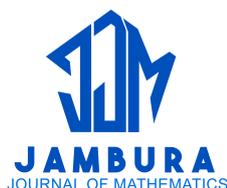


# Implementasi Penggunaan Generalisasi *Thinning Process* pada Penduga Fungsi Ragam Proses Poisson Periodik Majemuk

Syarif Abdullah, I Wayan Mangku, Himmatul Mursyidah, Miftahul Huda, Fajri Ikhsan, dan Sri Istiyarti Uswatun Chasanah



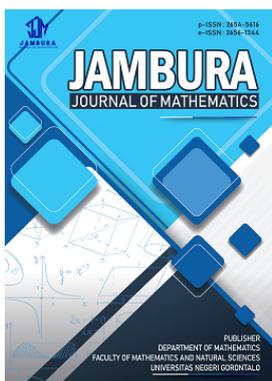
Volume 6, Issue 1, Pages 23–28, February 2024

Submit 18 Oktober 2023, Direvisi 19 Desember 2023, Disetujui 22 Desember 2023

To Cite this Article : S. Abdullah, I. W. Mangku, H. Mursyidah, M. Huda, F. Ikhsan, dan S. I. U. Chasanah, "Implementasi Penggunaan Generalisasi *Thinning Process* pada Penduga Fungsi Ragam Proses Poisson Periodik Majemuk", *Jambura J. Math*, vol. 6, no. 1, pp. 23–28, 2024, <https://doi.org/10.37905/jjom.v6i1.22491>

© 2024 by author(s)

## JOURNAL INFO • JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS



🏠	Homepage	:	<a href="http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/index">http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/index</a>
📄	Journal Abbreviation	:	Jambura J. Math.
📅	Frequency	:	Biannual (February and August)
🗣️	Publication Language	:	English (preferable), Indonesia
🔗	DOI	:	<a href="https://doi.org/10.37905/jjom">https://doi.org/10.37905/jjom</a>
📖	Online ISSN	:	2656-1344
👤	Editor-in-Chief	:	Hasan S. Panigoro
🏢	Publisher	:	Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo
🇮🇩	Country	:	Indonesia
🌐	OAI Address	:	<a href="http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/oai">http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/oai</a>
🔍	Google Scholar ID	:	iWLjgaUAAAAJ
✉️	Email	:	<a href="mailto:info.jjom@ung.ac.id">info.jjom@ung.ac.id</a>

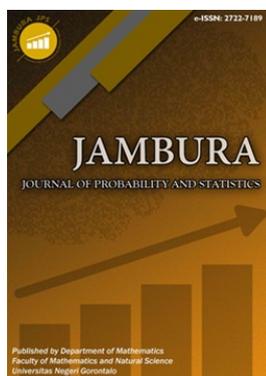
## JAMBURA JOURNAL • FIND OUR OTHER JOURNALS



Jambura Journal of Biomathematics



Jambura Journal of Mathematics Education



Jambura Journal of Probability and Statistics



EULER : Jurnal Ilmiah Matematika, Sains, dan Teknologi

# Implementasi Penggunaan Generalisasi *Thinning Process* pada Penduga Fungsi Ragam Proses Poisson Periodik Majemuk

Syarif Abdullah<sup>1,\*</sup> , I Wayan Mangku<sup>2</sup> , Himmatul Mursyidah<sup>3</sup> , Miftahul Huda<sup>4</sup>, Fajri Ikhsan<sup>5</sup>, dan Sri Istiyarti Uswatun Chasanah<sup>6</sup>

<sup>1</sup>Department of Statistics, Universitas Sultan Ageng Tirtayasa, Indonesia

<sup>2</sup>Department of Mathematics, IPB University, Indonesia

<sup>3</sup>Department of Informatics, Universitas Muhammadiyah Banten, Indonesia

<sup>4</sup>Department of Statistics, Universitas Bina Bangsa, Indonesia

<sup>5</sup>Department of Chemistry, Universitas Negeri Padang, Indonesia

<sup>6</sup>Department of Mathematics, Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga, Indonesia

## ARTICLE HISTORY

Submit 18 Oktober 2023

Revisi 19 Desember 2023

Disetujui 22 Desember 2023

## KATA KUNCI

Thinning Process  
Proses Poisson  
Tren Linear  
Periodik  
Poisson Majemuk  
Fungsi Ragam

## KEYWORDS

Thinning Process  
Poisson Process  
Linear Trend  
Periodic  
Compound Poisson  
Variance Function

**ABSTRAK.** Artikel ini merupakan implementasi penggunaan algoritma *thinning process* yang telah digeneralisasi untuk penduga-penduga pada proses Poisson periodik majemuk. Penggunaan generalisasi pada algoritma telah disusun dengan adanya tren linear pada unsur periodiknya. Tujuan penelitian ini membahas tentang penduga pada fungsi ragamnya. Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah metode simulasi. Hasil simulasi menggunakan generalisasi algoritma *thinning process* menunjukkan bahwa pada kasus panjang interval waktu pengamatan yang terbatas, beberapa penduga sudah cukup bagus untuk mendekati nilai aktual. Semakin bertambahnya nilai  $n$ , nilai simulasi penduga menuju ke nilai dugaan. Hal ini sesuai dengan lema, teorema dan akibat yang telah dibahas. Didapatkan pula beberapa penduga yang cukup lambat. Hal ini mengakibatkan pergerakan nilai bias, ragam dan MSE penduga ikut lambat, meskipun semakin menuju ke 0. Sehingga selanjutnya dapat dilakukan modifikasi terhadap model yang dikaji.

