RESEARCH ARTICLE • OPEN ACCESS

Struktur Simplektik pada Aljabar Lie Affine $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$

Aurillya Queency, Edi Kurniadi, dan Firdaniza Firdaniza

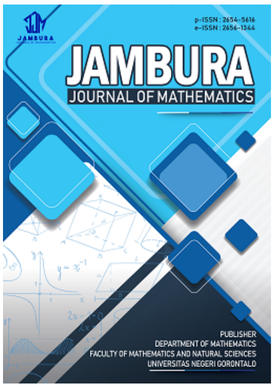
JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS

Volume 6, Issue 1, Pages 62–67, February 2024

Submit 4 Desember 2023, Direvisi 20 Januari 2024, Disetujui 22 Januari 2024

To Cite this Article : A. Queency, E. Kurniadi, dan F. Firdaniza,"Struktur Simplektik pada Aljabar Lie Affine $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$", *Jambura J. Math*, vol. 6, no. 1, pp. 62–67, 2024, *https://doi.org/10.37905/jjom.v6i1.23254*

JOURNAL INFO • JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS



Homepage	:	http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/index
Journal Abbreviation	:	Jambura J. Math.
Frequency	:	Biannual (February and August)
Publication Language	:	English (preferable), Indonesia
DOI	:	https://doi.org/10.37905/jjom
Online ISSN	:	2656-1344
Editor-in-Chief	:	Hasan S. Panigoro
Publisher	:	Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo
Country	:	Indonesia
OAI Address	:	http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/oai
Google Scholar ID	:	iWLjgaUAAAAJ
Email	:	info.jjom@ung.ac.id

Jambura Journal of Mathematics, Volume 6, Issue 1, Pages 62–67, February 2024 *https://doi.org/10.37905/jjom.v6i1.23254*

Research Article

Check for updates

Struktur Simplektik pada Aljabar Lie Affine $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$

Aurillya Queency[1,*], **Edi Kurniadi**[1], **dan Firdaniza Firdaniza**[1]

[1] *Departemen Matematika, Universitas Padjadjaran, Indonesia*

ARTICLE HISTORY
Submit 4 Desember 2023
Direvisi 20 Januari 2024
Disetujui 22 Januari 2024

KATA KUNCI
1-*form*
2-*form*
Aljabar Lie Affine
Aljabar Lie Frobenius
Struktur Simplektik

KEYWORDS
1-form
2-form
Affine Lie Algebra
Frobenius Lie Algebra
Symplectic Structure

ABSTRAK. *Pada penelitian ini dipelajari tentang aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan 1-form pada aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ yang dikaitkan dengan struktur simplektiknya sedemikian sehingga aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ merupakan aljabar Lie Frobenius. Elemen-elemen dari aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ didefinisikan dalam bentuk matriks kemudian dihitung bracket Lie dan dibentuk matriks struktur dari aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$. 1-form dari aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ diperoleh dari determinan matriks struktur aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$. Selanjutnya, dibuktikan bahwa 2-form-nya bersifat simplektik dan berkaitan dengan 1-form-nya. Hasil yang diperoleh adalah aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ mempunyai 1-form $\alpha = \varepsilon_{12}^* + \varepsilon_{23}^*$ pada $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})^*$ yang berkaitan dengan symplectic form-nya, yaitu $\beta = \varepsilon_{11}^* \wedge \varepsilon_{12}^* + \varepsilon_{12}^* \wedge \varepsilon_{22}^* + \varepsilon_{21}^* \wedge \varepsilon_{13}^* + \varepsilon_{22}^* \wedge \varepsilon_{23}^*$ sedemikian sehingga aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ merupakan aljabar Lie Frobenius. Untuk penelitian selanjutnya, dapat dikembangkan pada aljabar Lie affine dengan dimensi $n(n+1)$.*

ABSTRACT. *In this research, we studied the affine Lie algebra $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$. The aim of this research is to determine the 1-form in affine Lie algebra $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ which is associated with its symplectic structure so that affine Lie algebra $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ is a Frobenius Lie algebra. Realized the elements of the affine Lie algebra $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ in matrix form, then calculated the Lie brackets and formed the structure matrix of the affine Lie algebra $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$. 1-form of the affine Lie algebra $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ is obtained from the determinant of the structure matrix of the affine Lie algebra $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$. Furthermore, proved that the 2-form is symplectic and related to the 1-form. The result obtained is that the affine Lie algebra $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ has 1-form $\alpha = \varepsilon_{12}^* + \varepsilon_{23}^*$ on $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})^*$ which is related to its symplectic structure, $\beta = \varepsilon_{11}^* \wedge \varepsilon_{12}^* + \varepsilon_{12}^* \wedge \varepsilon_{22}^* + \varepsilon_{21}^* \wedge \varepsilon_{13}^* + \varepsilon_{22}^* \wedge \varepsilon_{23}^*$ such that the affine Lie algebra $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ is a Frobenius Lie algebra. For further research, it can be developed into an affine Lie algebra with dimensions $n(n+1)$.*

