bolango 96554, Indonesia.

## 1. Pendahuluan

Aljabar Lie ditemukan pada akhir abad ke-19 oleh seorang matematikawan asal Norwegia bernama Marius Sophus Lie. Penelitian mengenai aljabar Lie sudah banyak dilakukan, seperti klasifikasi aljabar Lie nilpoten berdimensi  $\leq 7$  oleh Michele Vergne yang sekaligus memperkenalkan aljabar Lie filiform dan mengklasifikasikannya hingga dimensi 6 [1]. Secara umum, aljabar Lie filiform berdimensi  $n$  memiliki adapted basis  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  dan bracket tak nol  $[x_1, x_j] = x_{j-1}$  untuk setiap  $3 \leq j \leq n$  [2]. Namun, klasifikasi aljabar Lie filiform atas lapangan kompleks baru diperoleh sampai dimensi  $\leq 12$  [3–5]. Klasifikasi aljabar Lie filiform dapat dipelajari lebih lanjut, seperti klasifikasi aljabar Lie filiform symplectic kompleks berdimensi  $\leq 10$  beserta semua symplectic form-nya [6].

Aljabar Lie symplectic dapat disebut juga sebagai aljabar Lie Frobenius-quasi [7]. Suatu aljabar Lie dikatakan symplectic atau Frobenius-quasi jika terdapat skew-symmetric 2-form yang nondegenerate dan 2-cocycle [8]. Symplectic form suatu aljabar Lie ditunjukkan di dalam beberapa penelitian, seperti symplectic form untuk aljabar Lie berdimensi 4 [9], complex symplectic form untuk aljabar Lie nilpoten [10], symplectic form untuk 3-Lie algebras [11], gambaran eksplisit mengenai free nilpotent Lie algebras yang memiliki symplectic form [12], symplectic form untuk aljabar Lie filiform [13, 14], dan symplectic form pada characteristically nilpotent Lie algebras (CNLAs) termasuk filiform CNLAs berdimensi  $\leq 14$  [7]. Symplectic form untuk aljabar Lie filiform berdimensi 4 secara eksplisit didefinisikan oleh Pham [8] sebagai

$$\beta = x_1^* \wedge x_4^* + x_2^* \wedge x_3^* \quad (1)$$

dimana  $\{x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*\}$  merupakan basis dual dan  $\beta$  memenuhi kondisi Frobenius-quasi. Untuk membuktikannya, perlu ditunjukkan bahwa  $\beta$  merupakan bentuk skew-symmetric 2-form yang nondegenerate dan 2-cocycle.

Berbeda dari penelitian sebelumnya, pada penelitian ini diberikan pembuktian secara detail bahwa aljabar Lie filiform berdimensi 4 merupakan Frobenius-quasi. Kemudian diperiksa apakah aljabar Lie filiform berdimensi 3 dan 5 merupakan Frobenius-quasi. Selain itu, dijelaskan mengenai konstruksi skew-symmetric 2-form untuk aljabar Lie filiform berdimensi  $\leq 5$ .

## 2. Metode

Metode yang digunakan adalah metode penelitian kualitatif berupa studi literatur yang mengacu pada [8] serta beberapa artikel lainnya yang terkait dengan aljabar Lie Frobenius-quasi dan aljabar Lie filiform. Metode yang digunakan untuk mengklasifikasikan aljabar Lie Frobenius-quasi dari aljabar Lie filiform berdimensi  $\leq 5$  adalah dengan mengonstruksi 2-form dari dua 1-form

\*Penulis Korespondensi.

berbeda yang *nondegenerate* dan *2-cocycle*. Berikut diberikan beberapa landasan teori yang merujuk pada [8] untuk membuktikan hasil penelitian.

**Definisi 1.** [15] Misalkan  $V$  suatu ruang vektor berdimensi  $n$  dengan basis  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  dan  $B^* = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  basis untuk  $V^*$  dual dari  $B$ . Untuk  $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ , definisikan  $k$ -form pada  $V$  sebagai

$$(\varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_k})(v_1, \dots, v_k) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{i_1}(v_1) & \dots & \varepsilon_{i_1}(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{i_k}(v_1) & \dots & \varepsilon_{i_k}(v_k) \end{vmatrix} \quad (2)$$

untuk setiap  $v_1, \dots, v_k \in V$ .