**ABSTRACT.** This article implements the *thinning process* algorithm, which has been generalized for estimators of compound periodic Poisson processes. The use of generalizations in the algorithm has been prepared with a linear trend in the periodic elements. This research aims to discuss estimators of the variance function. The method used in this research is the simulation method. Simulation results using a generalized algorithm *thinning process* show that in the case of a limited observation time interval, some estimators are good enough to approach the actual value. As the value of  $n$  increases, the simulated value of the estimator moves towards the predicted value. This is following the lemmas, theorems, and consequences that have been discussed. It was also found that several estimators were quite slow. This results in the movement of the bias, variance, and MSE values of the estimators being slow, even though they are moving towards 0. So that further modifications can be made to the model being studied.



This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License. *Editorial of JJB*: Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo, Jln. Prof. Dr. Ing. B. J. Habibie, Bone Bolango 96554, Indonesia.

## 1. Pendahuluan

Proses Stokastik dapat digunakan untuk memodelkan beberapa fenomena nyata, salah satunya yaitu proses Poisson majemuk. Proses stokastik berupa proses Poisson dan proses Poisson majemuk banyak diaplikasikan, diantaranya pada bidang *engineering* [1, 2] dan deteksi nuklir [3]. Proses Poisson majemuk ini memiliki fungsi intensitas tertentu pada komponen proses terjadinya suatu kejadian. Fungsi intensitas ini memiliki banyak bentuk, seperti fungsi konstan, linear, kuadrat, eksponensial, maupun bentuk fungsi transenden yang lain. Fungsi intensitas ini apabila memiliki pola periodik, maka proses ini disebut proses Poisson periodik majemuk [4]. Apabila pada kejadian-kejadian tersebut terjadi bentuk periodik dan memiliki tren linear, maka

proses ini disebut proses Poisson majemuk dengan tren linear [4]. Proses ini sangat tepat jika digunakan untuk memodelkan kejadian yang terjadi dengan pola periodik serta meningkat dan mengikuti pola tren linear tertentu.

Penelitian tentang proses Poisson periodik majemuk telah banyak diteliti, diantaranya pada [5–7]. Sedangkan penelitian yang memiliki pola tren linear diteliti pada [8, 9]. Algoritma yang sering digunakan dalam membangkitkan proses Poisson baik berupa fungsi intensitas homogen maupun nonhomogen adalah algoritma *thinning process* [10–12]. Algoritma ini kemudian dikembangkan untuk membangkitkan proses Poisson majemuk [13]. Generalisasi algoritma ini kemudian dikembangkan dengan menggunakan fungsi intensitas nonhomogen pada proses Poissonnya dengan menggunakan distribusi eksponensial [14, 15] dan gamma [16] pada komponen akibat dari suatu kejadian yang

\*Penulis Korespondensi.

terjadi.

Penduga pada proses Poisson periodik majemuk memiliki beberapa penduga yang harus dikaji. Penduga tersebut berupa suatu fungsi, yaitu fungsi nilai harapan dan penduga fungsi ragam, sehingga perlu dibahas. Pada penelitian terakhir belum dibahas tentang penggunaan generalisasi algoritma proses *thinning* terkait fungsi ragam pada proses Poisson periodik majemuk yang memiliki pola tren linear, sehingga pada penelitian ini bertujuan membahas hal tersebut. Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah metode simulasi. Aplikasi dari fungsi ragam dan penduganya seringkali digunakan untuk uji risiko diberbagai disiplin ilmu, misalnya pada model kegagalan [17], model pemeliharaan [2], model rehabilitas pada produksi automotif [18] dan model risiko keselamatan pada industri konstruksi [19], sehingga hal ini penting untuk dikaji.

### 2. Metode

Penelitian ini menggunakan metode simulasi dengan menggunakan perangkat lunak Matlab 2014a, sedangkan untuk penyajian hasil analisis digunakan perangkat lunak Microsoft Excell 2013. Algoritma yang dikembangkan merupakan bentuk generalisasi dari algoritma proses *thinning*. Proses *thinning* biasanya hanya digunakan pada proses Poisson homogen dan nonhomogen saja. Proses *thinning* ini kemudian dikembangkan untuk proses Poisson majemuk [13]. Algoritma pada [13] dan [16] digunakan untuk mengetahui keefektifan dari peduga-penduga. Sehingga langkah awal sebelum melakukan proses simulasi adalah membuat program pada perangkat lunak Matlab dan melakukan proses simulasi yang dijelaskan pada bagian pembahasan. Setelah hasil simulasi didapatkan, kemudian dilakukan analisis keefektifan dari masing-masing penduga secara teori dan simulasi. Sebelum melakukan simulasi dibahas dahulu tentang penduga fungsi ragam, kekonsistenan dari penduga, bias dari penduga, ragam dari penduga dan *mean squared error (MSE)* dari penduga.