1. Pendahuluan

Aljabar Lie merupakan salah satu jenis aljabar yang diperkenalkan pertama kali pada tahun 1873-1874 oleh Sophus Lie, seorang matematikawan asal Norwegia [1]. Aljabar Lie adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$ dengan *bracket* Lie yang memenuhi kondisi-kondisi pemetaan bilinear, *skew-symmetric*, dan identitas Jacobi [2]. Penelitian tentang aljabar Lie sudah banyak dilakukan, seperti representasi aljabar Lie [3–6], aljabar Lie nilpoten [7–9], dan penggunaan aljabar Lie untuk menyelesaikan model populasi biologis [10].

Aljabar Lie mempunyai beberapa jenis kelas, salah satunya adalah aljabar Lie Frobenius, yaitu jika indeks suatu aljabar Lie sama dengan nol [11] atau jika orbit *coadjoint* suatu grup Lie buka di ruang dual aljabar Lie-nya [12]. Aljabar Lie Frobenius banyak dibahas dalam beberapa penelitian lebih lanjut, seperti *alternating bilinear form* dari aljabar Lie Frobenius adalah *nondegenerate* [13], klasifikasi dari kelas isomorfisma pada aljabar Lie Frobenius untuk dimensi ≤ 6 [14], dan representasi grup Lie dari aljabar Lie Frobenius berdimensi 4 memiliki representasi unitar yang bersifat *square-integrable* [15].

Aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(n,\mathbb{R})$ merupakan salah satu contoh dari aljabar Lie Frobenius yang elemen-elemennya dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Sudah banyak hasil penelitian yang diperoleh mengenai aljabar Lie affine, misalnya tentang semua turunan dari aljabar Lie affine akan selalu *inner* [16] dan aljabar simetrik kiri dari aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(1,\mathbb{R})$ merupakan aljabar Lie Frobenius berdimensi 2 dengan 1-*form* $\alpha = \varepsilon_{12}^*$ yang berkorespondensi dengan 2-*form* $\beta = -\varepsilon_{11}^* \wedge \varepsilon_{12}^*$ dan hubungan antara keduanya dinyatakan oleh $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\alpha([\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}])$ untuk setiap $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathfrak{aff}(1,\mathbb{R})$ [17].

Hubungan antara 1-*form* α dan 2-*form* β pada aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(n,\mathbb{R})$ berdimensi $n(n+1)$ didefinisikan pada [12] dalam bentuk $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \alpha([\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}])$ untuk setiap $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathfrak{aff}(n,\mathbb{R})$. Namun demikian, hasil yang diperoleh dalam [12] hanya formula untuk 1-*form* α tetapi belum diberikan formula untuk 2-*form* β yang bersifat *skew-symmetric* dan *nondegenerate*. Oleh karena itu, dalam penelitian ini dikonstruksi bentuk 2-*form* β yang bersifat *skew-symmetric* dan *nondegenerate* khususnya untuk kasus $n = 2$, yaitu aljabar Lie $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ berdimensi 6. Dalam hal ini, 1-*form* α dan 2-*form* β memenuhi hubungan $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \alpha([\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}])$ untuk setiap

*Penulis Korespondensi.

Email : *aurillya20001@mail.unpad.ac.id* (A. Queency)
Homepage : http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/index / E-ISSN : 2656-1344

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ dan 2-*form* β bersifat *skew-symmetric* dan *nondegenerate* sehingga aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ merupakan aljabar Lie Frobenius. Bentuk 1-*form* α tersebut dinamakan fungsional Frobenius dan 2-*form* β dinamakan *symplectic form*. Penelitian ini sangat penting untuk memotivasi penelitian selanjutnya, yaitu untuk mengonstruksi bentuk 2-*form skew-symmetric* dan *nondegenerate* pada aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(n,\mathbb{R})$ dan membuktikan bahwa aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(n,\mathbb{R})$ merupakan aljabar Lie Frobenius.