**Definisi 2.** [15] Misalkan  $V$  suatu ruang vektor berdimensi  $n$  dengan basis  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  dan  $B^* = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  basis untuk  $V^*$ . Penjumlahan 2-form pada  $V$  untuk  $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$  didefinisikan sebagai

$$(\varepsilon_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2} + \dots + \varepsilon_{i_{k-1}} \wedge \varepsilon_{i_k})(v_1, v_2) = (\varepsilon_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2})(v_1, v_2) + \dots + (\varepsilon_{i_{k-1}} \wedge \varepsilon_{i_k})(v_1, v_2) \quad (3)$$

untuk setiap  $v_1, v_2 \in V$ .

**Teorema 1.** [16] Misalkan  $\mathfrak{g}$  aljabar Lie atas lapangan  $\mathbb{R}$  dengan basis  $S = \{x_1, \dots, x_n\}$  dan  $\beta$  skew-symmetric 2-form pada  $\mathfrak{g}$ .  $\beta$  dikatakan *nondegenerate* jika dan hanya jika untuk setiap  $1 \leq i, j \leq n$  berlaku

$$|M| = \begin{vmatrix} \beta(x_1, x_1) & \beta(x_1, x_2) & \dots & \beta(x_1, x_j) \\ \beta(x_2, x_1) & \beta(x_2, x_2) & \dots & \beta(x_2, x_j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta(x_i, x_1) & \beta(x_i, x_2) & \dots & \beta(x_i, x_n) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4)$$

**Bukti.**  $(\Rightarrow)$   $\beta$  *nondegenerate*, menurut Definisi 1 jika  $u \in \mathfrak{g}$  dengan  $\beta(u, v) = 0$  untuk setiap  $v \in \mathfrak{g}$ , maka  $u = 0$ . Untuk menunjukkan bahwa  $|M| \neq 0$ , klaim matriks persegi  $M = (\beta(x_i, x_j))$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , sebagai matriks representasi untuk  $\beta$ . Sehingga  $\beta(u, v) = v^T M u = 0$ , maka  $v^T M u = 0 \forall v \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow M u = 0$ . Karena  $\beta$  *nondegenerate*, maka  $M u = 0$  dipenuhi oleh  $u = 0$  artinya  $M$  *invertible*. Karena  $M$  *invertible*, maka  $|M| \neq 0$ .

$(\Leftarrow)$  Sebaliknya,  $|M| \neq 0$ , artinya matriks  $M$  *invertible*. Untuk menunjukkan  $\beta$  *nondegenerate*, terlihat jelas bahwa  $\beta(u, v) = v^T M u = 0 \Rightarrow v^T M u = 0$ . Karena  $M$  *invertible*, maka  $M u = 0$  hanya dipenuhi oleh  $u = 0$ .  $\square$

**Definisi 3.** [8] Misalkan  $\mathfrak{g}$  adalah aljabar Lie dan  $\beta$  skew-symmetric 2-form pada  $\mathfrak{g}$ .  $\beta$  dikatakan *2-cocycle* pada aljabar Lie  $\mathfrak{g}$  jika memenuhi

$$\beta([x, y], z) + \beta([y, z], x) + \beta([z, x], y) = 0, \forall x, y, z \in \mathfrak{g}. \quad (5)$$

**Definisi 4.** [8] Suatu aljabar Lie Frobenius-quasi atas  $\mathbb{R}$  adalah pasangan  $(\mathfrak{g}, \beta)$  dengan  $\mathfrak{g}$  aljabar Lie atas  $\mathbb{R}$  dan  $\beta$  suatu *nondegenerate 2-cocycle* pada aljabar Lie yang bernilai real.

Selanjutnya, langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian adalah:

1. Tentukan aljabar Lie yang digunakan, yaitu aljabar Lie filiform berdimensi  $n$ , dengan  $n \leq 5$ .
2. Tentukan *skew-symmetric 2-form*, yaitu  $\beta$ . Untuk menentukan 2-form, pilih dua 1-form yang berbeda lalu operasikan dengan *wedge product* yang didefinisikan dalam Definisi 1. Dalam hal ini, 1-form merupakan dual basis dari aljabar Lie filiform berdimensi  $n$ , dengan  $n \leq 5$ .
3. Periksa apakah  $\beta$  memenuhi sifat *nondegenerate* menggunakan Teorema 1.
4. Periksa apakah  $\beta$  memenuhi kondisi *2-cocycle* menggunakan Definisi 3.
5. Klasifikasikan aljabar Lie Frobenius-quasi dari aljabar Lie filiform berdimensi  $n$ , dengan  $n \leq 5$ .