### 3. Hasil dan Pembahasan

#### 3.1. Penduga Fungsi Ragam

Misalkan suatu proses Poisson dengan fungsi intensitas  $\lambda$  yaitu  $N(t), t \geq 0$ . Diasumsikan  $\lambda$  mempunyai beberapa komponen, yaitu sebuah komponen yang memiliki pola kejadian membentuk tren linear dan sebuah komponen yang memiliki pola bentuk kejadian yang membentuk pola periodik dengan periode  $\tau > 0$  yang diketahui yaitu  $\lambda_c$ . Sehingga, fungsi intensitas  $\lambda$ , dengan  $s > 0$  untuk setiap  $s$ , dapat dituliskan pada persamaan (1):

$$\lambda(s) = \lambda_c(s) + as, \tag{1}$$

dimana  $\tau$  adalah periode,  $a$  adalah *slope* dengan asumsi  $a > 0$  dari tren linear dan  $\lambda_c(s)$  adalah sebuah fungsi yang memiliki pola periodik. Fungsi intensitas  $\lambda_c$  memenuhi persamaan (2):

$$\lambda_c(s) = \lambda_c(s+k\tau), \tag{2}$$

dimana  $k \in \mathbb{N}$  (bilangan natural), dan untuk setiap  $s \geq 0$ .

Didefinisikan suatu proses  $Y(t), t \geq 0$  sebagai proses Poisson periodik majemuk dengan tren linear yang dirumuskan pada persamaan (3):

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \tag{3}$$

dengan  $X_i$  bebas terhadap kejadian  $N(t), t \geq 0$ , memiliki nilai harapan  $\mu < \infty$ , ragam  $\sigma^2 < \infty$ , dimana  $X_i, i \geq 1$  merupakan sebuah barisan peubah acak yang i.i.d serta diasumsikan  $E(X_1^4) < \infty$ . Pengembangan model Persamaan (3) ini dikaji pada [5-7].

Misalkan  $\mu_2 = E(X_1^2)$ . Fungsi ragam dari  $Y(t)$  pada persamaan (3), dapat didefinisikan dengan  $V(t)$  dan dapat dirumuskan pada persamaan (4):

$$V(t) = E(N(t)) E(X_1^2) = \Lambda(t) \mu_2. \tag{4}$$

Fungsi ragam dari  $Y(t)$  didapatkan dari hasil substitusi persamaan (4) ke dalam persamaan (3), sehingga didapatkan bentuk persamaan (5):

$$V(t) = \left( k_{t,\tau} \tau \theta + \Lambda_c(t_r) + a \frac{t^2}{2} \right) \mu_2. \tag{5}$$

Terdapat empat penduga yang dapat dirumuskan dari pendugaan fungsi ragam  $V(t)$  dengan menggunakan koleksi data yang tersedia. Misalkan  $k_{n,\tau} = \lfloor \frac{n}{\tau} \rfloor$ , penduga bagi  $a$  [4],  $\theta$  dan  $\Lambda_c(t_r)$  [8], serta  $\mu_2$  [7]:

$$\hat{a}_n = \frac{2N([0, n])}{n^2} \tag{6}$$

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{\ln(n/\tau) \tau} \sum_{k=1}^{k_{n,\tau}} \frac{N([(k-1)\tau, k\tau])}{k} - \hat{a}_n \left( \frac{n}{\ln(n/\tau)} - \frac{\tau}{2} \right) \tag{7}$$

$$\hat{\Lambda}_{c,n}(t_r) = \frac{1}{\ln(n/\tau)} \sum_{k=1}^{k_{n,\tau}} \frac{N([(k-1)\tau, (k-1)\tau + t_r])}{k} - \hat{a}_n \left( \frac{nt_r}{\ln(n/\tau)} + \frac{(t_r^2 - 2\tau t_r)}{2} \right). \tag{8}$$

$$\hat{\mu}_{2,n} = \frac{1}{N([0, n])} \sum_{i=1}^{N([0, n])} X_i^2 \tag{9}$$

dimana  $\hat{\mu}_{2,n} = 0$  ketika  $N([0, n]) = 0$ . Dari persamaan (6)-(9), maka pada proses Poisson periodik majemuk dengan memiliki pola tren linear dapat didefinisikan penduga bagi fungsi ragamnya pada persamaan (10):

$$\hat{V}_n(t) = \left( k_{t,\tau} \tau \hat{\theta}_n + \hat{\Lambda}_{c,n}(t_r) + \hat{a}_n \frac{t^2}{2} \right) \hat{\mu}_{2,n} \tag{10}$$

dimana  $\hat{V}_n(t) = 0$ , saat  $N([0, n]) = 0$ .

### 3.2. Kekonsistenan Penduga

Untuk melihat keefektifan penduga yang telah dirumuskan, maka perlu dikaji tentang kekonsistenan penduga-penduga. Berikut beberapa lemma dan teorema yang telah dibuktikan pada [9].

**Lemma 1.** Jika fungsi intensitas  $\lambda$  terintegralkan lokal dan memenuhi persamaan (1), maka

$$\hat{a}_n \xrightarrow{P} a. \tag{11}$$

**Lemma 2.** Jika fungsi intensitas  $\lambda$  terintegralkan lokal dan memenuhi persamaan (1), maka

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta, \tag{12}$$

untuk  $n \rightarrow \infty$ . Artinya bahwa  $\hat{\theta}_n$  merupakan penduga yang konsisten bagi  $\theta$ .

**Lemma 3.** Jika fungsi intensitas  $\lambda$  terintegralkan lokal dan memenuhi persamaan (1), maka

$$\hat{\Lambda}_{c,n}(t_\tau) \xrightarrow{P} \Lambda_c(t_\tau), \tag{13}$$

untuk  $n \rightarrow \infty$ . Artinya bahwa  $\hat{\Lambda}_{c,n}(t_\tau)$  merupakan penduga yang konsisten bagi  $\Lambda_c(t_\tau)$ .