2. Metode

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur mengenai *symplectic form*, aljabar Lie, dan aljabar Lie Frobenius. Secara eksplisit, penelitian dilakukan mengikuti langkah-langkah berikut:

1. Mendefinisikan aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$.
2. Mendefinisikan $B = \{\varepsilon_{11}, \ldots, \varepsilon_{23}\}$ basis aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ dan $B^* = \{\varepsilon_{11}^*, \ldots, \varepsilon_{23}^*\}$ basis $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})^*$, yaitu dual basis aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ dimana ε_{ij} adalah matriks 3×3 dengan elemen 1 pada baris ke-i dan kolom ke-j.
3. Mengonstruksi *bracket* Lie $[\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}]$ tak nol.
4. Menentukan matriks struktur dan determinannya.
5. Menentukan 1-*form* α pada aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$, dengan mengacu pada determinan matriks struktur yang telah diperoleh.
6. Menentukan 2-*form* β pada aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ dan menunjukkan bahwa $\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha([\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}])$ untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ atau 1-*form* α berkorespondensi dengan 2-*form* β.
7. Menunjukkan bahwa β merupakan *symplectic form*, yaitu dengan menunjukkan 2-*form* β *skew-symmetric* dan *nondegenerate* sehingga dapat disimpulkan bahwa aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ mempunyai fungsional Frobenius α yang berkorespondensi dengan *symplectic form* β sedemikian sehingga aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$ merupakan aljabar Lie Frobenius.

Berikut adalah teori-teori dasar yang digunakan pada penelitian ini. Definisi 1-4 yang merujuk pada [2], Teorema 1 yang merujuk pada [6], serta Definisi 5 dan Definisi 6 yang masing-masing merujuk pada [11, 12] digunakan untuk membuktikan hasil utama pada penelitian ini.

Definisi 1. *Misalkan $B = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ basis dari V. Himpunan $B^* = \{\varepsilon_1^*, \ldots, \varepsilon_n^*\}$, di mana $\varepsilon_i^* : V \to \mathbb{R}$ suatu 1-form yang didefinisikan oleh*

$$\varepsilon_i^*(\varepsilon_j) = \begin{cases} 1, & jika\ i = j \\ 0, & jika\ i \neq j, \end{cases}$$

disebut basis untuk V^* dual terhadap basis B.

Definisi 2. *Misalkan V ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$. Symplectic form pada V adalah pemetaan bilinear $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ yang memenuhi kondisi-kondisi berikut:*

1. *ω adalah bilinear form pada V,*
2. *ω skew-symmetric: Untuk setiap $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$, berlaku $\omega(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = -\omega(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$,*
3. *ω nondegenerate: Jika $\boldsymbol{v} \in V$ memiliki sifat bahwa $\omega(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$, untuk setiap $\boldsymbol{w} \in V$, maka $\boldsymbol{v} = 0$.*

Pasangan (V, ω) disebut sebagai ruang vektor simplektik.

Definisi 3. *Misalkan V ruang vektor berdimensi n dengan basis $B = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ dan $B^* = \{\varepsilon_1^*, \ldots, \varepsilon_n^*\}$ basis V^* dual terhadap B. Untuk setiap $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$, didefinisikan k-form pada V, yaitu $\varepsilon_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{i_k}^*$ sebagai*

$$\left(\varepsilon_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{i_k}^*\right)(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{i_1}^*(\boldsymbol{v}_1) & \ldots & \varepsilon_{i_1}^*(\boldsymbol{v}_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{i_k}^*(\boldsymbol{v}_1) & \ldots & \varepsilon_{i_k}^*(\boldsymbol{v}_k) \end{vmatrix}$$

untuk setiap $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ dan $\wedge$ suatu wedge product antar 1-form.

Definisi 4. *Misalkan V ruang vektor berdimensi n dengan $B = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ dan $B^* = \{\varepsilon_1^*, \ldots, \varepsilon_n^*\}$ basis V^* dual terhadap B. Penjumlahan 2-form pada V didefinisikan sebagai*

$$\begin{aligned}\left(\varepsilon_{i_1}^* \wedge \varepsilon_{i_2}^* + \cdots + \varepsilon_{i_{k-1}}^* \wedge \varepsilon_{i_k}^*\right)&\\ (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) &= \left(\varepsilon_{i_1}^* \wedge \varepsilon_{i_2}^*\right)(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) + \ldots \\ &+ \left(\varepsilon_{i_{k-1}}^* \wedge \varepsilon_{i_k}^*\right)(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\end{aligned}$$

untuk setiap $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ dan $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$.