### 3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini, ditunjukkan hasil utama yang merupakan pembuktian detail dari [8], yaitu bahwa aljabar Lie filiform berdimensi 4 adalah Frobenius-quasi. Selain itu, diperiksa apakah aljabar Lie filiform berdimensi 3 dan 5 merupakan Frobenius-quasi. Misalkan  $\mathfrak{g}_n$  aljabar Lie filiform standar dan nonstandar berdimensi  $\leq 5$  dengan *bracket* tak nolnya adalah

$$\mathfrak{g}_3 : [x_1, x_2] = x_3, \quad (6)$$

$$\mathfrak{g}_4 : [x_1, x_2] = x_3, [x_1, x_3] = x_4, \quad (7)$$

$$\mathfrak{g}_5 : \begin{cases} \mathfrak{g}_5^1 : [x_1, x_i] = x_{i+1}, \text{ untuk } i = 2, 3, 4 \\ \mathfrak{g}_5^2 : [x_1, x_i] = x_{i+1}, i = 2, 3, 4 \text{ dan } [x_2, x_3] = x_5. \end{cases} \quad (8)$$

**Proposisi 1.** Misalkan  $\mathfrak{g}_3$  aljabar Lie filiform berdimensi 3 dengan basis  $B_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$  dan *bracket* Lie tak nolnya didefinisikan oleh persamaan (6). Misalkan  $\beta$  sebagai skew-symmetric 2-form pada  $\mathfrak{g}_3$ , maka untuk setiap  $\beta$ , pasangan  $(\mathfrak{g}_3, \beta)$  bukan aljabar Lie Frobenius-quasi.

**Bukti.** Jelas bahwa  $\mathfrak{g}_3$  berdimensi ganjil, maka  $\mathfrak{g}_3$  tidak memiliki *symplectic form*. Hal ini disebabkan oleh setiap 2-form yang mungkin pada  $\mathfrak{g}_3$  tidak memenuhi sifat *nondegenerate*. Untuk menunjukkannya, konstruksi  $\beta$  sebagai 2-form untuk  $\mathfrak{g}_3$  dengan memilih dua 1-form berbeda yang dioperasikan dengan *wedge product*. Diberikan 1-form yaitu  $B_3^* = \{x_1^*, x_2^*, x_3^*\}$ , sehingga konstruksi 2-form yang mungkin ada pada  $\mathfrak{g}_3$  adalah  $\beta = \text{Span} \{x_1^* \wedge x_2^*, x_1^* \wedge x_3^*, x_2^* \wedge x_3^*\}$ . *Wedge product* yang didefinisikan oleh Definisi 1 menjelaskan bahwa setiap 2-form  $x_i^* \wedge x_j^*$  pasti *skew-symmetric* berdasarkan sifat fungsi determinan matriks.

Dengan kata lain,  $\beta = \text{Span} \{x_1^* \wedge x_2^*, x_1^* \wedge x_3^*, x_2^* \wedge x_3^*\}$  merupakan skew-symmetric 2-form untuk  $\mathfrak{g}_3$ .

Selanjutnya, misalkan  $\beta = \text{Span} \{x_1^* \wedge x_2^*, x_1^* \wedge x_3^*, x_2^* \wedge x_3^*\} = \text{Span} \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  dan  $M_1, M_2, M_3$  adalah matriks representasi untuk masing-masing  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ . Berdasarkan Teorema 1, perhatikan bahwa

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Misalkan  $M$  matriks representasi untuk  $\beta$ , maka berdasarkan Definisi 2 terlihat jelas bahwa setiap  $\beta$  di  $\mathfrak{g}_3$  menghasilkan  $|M| = 0$  sehingga  $\beta$  tidak nondegenerate. Dengan kata lain, setiap 2-form yang mungkin ada pada  $\mathfrak{g}_3$  tidak memenuhi sifat nondegenerate. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 4, pasangan  $(\mathfrak{g}_3, \beta)$  bukan aljabar Lie Frobenius-quasi.  $\square$

**Proposisi 2.** Misalkan  $\mathfrak{g}_4$  aljabar Lie filiform berdimensi 4 dengan basis  $B_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  dan bracket Lie tak nolnya didefinisikan oleh persamaan (7). Misalkan  $\beta$  sebagai skew-symmetric 2-form pada  $\mathfrak{g}_4$  yang didefinisikan sebagai

$$\beta = x_1^* \wedge x_4^* + x_2^* \wedge x_3^* \tag{9}$$

dengan  $B_4^* = \{x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*\}$  basis dual dari  $B_4$ , maka pasangan  $(\mathfrak{g}_4, \beta)$  merupakan aljabar Lie Frobenius-quasi.