**Lemma 4.** Jika fungsi intensitas  $\lambda$  terintegralkan lokal, memenuhi persamaan (1) dan terpenuhi pula  $\theta > 0$  dan  $a > 0$ , maka dengan peluang 1,

$$N([0, n]) \rightarrow \infty, \tag{14}$$

untuk  $n \rightarrow \infty$ .

**Teorema 1 (Kekonsistenan Lemah).** Jika fungsi intensitas  $\lambda$  terintegralkan lokal dan memenuhi persamaan (1) serta terpenuhi pula bentuk pada persamaan (3), maka

$$\hat{V}_n(t) \xrightarrow{P} V(t), \tag{15}$$

untuk  $n \rightarrow \infty$ . Artinya bahwa  $\hat{V}_n(t)$  merupakan penduga konsisten lemah bagi  $V(t)$ .

### 3.3. Bias, Ragam dan Mean Squared Error (MSE) Penduga

Berikut disajikan pembahasan terkait Bias Penduga, Ragam Penduga dan Mean Squared Error (MSE) penduga dari fungsi ragam [9].

**Teorema 2 (Asymptotic Approximation to the Bias).** Jika fungsi intensitas  $\lambda$  terintegralkan lokal dan memenuhi persamaan (1) serta terpenuhi pula bentuk pada persamaan (3), maka

$$E(\hat{V}_n(t)) = V(t) + \frac{1}{\ln(n/\tau)} \left( V(t) + \frac{1}{2} \mu_2 a \tau (k_{t,\tau} + 1) (k_{t,\tau} \tau - 2t) \right) \gamma + o\left(\frac{1}{\ln(n/\tau)}\right) \tag{16}$$

dan

$$\text{Bias}(\hat{V}_n(t)) = \frac{1}{\ln(n/\tau)} \left( V(t) + \frac{1}{2} \mu_2 a \tau (k_{t,\tau} + 1) (k_{t,\tau} \tau - 2t) \right) \gamma + o\left(\frac{1}{\ln(n/\tau)}\right) \tag{17}$$

untuk  $n \rightarrow \infty$ , di mana  $\gamma = 0.577215665 \dots$  adalah konstanta Euler.

**Teorema 3 (Asymptotic Approximation to the Variance).** Jika fungsi intensitas  $\lambda$  terintegralkan lokal dan memenuhi persamaan (1) serta terpenuhi pula bentuk pada persamaan (3), maka

$$\text{Var}(\hat{V}_n(t)) = \frac{1}{\ln(n/\tau)} a \tau ((k_{t,\tau} + 1) (2t - k_{t,\tau} \tau) - t) \mu_2^2 + o\left(\frac{1}{\ln(n/\tau)}\right) \tag{18}$$

untuk  $n \rightarrow \infty$ , di mana  $\gamma = 0.577215665 \dots$  adalah konstanta Euler.

**Akibat 1 (Asymptotic approximation to the mean squared error (MSE)).** Jika fungsi intensitas  $\lambda$  terintegralkan lokal dan memenuhi persamaan (1) serta terpenuhi pula bentuk pada persamaan (3), maka

$$\text{MSE}(\hat{V}_n(t)) = \frac{1}{\ln(n/\tau)} a \tau ((k_{t,\tau} + 1) (2t - k_{t,\tau} \tau) - t) \mu_2^2 + o\left(\frac{1}{\ln(n/\tau)}\right) \tag{19}$$

untuk  $n \rightarrow \infty$ , di mana  $\gamma = 0.577215665 \dots$  adalah konstanta Euler.

Penduga yang baik antara lain harus mempunyai ciri-ciri *unbiasedness*, *consistency*, *efficiency* dan *sufficiency* [20]. Suatu penduga tidak bias jika nilai yang diharapkan sama dengan nilai parameter yang diestimasi. Penduga pada penelitian ini merupakan penduga yang konsisten lemah, seperti yang dijelaskan pada Teorema 1. Penduga ini juga merupakan penduga yang tak bias secara asimtotik seperti yang ditunjukkan pada Teorema 2, Teorema 3 dan Akibat 1. Sedangkan penduga dikatakan paling efisien jika penduga tersebut tidak bias dan variansinya paling rendah di antara semua kemungkinan penduga yang tidak bias yang dibuat. Nilai varians yang kecil dari penduga tertentu memastikan dispersi kecil dari pendugaan nilai parameter yang tidak diketahui yang dapat diperoleh. Penduga dengan ragam yang lebih rendah lebih efisien dibandingkan penduga lainnya. Penduga suatu parameter yang tidak diketahui dianggap cukup jika penduga tersebut memuat seluruh informasi yang terkandung dalam sampel yang diambil dan tidak ada estimator lain yang memberikan lebih banyak informasi mengenai parameter yang diestimasi [20]. Suatu penduga dapat dianggap sebagai penduga yang tepat jika variabilitasnya rendah dalam percobaan berulang. Sederhananya, ketepatan suatu penduga berdasarkan besarnya ragamnya. Ragam yang kecil menunjukkan bahwa estimator memberikan jawaban yang kira-kira sama bila digunakan berulang kali. Jika suatu penduga sangat tepat tetapi juga selalu sangat jauh dari nilai sebenarnya dari parameternya, maka dianggap cacat [21].