Teorema 1. *Misalkan $\mathfrak{g}$ aljabar Lie atas lapangan $\mathbb{R}$ dengan basis $B = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$. Skew-symmetric 2-form β pada $\mathfrak{g}$ dikatakan nondegenerate jika dan hanya jika*

$$|M_\beta| = \begin{vmatrix} \beta(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) & \ldots & \beta(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_1) & \ldots & \beta(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_n) \end{vmatrix} \neq 0, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

dengan M_β matriks representasi untuk β.

Bukti. ($\Rightarrow$) Diketahui bahwa $\mathfrak{g}$ aljabar Lie atas lapangan $\mathbb{R}$ dengan basis $B = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ dan *skew-symmetric* 2-*form* β pada $\mathfrak{g}$ *nondegenerate*.

Akan dibuktikan bahwa $\det(M_\beta) \neq 0$. Untuk melihat ini, *claim* bahwa matriks persegi $M_\beta = (\beta(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j)), 1 \leq i, j \leq n$ merupakan matriks representasi dari β. Ambil $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}$ sembarang yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{x}_k + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n, \\ \boldsymbol{v} &= \gamma_1 \boldsymbol{x}_1 + \gamma_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \gamma_k \boldsymbol{x}_k + \cdots + \gamma_n \boldsymbol{x}_n,\end{aligned}$$

untuk suatu skalar $\alpha_k, \gamma_k \in \mathbb{R}$ dengan $1 \leq k \leq n$. Berdasarkan pendefinisian tersebut, diperoleh

$$\beta(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_1) & \beta(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) & \cdots & \beta(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_j) \\ \beta(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1) & \beta(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_2) & \cdots & \beta(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_1) & \beta(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_2) & \cdots & \beta(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{x}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

Jadi, $M_\beta = (\beta(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)), 1 \le i,j \le n$ merupakan matriks representasi dari β. Kemudian, asumsikan bahwa B basis standar untuk $\mathfrak{g}$, maka $\beta(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}^T M_\beta \boldsymbol{v}$. Karena 2-*form* β *skew-symmetric* dan *nondegenerate*, maka $\beta(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}^T M_\beta \boldsymbol{u} = 0$. Berdasarkan sifat *nondegeneracy*, $\beta(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}^T M_\beta \boldsymbol{u} = 0$ terpenuhi untuk setiap $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}$ jika $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$. Artinya, untuk setiap $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}$, $M_\beta \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ hanya memiliki solusi trivial $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ atau M_β *invertible*. Jadi, $\det(M_\beta) \neq 0$.

($\Leftarrow$) Diketahui bahwa $\mathfrak{g}$ aljabar Lie atas lapangan $\mathbb{R}$ dengan basis $B = \{\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n\}$ dan $\det(M_\beta) \neq 0$, artinya matriks M_β *invertible*. Akan dibuktikan bahwa *skew-symmetric* 2-*form* β *nondegenerate*. Untuk melihat ini, ambil $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}$ sembarang. Berdasarkan pembuktian sebelumnya, jika $\beta(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}^T M_\beta \boldsymbol{u} = 0$, maka $\boldsymbol{v}^T M_\beta \boldsymbol{u} = 0$ hanya dipenuhi oleh $M_\beta \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ untuk setiap $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}$. Karena M_β *invertible*, maka $M_\beta \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ hanya memiliki solusi trivial $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$. Berdasarkan Definisi 2 bagian 3, dapat disimpulkan jika $\beta(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 0$ terpenuhi untuk setiap $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}$, maka $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$. Jadi, *skew-symmetric* 2-*form* β *nondegenerate*. □

Definisi 5. *Misalkan $\mathfrak{g}$ aljabar Lie atas lapangan $\mathbb{R}$ dengan basis $\{\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n\}$, $\mathfrak{g}$ dikatakan aljabar Lie Frobenius jika salah satu kondisi berikut dipenuhi:*

1. $\det([\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j]) \neq 0$, *dengan $[\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j]$ merupakan entri dari aljabar simetrik $S(\mathfrak{g})$,*
2. $\det(f([\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j])) \neq 0$ *untuk suatu $f \in \mathfrak{g}^*$,*
3. *Terdapat fungsional linear $f \in \mathfrak{g}^*$ sedemikian sehingga alternating bilinear form pada $\mathfrak{g}$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to f([\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}])$ nondegenerate,*
4. *$\mathfrak{g}$ adalah aljabar Lie dengan indeks 0.*

Definisi 6. *Pasangan $(\mathfrak{g},\alpha)$ dengan $\mathfrak{g}$ aljabar Lie dan α fungsional linear dikatakan Frobenius jika terdapat skew-symmetric 2-form β sedemikian sehingga untuk setiap $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathfrak{g}$ pemetaan*

$$\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \alpha([\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}])$$

adalah nondegenerate.