**Bukti.** Dalam penelitian [8] telah diperoleh 2-form untuk aljabar Lie filiform  $\mathfrak{g}_4$  dengan basis  $B_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  dan basis dual  $B_4^* = \{x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*\}$ , yaitu diberikan oleh persamaan (9). Perlu dibuktikan bahwa  $\beta$  adalah skew-symmetric 2-form. Berdasarkan Definisi 2, maka persamaan (9) dapat dinyatakan sebagai,

$$\begin{aligned} \beta(x_i, x_j) &= (x_1^* \wedge x_4^* + x_2^* \wedge x_3^*)(x_i, x_j) \\ &= (x_1^* \wedge x_4^*)(x_i, x_j) + (x_2^* \wedge x_3^*)(x_i, x_j) \\ &= \begin{vmatrix} x_1^*(x_i) & x_1^*(x_j) \\ x_4^*(x_i) & x_4^*(x_j) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2^*(x_i) & x_2^*(x_j) \\ x_3^*(x_i) & x_3^*(x_j) \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

untuk setiap  $x_i, x_j \in \mathfrak{g}_4$  dengan  $1 \leq i, j \leq 4$ . Berdasarkan sifat fungsi determinan suatu matriks, maka terbukti bahwa  $\beta$  merupakan skew-symmetric 2-form. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa  $\beta$  memenuhi kondisi nondegenerate dan 2-cocycle. Dengan menggunakan Teorema 1 diperoleh matriks representasi untuk  $\beta$ , yaitu

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

dan terlihat jelas bahwa  $|M| = 1 \neq 0$ , maka  $\beta$  nondegenerate.

Selanjutnya, perlu dibuktikan bahwa kondisi 2-cocycle dipenuhi oleh  $\beta$ . Diketahui bahwa  $B_4$  basis untuk  $\mathfrak{g}_4$ , maka  $\mathfrak{g}_4 = \text{Span } B_4$  sehingga sembarang elemen  $x, y, z \in \mathfrak{g}_4$  dapat ditulis sebagai

$$\begin{cases} x = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = \sum_{i=1}^4 a_i x_i, \{a_i\}_{i=1}^4 \in \mathbb{R}, \\ y = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = \sum_{j=1}^4 b_j x_j, \{b_j\}_{j=1}^4 \in \mathbb{R}, \\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 = \sum_{k=1}^4 c_k x_k, \{c_k\}_{k=1}^4 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{12}$$

Selanjutnya diperiksa apakah persamaan (5) terpenuhi.

$$\begin{aligned} \beta([x, y], z) &= \beta\left(\left[\sum_{i=1}^4 a_i x_i, \sum_{j=1}^4 b_j x_j\right], \sum_{k=1}^4 c_k x_k\right) \\ &= \beta(a_1b_2x_3 + a_1b_3x_4 - a_2b_1x_3 - a_3b_1x_4, \\ &\quad c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4) \\ &= (x_1^* \wedge x_4^* + x_2^* \wedge x_3^*)(a_1b_2x_3 + a_1b_3x_4 - a_2b_1x_3 \\ &\quad - a_3b_1x_4, c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4) \\ &= \begin{vmatrix} x_1^*(k_1) & x_1^*(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4) \\ x_4^*(k_1) & x_4^*(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4) \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} x_2^*(k_1) & x_2^*(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4) \\ x_3^*(k_1) & x_3^*(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & c_1 \\ a_1b_3 - a_3b_1 & c_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & c_2 \\ a_1b_2 - a_2b_1 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= a_3b_1c_1 - a_1b_3c_1 + a_2b_1c_2 - a_1b_2c_2. \end{aligned} \tag{13}$$