### 3.4. Simulasi Penyusunan Penduga dengan Generalisasi Algoritma Thinning Proses

Pengamatan pada panjang interval waktu terbatas dari penduga perlu diamati, sehingga dilakukan simulasi untuk melihat perilaku yang terjadi. Pada bagian ini disajikan simulasi dengan membangkitkan realisasi dari proses Poisson majemuk yang memiliki pola periodik dan terjadinya suatu tren linear dengan panjang interval  $[0, t]$ . Dari persamaan (1), maka dapat diambil contoh fungsi intensitas pada persamaan (20):

$$\lambda(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{5}\right) + 1 + 0.01t. \tag{20}$$

Dengan menggunakan rumusan pada persamaan (6), (7), (8) dan (9), maka simulasi ini bertujuan untuk menyelidiki perilaku penduga bagi *slope*  $a$ ,  $\theta$ ,  $\Lambda_c(t_r)$  dan  $\mu_2$ , sehingga didapatkan perilaku penduga-penduga bagi fungsi ragam  $V(t)$  pada persamaan (10). Pada simulasi ini dilakukan untuk  $n=1100, 3300, 5500, 7700$  dan  $9900$  sebagai panjang interval dari data pengamatan dengan alasan mengambil ketelitian dari salah satu penduga, yaitu  $a$ , di bawah 5%, dan dengan banyak pengulangan masing-masing 10 kali. Nilai dari Bias  $(\hat{V}_n(t))$ ,  $\text{Var}(\hat{V}_n(t))$  dan  $\text{MSE}(\hat{V}_n(t))$  disajikan pula pada bagian ini.

#### Tahapan Pembuatan Program Simulasi Model

Simulasi dilakukan dalam dua tahapan, yaitu tahapan pembuatan program simulasi model dan tahapan analisis simulasi model. Tahapan pembuatan program simulasi model adalah sebagai berikut:

1. Membuat *function*  $\text{flambda}(a, s, \text{tau}, \text{up}, \text{amp})$ ,  $\text{fasli}(a, \text{mu}, s, \text{up}, \text{amp})$  dan  $\text{lambdastar}(a, n, \text{tau}, \text{up}, \text{amp})$

2. Membuat *function*  $\text{nhpprealization}(a, n, \text{tau}, \text{up}, \text{amp})$  untuk mendapatkan realisasi dari proses Poisson periodik dengan pola tren linear dengan fungsi intensitas (20). Teknik yang digunakan untuk membangkitkan *nonhomogeneous Poisson process* (NHPP) yaitu dengan teknik *thinning process*.
3. Membuat *function*  $\text{slope}(X, n)$  untuk mendapatkan penduga  $\hat{a}_n$ .
4. Membuat *function*  $\text{thetaduga}(X, n, \text{tau}, \text{aduga})$  untuk mendapatkan penduga  $\hat{\theta}_n$ .
5. Membuat *function*  $\text{lambdactr}(X, n, \text{tau}, \text{aduga}, \text{titik})$  untuk mendapatkan penduga  $\hat{\Lambda}_{c,n}(t_r)$ .
6. Membuat *function*  $\text{miu2}(X, \text{mu})$  untuk mendapatkan penduga  $\hat{\mu}_{2,n}$ .
7. Membuat *function* utama  $\text{EVFCCPLT}(n, t, \text{tau}, a, \text{ulang}, \text{mu}, \text{up}, \text{amp})$  dengan mendefinisikan variabel *input* dan *output*. Variabel *input* yaitu,  $n$  (panjang interval data pengamatan),  $t$  (panjang interval waktu pengamatan),  $\text{tau}$  (periode),  $a$  (*slope*),  $\text{ulang}$  (banyak pengulangan),  $\text{mu}$  (*second moment* dari sebaran eksponensial),  $\text{up}$  (kenaikan fungsi intensitas) dan  $\text{amp}$  (amplitudo fungsi intensitas). Variabel *output* yaitu,  $Vt$  (nilai dari fungsi ragam). *Function* ini berfungsi memanggil semua *function* sebelumnya dan menghitung penduga bagi  $a$ ,  $\theta$ ,  $\Lambda_c(t_r)$ ,  $\mu_2$  dan  $V(t)$ . Dalam *function* ini juga menampilkan *plotting*  $Vt$  untuk melihat perkembangan  $\hat{V}_n(t)$  ketika interval data pengamatan yang dipilih semakin diperpanjang.
8. Melakukan perhitungan dan menampilkan grafik dari bias penduga, ragam penduga dan *mean squared error* (MSE) penduga.

#### Tahapan Analisis Simulasi Model

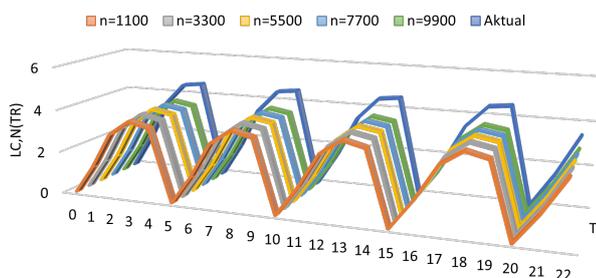
Pertama-tama dilihat banyaknya *event* atau kejadian yang terjadi antara data aktual dan simulasi. Kemudian dilihat pula perubahan nilai penduga bagi  $a$ ,  $\theta$ ,  $\Lambda_c(t_r)$ ,  $\mu_2$  dan  $V(t)$ , jika interval data pengamatan diperpanjang dengan  $n=1100, 3300, 5500, 7700$  dan  $9900$  pada interval waktu  $[0, t] = [0, 22]$ . Tabel 1 berturut-turut merupakan rata-rata kejadian dan nilai penduga bagi  $a$ ,  $\theta$ , dan  $\mu_2$  secara aktual dan simulasi menggunakan *software* Matlab.