Contoh 1. Aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(1,\mathbb{R})$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\mathfrak{aff}(1,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{gl}(1,\mathbb{R}), b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dapat ditunjukkan bahwa aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(1,\mathbb{R})$ mempunyai fungsional Frobenius pada $\mathfrak{aff}(1,\mathbb{R})^*$ yang berkorespondensi dengan *symplectic form*-nya sedemikian sehingga aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(1,\mathbb{R})$ merupakan aljabar Lie Frobenius. Basis standar dari aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(1,\mathbb{R})$ adalah

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

dan basis dual dari aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(1,\mathbb{R})$ adalah

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{11}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_{12}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dengan komutator matriks $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}] = \boldsymbol{xy} - \boldsymbol{yx}$, untuk setiap $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathfrak{aff}(1,\mathbb{R})$ dan basis standar pada persamaan (1), diperoleh *bracket* Lie tak nol dari aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(1,\mathbb{R})$, yaitu

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_{11},\boldsymbol{\varepsilon}_{12}] = \boldsymbol{\varepsilon}_{12}. \tag{2}$$

Selanjutnya, diperoleh determinan matriks dari struktur aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(1,\mathbb{R})$ dengan menggunakan *bracket* Lie tak nol pada persamaan (2) yaitu

$$\begin{aligned} \det(M_{\mathfrak{aff}(1,\mathbb{R})}) &= \begin{vmatrix} [\boldsymbol{\varepsilon}_{11},\boldsymbol{\varepsilon}_{11}] & [\boldsymbol{\varepsilon}_{11},\boldsymbol{\varepsilon}_{12}] \\ [\boldsymbol{\varepsilon}_{12},\boldsymbol{\varepsilon}_{11}] & [\boldsymbol{\varepsilon}_{12},\boldsymbol{\varepsilon}_{12}] \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & \boldsymbol{\varepsilon}_{12} \\ -\boldsymbol{\varepsilon}_{12} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}_{12}^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Berdasarkan determinan pada persamaan (3), pilih 1-*form* α dengan bentuk

$$\alpha = \boldsymbol{\varepsilon}_{12}^*. \tag{4}$$

Kemudian, pilih 2-*form* β dengan bentuk

$$\beta = \boldsymbol{\varepsilon}_{11}^* \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_{12}^*. \tag{5}$$

Dengan menggunakan 1-*form* dan 2-*form* yang telah ditentukan pada persamaan (4) dan persamaan (5), diperoleh hasil perhitungan pada Tabel 1.

Tabel 1. Hasil perhitungan $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ dan $\alpha([\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}])$ untuk setiap $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathfrak{aff}(1,\mathbb{R})$

$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$	$\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$	$\alpha([\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}])$
$[\boldsymbol{\varepsilon}_{11},\boldsymbol{\varepsilon}_{11}]$	0	0
$[\boldsymbol{\varepsilon}_{11},\boldsymbol{\varepsilon}_{12}]$	1	1
$[\boldsymbol{\varepsilon}_{12},\boldsymbol{\varepsilon}_{11}]$	-1	-1
$[\boldsymbol{\varepsilon}_{12},\boldsymbol{\varepsilon}_{12}]$	0	0

Perhatikan Tabel 1 kolom 2 dan 3. Terlihat bahwa $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \alpha([\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}])$ untuk setiap $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathfrak{aff}(1,\mathbb{R})$ atau 1-*form* $\alpha = \varepsilon_{12}^*$ berkorespondensi dengan 2-*form* $\beta = \varepsilon_{11}^* \wedge \varepsilon_{12}^*$. Selain itu, hasil pada Tabel 1 menunjukkan bahwa $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\beta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ untuk setiap $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathfrak{aff}(1,\mathbb{R})$ atau β bersifat *skew-symmetric*. Selanjutnya, dengan menggunakan hasil perhitungan $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ pada Tabel 1 kolom 2, diperoleh determinan matriks representasi dari aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(1,\mathbb{R})$, yaitu

$$\begin{aligned}\det(M_\beta) &= \begin{vmatrix} \beta(\varepsilon_{11},\varepsilon_{11}) & \beta(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12}) \\ \beta(\varepsilon_{12},\varepsilon_{11}) & \beta(\varepsilon_{12},\varepsilon_{12}) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1.\end{aligned} \tag{6}$$