dengan

$$k_1 = a_1b_2x_3 + a_1b_3x_4 - a_2b_1x_3 - a_3b_1x_4$$

$$\begin{aligned} \beta([y, z], x) &= \beta\left(\left[\sum_{j=1}^4 b_j x_j, \sum_{k=1}^4 c_k x_k\right], \sum_{i=1}^4 a_i x_i\right) \\ &= \beta(b_1c_2x_3 + b_1c_3x_4 - b_2c_1x_3 - b_3c_1x_4, \\ &\quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4) \\ &= (x_1^* \wedge x_4^* + x_2^* \wedge x_3^*)(b_1c_2x_3 + b_1c_3x_4 - \\ &\quad b_2c_1x_3 - b_3c_1x_4, a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4) \\ &= \begin{vmatrix} x_1^*(k_2) & x_1^*(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4) \\ x_4^*(k_2) & x_4^*(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4) \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} x_2^*(k_2) & x_2^*(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4) \\ x_3^*(k_2) & x_3^*(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & a_1 \\ b_1c_3 - b_3c_1 & a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_2 \\ b_1c_2 - b_2c_1 & a_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 + a_2b_2c_1 - a_2b_1c_2. \end{aligned} \tag{14}$$

dengan

$$k_2 = b_1c_2x_3 + b_1c_3x_4 - b_2c_1x_3 - b_3c_1x_4$$



$$\begin{aligned}
 \beta([\mathbf{z}, \mathbf{x}], \mathbf{y}) &= \beta\left(\left[\sum_{k=1}^4 c_k \mathbf{x}_k, \sum_{i=1}^4 a_i \mathbf{x}_i\right], \sum_{j=1}^4 b_j \mathbf{x}_j\right) \\
 &= \beta(a_2 c_1 \mathbf{x}_3 + a_3 c_1 \mathbf{x}_4 - a_1 c_2 \mathbf{x}_3 - a_1 c_3 \mathbf{x}_4, \\
 &\quad b_1 \mathbf{x}_1 + b_2 \mathbf{x}_2 + b_3 \mathbf{x}_3 + b_4 \mathbf{x}_4) \\
 &= (\mathbf{x}_1^* \wedge \mathbf{x}_4^* + \mathbf{x}_2^* \wedge \mathbf{x}_3^*)(a_2 c_1 \mathbf{x}_3 + a_3 c_1 \mathbf{x}_4 - \\
 &\quad a_1 c_2 \mathbf{x}_3 - a_1 c_3 \mathbf{x}_4, b_1 \mathbf{x}_1 + b_2 \mathbf{x}_2 + b_3 \mathbf{x}_3 + b_4 \mathbf{x}_4) \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_1^*(\mathbf{k}_3) & \mathbf{x}_1^*(b_1 \mathbf{x}_1 + b_2 \mathbf{x}_2 + b_3 \mathbf{x}_3 + b_4 \mathbf{x}_4) \\ \mathbf{x}_4^*(\mathbf{k}_3) & \mathbf{x}_4^*(b_1 \mathbf{x}_1 + b_2 \mathbf{x}_2 + b_3 \mathbf{x}_3 + b_4 \mathbf{x}_4) \end{vmatrix} \\
 &+ \begin{vmatrix} \mathbf{x}_2^*(\mathbf{k}_3) & \mathbf{x}_2^*(b_1 \mathbf{x}_1 + b_2 \mathbf{x}_2 + b_3 \mathbf{x}_3 + b_4 \mathbf{x}_4) \\ \mathbf{x}_3^*(\mathbf{k}_3) & \mathbf{x}_3^*(b_1 \mathbf{x}_1 + b_2 \mathbf{x}_2 + b_3 \mathbf{x}_3 + b_4 \mathbf{x}_4) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & b_1 \\ a_3 c_1 - a_1 c_3 & b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b_2 \\ a_2 c_1 - a_1 c_2 & b_3 \end{vmatrix} \\
 &= a_1 b_1 c_3 - a_3 b_1 c_1 + a_1 b_2 c_2 - a_2 b_2 c_1.
 \end{aligned} \tag{15}$$

dengan

$$\mathbf{k}_3 = a_2 c_1 \mathbf{x}_3 + a_3 c_1 \mathbf{x}_4 - a_1 c_2 \mathbf{x}_3 - a_1 c_3 \mathbf{x}_4$$