Hasil simulasi yang disajikan pada Tabel 1 menunjukkan bahwa para penduga sudah cukup baik untuk mendekati nilai aktual [20, 21]. Terlihat bahwa penduga  $\hat{a}_n$  menuju ke nilai  $a$  dan penduga  $\hat{\theta}_n$  menuju ke nilai  $\theta$  ketika nilai  $n$  semakin bertambah walau bergerak sangat lambat. Hasil ini sesuai dengan Lemma 1 dan Lemma 2 pada  $n$  yang terbatas. Pada  $\hat{\mu}_{2,n}$  terlihat pula bahwa penduga sangat baik dimana menghasilkan nilai yang dekat dengan nilai  $\mu_2$  yaitu 0,5. Pada rata-rata kejadian terlihat bahwa semakin panjang interval waktu pengamatan, maka banyak kejadian semakin meningkat. Hasil ini juga sesuai dengan Lemma 4 pada  $n$  yang terbatas. Penduga bagi  $\Lambda_c(t_r)$  merupakan penduga yang berupa fungsi yang bergantung pada nilai  $t_r$ , dengan  $t_r = t - \lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor \tau$ . Gambar 1 merupakan rata-rata  $\hat{\Lambda}_{c,n}(t_r)$  dari hasil simulasi dan nilai aktual.

Nilai rata-rata penduga  $\hat{\Lambda}_{c,n}(t_r)$  dari hasil simulasi pada Gambar 1 didapatkan bahwa penduga menuju ke nilai  $\Lambda_c(t_r)$  jika nilai  $n$  semakin bertambah walau sangat lambat. Hasil ini sesuai dengan Lemma 3 pada  $n$  yang terbatas. Pada kasus ini penduga

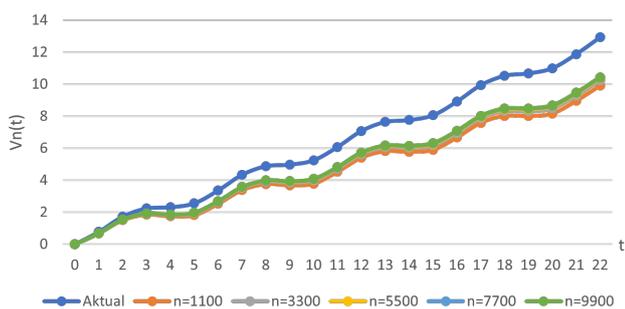
**Tabel 1.** Rata-rata banyak kejadian,  $\hat{a}_n$ ,  $\hat{\theta}_n$  dan  $\hat{\mu}_{2,n}$

Simbol	$n$	Rata-rata kejadian	Rata-rata $\hat{a}_n$	Rata-rata $\hat{\theta}_n$	Rata-rata $\hat{\mu}_{2,n}$
N1	1100	7107,10	0,01174	0,69986	0,4987
N2	3300	57579,50	0,01059	0,74202	0,50009
N3	5500	156358	0,01032	0,75859	0,50001
N4	7700	303720,90	0,01023	0,7638	0,49991
N5	9900	499615,70	0,0102	0,76705	0,4996
Nilai Aktual			0,01	1	0,50



**Gambar 1.** Rata-rata  $\hat{L}_{c,n}(t_r)$  hasil simulasi

yang paling dekat yaitu ketika  $n=9900$ . Gambar 2 merupakan rata-rata  $\hat{V}_n(t)$  dari hasil simulasi dan nilai aktual.



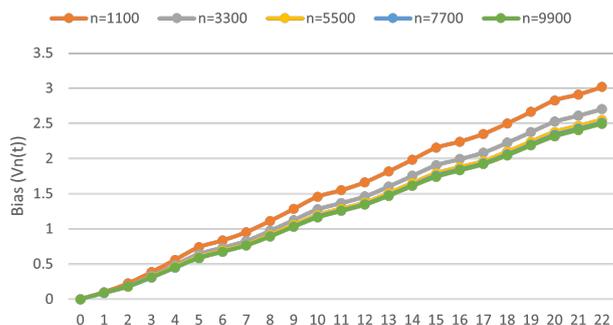
**Gambar 2.** Rata-rata  $\hat{V}_n(t)$  hasil simulasi

Nilai rata-rata penduga  $\hat{V}_n(t)$  dari hasil simulasi pada Gambar 2 didapatkan bahwa penduga menuju ke nilai  $V(t)$  jika nilai  $n$  semakin bertambah walau sangat lambat. Hasil ini sesuai dengan Teorema 1 pada  $n$  yang terbatas. Pada kasus ini penduga yang paling dekat yaitu ketika  $n=9900$ . Hasil ini juga menunjukkan bahwa semakin panjang interval ( $t$ ), maka nilai dari penduga semakin menjauhi nilai aktual. Hal ini sesuai dengan rumusan dari  $V(t)$  dan  $\hat{V}_n(t)$  pada persamaan (5) dan (10).

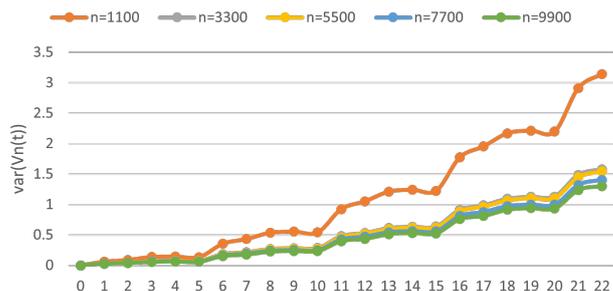
Perhitungan bias penduga bagi  $V(t)$  pada simulasi ini memiliki sifat penduga *under estimation*, maka bias penduga dapat dihitung dengan nilai absolut dari persamaan bias penduga. Sehingga didapatkan perubahan nilai Bias ( $\hat{V}_n(t)$ ) yang disajikan pada Gambar 3.