Perhatikan hasil determinan pada persamaan (6). Terlihat bahwa $\det(M_\beta) \neq 0$, sehingga β *nondegenerate*. Berdasarkan Definisi 5 dan Definisi 6, dapat disimpulkan bahwa aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(1,\mathbb{R})$ mempunyai fungsional Frobenius $\alpha = \varepsilon_{12}^*$ pada $\mathfrak{aff}(1,\mathbb{R})^*$ yang berkorespondensi dengan *symplectic form*-nya $\beta = \varepsilon_{11}^* \wedge \varepsilon_{12}^*$ sedemikian sehingga aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(1,\mathbb{R})$ merupakan aljabar Lie Frobenius.

3. Hasil dan Pembahasan

Hasil utama pada penelitian ini dinyatakan dalam Proposisi 1. Berbeda dengan hasil dalam [12], pada penelitian ini dikonstruksi 2-*form* β yang bersifat *skew-symmetric* dan *nondegenerate* serta memenuhi hubungan $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \alpha([\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}])$ untuk setiap $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$. Kondisi ini mengakibatkan aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ merupakan aljabar Lie Frobenius.

Proposisi 1. *Misalkan $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ aljabar Lie affine berdimensi 6 dengan basis $B = \{\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{13},\varepsilon_{21},\varepsilon_{22},\varepsilon_{23}\}$ dan misalkan $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})^*$ dual ruang vektor dari $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ dengan basis $B^* = \{\varepsilon_{11}^*,\varepsilon_{12}^*,\varepsilon_{13}^*,\varepsilon_{21}^*,\varepsilon_{22}^*,\varepsilon_{23}^*\}$. Maka untuk suatu fungsional Frobenius $\alpha = \varepsilon_{12}^* + \varepsilon_{23}^* \in \mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})^*$, terdapat symplectic form*

$$\beta = \varepsilon_{11}^*\wedge\varepsilon_{12}^* + \varepsilon_{12}^*\wedge\varepsilon_{22}^* + \varepsilon_{21}^*\wedge\varepsilon_{13}^* + \varepsilon_{22}^*\wedge\varepsilon_{23}^* \in \wedge_2(\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R}))$$

yang hubungan keduanya diberikan oleh persamaan

$$\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \alpha([\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}])$$

untuk setiap $x, y \in \mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$. Lebih jauh, kondisi ini mengakibatkan aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ adalah aljabar Lie Frobenius.

Bukti. Aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ dapat dinyatakan sebagai

$$\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Misalkan $B = \{\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{13},\varepsilon_{21},\varepsilon_{22},\varepsilon_{23}\}$ basis standar aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \varepsilon_{12} = \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix},\\ \varepsilon_{13} &= \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \varepsilon_{21} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix},\\ \varepsilon_{22} &= \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \varepsilon_{23} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{7}$$

Kemudian, misalkan $B^* = \{\varepsilon_{11}^*,\varepsilon_{12}^*,\varepsilon_{13}^*,\varepsilon_{21}^*,\varepsilon_{22}^*,\varepsilon_{23}^*\}$ dual basis aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$. Elemen-elemen B^* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^* &= \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \varepsilon_{12}^* = \begin{pmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix},\\ \varepsilon_{13}^* &= \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix}, \varepsilon_{21}^* = \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix},\\ \varepsilon_{22}^* &= \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \varepsilon_{23}^* = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dengan komutator matriks, yaitu $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}] = \boldsymbol{xy} - \boldsymbol{yx}$, untuk setiap $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ dan basis standar yang dinyatakan pada persamaan (7), diperoleh *bracket* Lie tak nol dari aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}&[\varepsilon_{11},\varepsilon_{12}] = \varepsilon_{12}, [\varepsilon_{11},\varepsilon_{13}] = \varepsilon_{13}, [\varepsilon_{11},\varepsilon_{21}] = -\varepsilon_{21},\\ &[\varepsilon_{12},\varepsilon_{11}] = -\varepsilon_{12}, [\varepsilon_{12},\varepsilon_{21}] = \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}, [\varepsilon_{12},\varepsilon_{22}] = \varepsilon_{12},\\ &[\varepsilon_{12},\varepsilon_{23}] = \varepsilon_{13}, [\varepsilon_{13},\varepsilon_{11}] = -\varepsilon_{13}, [\varepsilon_{13},\varepsilon_{21}] = -\varepsilon_{23},\\ &[\varepsilon_{21},\varepsilon_{11}] = \varepsilon_{21}, [\varepsilon_{21},\varepsilon_{12}] = \varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}, [\varepsilon_{21},\varepsilon_{13}] = \varepsilon_{23},\\ &[\varepsilon_{21},\varepsilon_{22}] = -\varepsilon_{21}, [\varepsilon_{22},\varepsilon_{12}] = -\varepsilon_{12}, [\varepsilon_{22},\varepsilon_{21}] = \varepsilon_{21},\\ &[\varepsilon_{22},\varepsilon_{23}] = \varepsilon_{23}, [\varepsilon_{23},\varepsilon_{12}] = -\varepsilon_{13}, [\varepsilon_{23},\varepsilon_{22}] = -\varepsilon_{23}.\end{aligned} \tag{8}$$