Tinjau persamaan (13)-(15), terlihat bahwa

$$\begin{aligned}
 &\beta([\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{z}) + \beta([\mathbf{y}, \mathbf{z}], \mathbf{x}) + \beta([\mathbf{z}, \mathbf{x}], \mathbf{y}) \\
 &= (a_3 b_1 c_1 - a_1 b_3 c_1 + a_2 b_1 c_2 - a_1 b_2 c_2) \\
 &+ (a_1 b_3 c_1 - a_1 b_1 c_3 + a_2 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_2) \\
 &+ (a_1 b_1 c_3 - a_3 b_1 c_1 + a_1 b_2 c_2 - a_2 b_2 c_1) \\
 &= a_3 b_1 c_1 - a_3 b_1 c_1 + a_1 b_3 c_1 - a_1 b_3 c_1 + a_2 b_1 c_2 \\
 &- a_2 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_2 - a_1 b_2 c_2 + a_1 b_1 c_3 \\
 &- a_1 b_1 c_3 + a_2 b_2 c_1 - a_2 b_2 c_1 = 0.
 \end{aligned}$$

Oleh karena itu, persamaan (5) terpenuhi atau  $\beta$  memenuhi kondisi 2-cocycle. Berdasarkan Definisi 4, maka terbukti bahwa pasangan  $(\mathfrak{g}_4, \beta)$  merupakan aljabar Lie Frobenius-quasi.  $\square$

**Proposisi 3.** Misalkan  $\mathfrak{g}_5$  aljabar Lie filiform standar dan non-standar berdimensi 5 dengan basis  $B_5 = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5\}$  dengan bracket Lie tak nolnya didefinisikan oleh persamaan (8). Misalkan  $\beta$  sebagai skew-symmetric 2-form pada  $\mathfrak{g}_5$ , maka untuk setiap  $\beta$ , pasangan  $(\mathfrak{g}_5, \beta)$  bukan aljabar Lie Frobenius-quasi.

**Bukti.** Jelas bahwa  $\mathfrak{g}_5$  berdimensi ganjil, maka  $\mathfrak{g}_5$  tidak memiliki symplectic form. Sama dengan  $\mathfrak{g}_3$ , setiap 2-form yang mungkin pada  $\mathfrak{g}_5$  tidak nondegenerate. Diberikan 1-form pada  $\mathfrak{g}_5$ , yaitu  $B_5^* = \{\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \mathbf{x}_3^*, \mathbf{x}_4^*, \mathbf{x}_5^*\}$ . Misalkan  $S = \{\omega_{i,j}\} = \{\mathbf{x}_i^* \wedge \mathbf{x}_j^*\}$  dengan  $1 \leq i < j \leq 5$ , maka konstruksi 2-form yang mungkin ada pada  $\mathfrak{g}_5$  adalah  $\beta = \text{Span}(S)$ . Wedge product yang dinyatakan oleh Definisi 1 menjelaskan bahwa setiap 2-form  $\mathbf{x}_i^* \wedge \mathbf{x}_j^*$  pasti skew-symmetric. Selanjutnya misalkan  $M_{i,j}$  matriks representasi untuk  $\omega_{i,j}$  dengan Teorema 1, diperoleh

$$\begin{aligned}
 M_{1,2} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 M_{1,4} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{1,5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 M_{2,3} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{2,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 M_{2,5} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{3,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 M_{3,5} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{4,5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Misalkan  $M$  matriks representasi untuk  $\beta$ , maka berdasarkan Definisi 2 terlihat jelas bahwa  $|M| = 0$ , sehingga,  $\beta$  atau setiap 2-form yang mungkin pada  $\mathfrak{g}_5$  tidak memenuhi sifat nondegenerate. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 4, pasangan  $(\mathfrak{g}_5, \beta)$  bukan Frobenius-quasi.  $\square$

Hasil yang diperoleh dalam penelitian ini dapat dikembangkan untuk mengklasifikasikan aljabar Lie filiform berdimensi lebih tinggi ke dalam aljabar Lie Frobenius-quasi.