Nilai nilai Bias ( $\hat{V}_n(t)$ ) dari hasil simulasi pada Gambar 3 didapatkan bahwa penduga menuju ke 0 jika nilai  $n$  semakin bertambah. Hasil ini sesuai dengan Teorema 2 pada  $n$  yang terbatas. Perhitungan ragam penduga bagi  $V(t)$  disajikan pada Gambar 4.

Nilai Var ( $\hat{V}_n(t)$ ) dari hasil simulasi pada Gambar 4 didap-

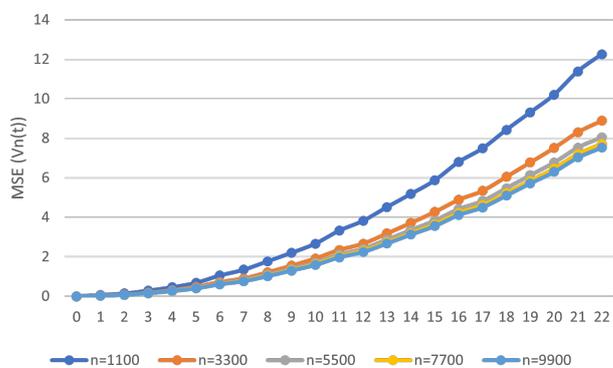


**Gambar 3.** Nilai Bias ( $\hat{V}_n(t)$ ) hasil simulasi



**Gambar 4.** Nilai Var ( $\hat{V}_n(t)$ ) hasil simulasi

atkan bahwa penduga menuju ke 0 jika nilai  $n$  semakin bertambah. Hasil ini sesuai dengan Teorema 3 pada  $n$  yang terbatas. Gambar 5 merupakan hasil simulasi nilai MSE penduga.



**Gambar 5.** Nilai MSE ( $\hat{V}_n(t)$ ) hasil simulasi

Nilai nilai MSE ( $\hat{V}_n(t)$ ) dari hasil simulasi pada Gambar 5 didapatkan bahwa penduga menuju ke 0 jika nilai  $n$  semakin

bertambah. Hasil ini sesuai dengan Akibat 1 pada  $n$  yang terbatas. Pada kasus ini penduga yang memiliki MSE yang paling kecil yaitu ketika  $n = 9900$ .

#### 4. Kesimpulan

Implementasi dari penggunaan generalisasi algoritma *thinning process* pada proses Poisson majemuk yang memiliki pola periodik serta memiliki pola tren linear telah dilakukan. Algoritma ini diimplementasikan terhadap penduga fungsi ragam. Hasil simulasi didapatkan beberapa penduga proses Poisson majemuk yang telah didefinisikan sudah cukup baik untuk menuju nilai aktual seperti  $\hat{\alpha}_n$  dan  $\hat{\mu}_{2,n}$ . Pada penduga  $\hat{\theta}_n$ ,  $\hat{\Lambda}_{c,n}(t_r)$ , dan  $\hat{V}_n(t)$  cukup lambat. Hal ini mengakibatkan nilai Bias  $(\hat{V}_n(t))$ ,  $\text{Var}(\hat{V}_n(t))$ , dan  $\text{MSE}(\hat{V}_n(t))$  pergerakannya masih lambat meskipun semakin menuju ke 0, sehingga selanjutnya dapat dilakukan modifikasi terhadap model yang dikaji.

**Kontribusi Penulis.** Semua penulis berkontribusi dalam hal: Konsep-tualisasi, pengumpulan data, metodologi, analisis formal, investigasi, penulisan draft, validasi, visualisasi, penulisan pembahasan dan pengeditan. Semua penulis telah membaca dan menyetujui versi manuskrip yang diterbitkan.

**Ucapan Terima Kasih.** Para penulis menyampaikan terima kasih kepada editor dan reviewer atas pembacaan yang cermat, kritik yang mendalam, dan rekomendasi yang praktis untuk meningkatkan kualitas tulisan ini.

**Pembiayaan.** Penelitian ini mendapatkan dukungan pembiayaan dari Universitas Sultan Ageng Titayasa melalui hibah penelitian internal dengan skema Penelitian Dosen Pemula tahun 2023.