Selanjutnya, diperoleh determinan matriks struktur dari aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ dengan menggunakan *bracket* Lie tak nol pada persamaan (8), yaitu

$$\begin{aligned}\det\left(M_{\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})}\right) &= \begin{vmatrix} [\varepsilon_{11},\varepsilon_{11}] & \dots & [\varepsilon_{11},\varepsilon_{23}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\varepsilon_{23},\varepsilon_{11}] & \dots & [\varepsilon_{23},\varepsilon_{23}] \end{vmatrix} \\ &= \left(\varepsilon_{11}\varepsilon_{13}\varepsilon_{23} + \varepsilon_{23}^2\varepsilon_{12} - \varepsilon_{13}^2\varepsilon_{21} - \varepsilon_{13}\varepsilon_{22}\varepsilon_{23}\right)^2\end{aligned} \tag{9}$$

Berdasarkan determinan pada persamaan (9), dipilih 1-*form* α dengan bentuk

$$\alpha = \varepsilon_{12}^* + \varepsilon_{23}^*. \tag{10}$$

Dengan kata lain, persamaan (10) adalah fungsional Frobenius. Selanjutnya, kita *claim* 2-*form* β yang berbentuk

$$\beta = \varepsilon_{11}^* \wedge \varepsilon_{12}^* + \varepsilon_{12}^* \wedge \varepsilon_{22}^* + \varepsilon_{21}^* \wedge \varepsilon_{13}^* + \varepsilon_{22}^* \wedge \varepsilon_{23}^* \tag{11}$$

adalah *symplectic form*. Dengan menggunakan fakta bahwa α dalam persamaan (10) adalah fungsional Frobenius, diperoleh hasil perhitungan pada Tabel 2.

Tabel 2. Hasil perhitungan $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ dan $\alpha([\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}])$ untuk setiap $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$

$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$	$\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$	$\alpha([\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}])$
$[\varepsilon_{11},\varepsilon_{11}]$	0	0
$[\varepsilon_{11},\varepsilon_{12}]$	1	1
$[\varepsilon_{11},\varepsilon_{13}]$	0	0
$[\varepsilon_{11},\varepsilon_{21}]$	0	0
$[\varepsilon_{11},\varepsilon_{22}]$	0	0
$[\varepsilon_{11},\varepsilon_{23}]$	0	0
$[\varepsilon_{12},\varepsilon_{11}]$	-1	-1
$[\varepsilon_{12},\varepsilon_{12}]$	0	0
$[\varepsilon_{12},\varepsilon_{13}]$	0	0
$[\varepsilon_{12},\varepsilon_{21}]$	0	0
$[\varepsilon_{12},\varepsilon_{22}]$	1	1
$[\varepsilon_{12},\varepsilon_{23}]$	0	0
$[\varepsilon_{13},\varepsilon_{11}]$	0	0
$[\varepsilon_{13},\varepsilon_{12}]$	0	0
$[\varepsilon_{13},\varepsilon_{13}]$	0	0
$[\varepsilon_{13},\varepsilon_{21}]$	-1	-1
$[\varepsilon_{13},\varepsilon_{22}]$	0	0
$[\varepsilon_{13},\varepsilon_{23}]$	0	0
$[\varepsilon_{21},\varepsilon_{11}]$	0	0
$[\varepsilon_{21},\varepsilon_{12}]$	0	0
$[\varepsilon_{21},\varepsilon_{13}]$	1	1
$[\varepsilon_{21},\varepsilon_{21}]$	0	0
$[\varepsilon_{21},\varepsilon_{22}]$	0	0
$[\varepsilon_{21},\varepsilon_{23}]$	0	0
$[\varepsilon_{22},\varepsilon_{11}]$	0	0
$[\varepsilon_{22},\varepsilon_{12}]$	-1	-1
$[\varepsilon_{22},\varepsilon_{13}]$	0	0
$[\varepsilon_{22},\varepsilon_{21}]$	0	0
$[\varepsilon_{22},\varepsilon_{22}]$	0	0
$[\varepsilon_{22},\varepsilon_{23}]$	1	1
$[\varepsilon_{23},\varepsilon_{11}]$	0	0
$[\varepsilon_{23},\varepsilon_{12}]$	0	0
$[\varepsilon_{23},\varepsilon_{13}]$	0	0
$[\varepsilon_{23},\varepsilon_{21}]$	0	0
$[\varepsilon_{23},\varepsilon_{22}]$	-1	-1
$[\varepsilon_{23},\varepsilon_{23}]$	0	0