#### 4. Kesimpulan

Telah dibuktikan bahwa aljabar Lie filiform berdimensi 3 dan 5 bukan aljabar Lie Frobenius-quasi karena setiap skew-symmetric 2-form pada aljabar Lie tersebut tidak nondegenerate. Sebaliknya, aljabar Lie filiform berdimensi 4 merupakan aljabar Lie Frobenius-quasi karena terdapat  $\beta = \mathbf{x}_1^* \wedge \mathbf{x}_4^* + \mathbf{x}_2^* \wedge \mathbf{x}_3^*$  yang bersifat nondegenerate dan 2-cocycle.

#### Referensi

- [1] L. Boza, E. Fedriani Martel, J. Valdés, and A. Tenorio, "A historical review of the classifications of Lie algebras," *Revista de la Unión Matemática Argentina*, vol. 54, Oct. 2013.
- [2] J. M. Escobar, J. Núñez, and P. Pérez-Fernández, "Invariant functions and contractions of certain types of Lie algebras of lower dimensions," *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, vol. 25, no. 3, p. 358, 2021, doi: 10.1080/14029251.2018.1494705.
- [3] M. Goze and J. Ancochea Bermudez, "On the varieties of nilpotent Lie algebras of dimension 7 and 8," *J Pure Appl Algebra*, vol. 77, no. 2, pp. 131–140, Feb. 1992, doi: 10.1016/0022-4049(92)90080-Y.
- [4] J. R. Gómez, A. Jimenéz-Merchán, and Y. Khakimjanov, "Low-dimensional filiform Lie algebras," *J Pure Appl Algebra*, vol. 130, no. 2, pp. 133–158, Sep. 1998, doi: 10.1016/S0022-4049(97)00096-0.

- [5] L. Boza, E. M. Fedriani, and J. Núñez, "A new method for classifying complex filiform Lie algebras," *Appl Math Comput*, vol. 121, no. 2–3, pp. 169–175, Jun. 2001, doi: [10.1016/S0096-3003\(99\)00270-2](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(99)00270-2).
- [6] J. R. Gómez, A. Jiménez-Merchán, and Y. Khakimjanov, "Symplectic structures on the filiform Lie algebras," *J Pure Appl Algebra*, vol. 156, no. 1, pp. 15–31, Feb. 2001, doi: [10.1016/S0022-4049\(99\)90120-2](https://doi.org/10.1016/S0022-4049(99)90120-2).
- [7] D. Burde, "Characteristically nilpotent Lie algebras and symplectic structures," *Forum Mathematicum*, vol. 18, no. 5, Jan. 2006, doi: [10.1515/FORUM.2006.038](https://doi.org/10.1515/FORUM.2006.038).
- [8] D. N. Pham, "g-quasi-Frobenius Lie algebras," *Archivum Mathematicum*, no. 4, pp. 233–262, 2016, doi: [10.5817/AM2016-4-233](https://doi.org/10.5817/AM2016-4-233).
- [9] G. Ovando, "Four dimensional symplectic Lie algebras," *Beitrage zur Algebra und Geometrie*, vol. 47, Oct. 2004.
- [10] G. Bazzoni, M. Freibert, A. Latorre, and B. Meinke, "Complex symplectic structures on Lie algebras," *J Pure Appl Algebra*, vol. 225, no. 6, p. 106585, Jun. 2021, doi: [10.1016/j.jpaa.2020.106585](https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2020.106585).
- [11] Y. Sheng and R. Tang, "Symplectic, product and complex structures on 3-Lie algebras," *J Algebra*, vol. 508, pp. 256–300, Aug. 2018, doi: [10.1016/j.jalgebra.2018.05.005](https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2018.05.005).
- [12] V. del Barco, "Symplectic structures on free nilpotent Lie algebras," *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, vol. 95, no. 8, Oct. 2019, doi: [10.3792/pjaa.95.88](https://doi.org/10.3792/pjaa.95.88).
- [13] D. Millionshchikov, "Graded filiform Lie algebras and symplectic Nilmanifolds," *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, vol. 212, Sep. 2002.
- [14] D. V. Millionshchikov, "Deformations of filiform Lie algebras and symplectic structures," *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 252, no. 1, pp. 182–204, Jan. 2006, doi: [10.1134/S0081543806010172](https://doi.org/10.1134/S0081543806010172).
- [15] A. McInerney, *First Steps in Differential Geometry*. in Undergraduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer New York, 2013. doi: [10.1007/978-1-4614-7732-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7732-7).
- [16] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, vol. 9. New York, NY: Springer New York, 1972. doi: [10.1007/978-1-4612-6398-2](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6398-2).