**Konflik Kepentingan.** Para penulis menyatakan tidak ada konflik kepentingan yang terkait dengan artikel ini.

#### Referensi

- [1] F. Beichelt, *Stochastic Processes in Science, Engineering and Finance*. New York (US): Chapman & Hall/CRC, 2006, doi: [10.1201/9781420010459](https://doi.org/10.1201/9781420010459).
- [2] K. Andrzejczak, M. Młyńczak, and J. Selech, "Poisson-distributed failures in the predicting of the cost of corrective maintenance," *Eksplorat. i Niezawodn. Reliab.*, vol. 20, no. 4, pp. 602–609, 2018, doi: [10.17531/ein.2018.4.11](https://doi.org/10.17531/ein.2018.4.11).
- [3] C. D. Pahlajani, I. Poulakakis, and H. G. Tanner, "Networked decision making for Poisson processes with application to nuclear detection," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 59, no. 1, pp. 193–198, 2014, doi: [10.1109/TAC.2013.2267399](https://doi.org/10.1109/TAC.2013.2267399).
- [4] R. Helmers and I. W. Mangku, "Estimating the intensity of a cyclic Poisson process in the presence of linear trend," *Ann. Inst. Stat. Math.*, vol. 61, pp. 599–628, 2009, doi: [10.1007/s10463-007-0160-2](https://doi.org/10.1007/s10463-007-0160-2).
- [5] I. W. Mangku, Ruhayat, and I. G. P. Purnaba, "Statistical properties of an estimator for the mean function of a compound cyclic Poisson process," *Far East J. Math. Sci.*, vol. 82, no. 2, pp. 227–237, 2013.
- [6] Ruhayat, I. W. Mangku, and I. G. P. Purnaba, "Consistent estimation of the mean function of a compound cyclic Poisson process," *Far East J. Math. Sci.*, vol. 77, no. 2, pp. 183–194, 2013.
- [7] F. I. Makhmudah, I. W. Mangku, and H. Sumarno, "Estimating the variance function of a compound cyclic Poisson process," *Far East J. Math. Sci.*, vol. 100, no. 6, pp. 911–922, 2016, doi: [10.17654/MS100060911](https://doi.org/10.17654/MS100060911).
- [8] B. A. Wibowo, I. W. Mangku, and Siswadi, "Statistical properties of an estimator for the mean function of a compound cyclic Poisson process in the presence of linear trend," *Arab J. Math. Sci.*, vol. 23, no. 2, pp. 173–185, 2017, doi: [10.1016/j.ajmsc.2016.08.004](https://doi.org/10.1016/j.ajmsc.2016.08.004).
- [9] S. Abdullah, I. W. Mangku, and Siswadi, "Estimating the variance function of a compound cyclic Poisson process in the presence of linear trend," *Far East J. Math. Sci.*, vol. 102, no. 3, pp. 559–572, 2017, doi: [10.17654/MS102030559](https://doi.org/10.17654/MS102030559).
- [10] P. A. W. Lewis and G. S. Shedler, *Simulation Poisson process by thinning*. Naval Postgraduate School Monterey. California (US): Calhoun, 1979.
- [11] S. M. Ross, *Simulation*, 5th ed. Amsterdam (NL): Academic Pr., 2012.
- [12] S. M. Ross, *Introduction to Probability Models*, 12th ed. Florida (US): Academic Pr., 2019.
- [13] S. Abdullah, F. Ikhsan, S. Ula, and Y. Rukmayadi, "Thinning process algorithms for compound Poisson process having nonhomogeneous Poisson process (NHPP) intensity functions," in *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, p. 673 (012062), 2019, doi: [10.1088/1757-899X/673/1/012062](https://doi.org/10.1088/1757-899X/673/1/012062).
- [14] S. Abdullah, S. Susilo, S. Ula, W. Aswata, N. Valentika, and S. I. U. Chasanah, "Algoritma membangkitkan proses Poisson majemuk dengan komponen proses Poisson nonhomogen fungsi linear dan komponen berdistribusi eksponensial," *STATMAT J. Stat. dan Mat.*, vol. 2, no. 1, pp. 81–93, 2020, doi: [10.32493/sm.v2i1.4224](https://doi.org/10.32493/sm.v2i1.4224).
- [15] S. Abdullah, S. Susilo, I. W. Mangku, F. Ikhsan, S. Ula, and Y. Rukmayadi, "Algorithm for generating compound Poisson process which has nonhomogeneous Poisson process and exponential distribution components," in *1st International Multidisciplinary Conference on Education, Technology, and Engineering (IMCETE 2019)*, pp. 241–246, 2020, doi: [10.2991/assehr.k.200303.059](https://doi.org/10.2991/assehr.k.200303.059).
- [16] S. Abdullah et al., "Generalisasi Algoritma Thinning Process pada Proses Poisson Majemuk dengan Komponen Proses Poisson Nonhomogen dan Distribusi Gamma," *MUST J. Math. Educ. Sci. Technol.*, vol. 5, no. 2, pp. 221–239, 2020, doi: [10.30651/must.v5i2.6485](https://doi.org/10.30651/must.v5i2.6485).
- [17] J. H. Cha, "On a stochastic failure model under random shocks," in *Journal of Physics: Conference Series*, p. 410 012108, 2013, doi: [10.1088/1742-6596/410/1/012108](https://doi.org/10.1088/1742-6596/410/1/012108).
- [18] H. Soltanali, A. Rohani, M. Tabasizadeh, M. H. Abbaspour-Fard, and A. Parida, "Operational reliability evaluation-based maintenance planning for automotive production line," *Qual. Technol. Quant. Manag.*, vol. 17, no. 2, pp. 186–202, 2019, doi: [10.1080/16843703.2019.1567664](https://doi.org/10.1080/16843703.2019.1567664).
- [19] Z. Zhang, W. Li, and J. Yang, "Analysis of stochastic process to model safety risk in construction industry," *J. Civ. Eng. Manag.*, vol. 27, no. 2, pp. 87–99, 2021, doi: [10.3846/jcem.2021.14108](https://doi.org/10.3846/jcem.2021.14108).
- [20] J. M. Czaplicki, *Statistics for Mining Engineering*. London: CRC Press Taylor & Francis Group, 2014.
- [21] F. J. Samaniego, *Stochastic Modeling and Mathematical Statistics: A Text for Statisticians and Quantitative Scientists*. London: CRC Press Taylor & Francis Group, 2014.