Perhatikan Tabel 2 pada kolom 2 dan 3. Terlihat bahwa $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \alpha([\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}])$ untuk setiap $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ atau fungsional Frobenius $\alpha = \varepsilon_{12}^* + \varepsilon_{23}^*$ berkorespondensi dengan 2-*form* $\beta = \varepsilon_{11}^* \wedge \varepsilon_{12}^* + \varepsilon_{12}^* \wedge \varepsilon_{22}^* + \varepsilon_{21}^* \wedge \varepsilon_{13}^* + \varepsilon_{22}^* \wedge \varepsilon_{23}^*$. Selain itu, hasil pada Tabel 2 menunjukkan bahwa $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\beta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ atau β bersifat *skew-symmetric*. Selanjutnya, dengan menggunakan hasil perhitungan $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ pada Tabel 2 kolom 2, diperoleh determinan dari matriks representasi aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$, yaitu

$$\begin{aligned}\det(M_\beta) &= \begin{vmatrix} \beta(\varepsilon_{11},\varepsilon_{11}) & \dots & \beta(\varepsilon_{11},\varepsilon_{23}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta(\varepsilon_{23},\varepsilon_{11}) & \dots & \beta(\varepsilon_{23},\varepsilon_{23}) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1. \end{aligned} \tag{12}$$

Perhatikan hasil determinan pada persamaan (12). Terlihat bahwa $\det(M_\beta) \neq 0$, sehingga 2-*form* β *nondegenerate*. Berdasarkan Definisi 2, Definisi 5 bagian 2, dan Definisi 6, dapat disimpulkan bahwa aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ mempunyai fungsional Frobenius $\alpha = \varepsilon_{12}^* + \varepsilon_{23}^*$ pada $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})^*$ yang berkorespondensi dengan *symplectic form* $\beta = \varepsilon_{11}^* \wedge \varepsilon_{12}^* + \varepsilon_{12}^* \wedge \varepsilon_{22}^* + \varepsilon_{21}^* \wedge \varepsilon_{13}^* + \varepsilon_{22}^* \wedge \varepsilon_{23}^*$ sedemikian sehingga aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ merupakan aljabar Lie Frobenius. □

4. Kesimpulan

Pada penelitian ini telah dikonstruksi bentuk *2-form skew-symmetric* dan *nondegenerate* atau *symplectic form* pada aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ berdimensi 6, yaitu

$$\beta = \varepsilon_{11}^* \wedge \varepsilon_{12}^* + \varepsilon_{12}^* \wedge \varepsilon_{22}^* + \varepsilon_{21}^* \wedge \varepsilon_{13}^* + \varepsilon_{22}^* \wedge \varepsilon_{23}^* \in \wedge_2(\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})).$$

Dalam hal ini, fungsional Frobenius $\alpha = \varepsilon_{12}^* + \varepsilon_{23}^*$ pada $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})^*$ dan *symplectic form* β memenuhi hubungan $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \alpha([\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}])$ untuk setiap $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ sehingga aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ merupakan aljabar Lie Frobenius.

Untuk penelitian selanjutnya, dapat dikonstruksi bentuk *2-form skew-symmetric* dan *nondegenerate* pada aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(n,\mathbb{R})$ dengan dimensi $n(n+1)$ serta membuktikan bahwa aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(n,\mathbb{R})$ merupakan aljabar Lie Frobenius.

Konstribusi Penulis. **Aurillya Queency:** Konseptualisasi, studi literatur, analisis formal, dan penulisan draft naskah. **Edi Kurniadi:** Konseptualisasi, validasi, tinjauan penulisan, dan supervisi. **Firdaniza:** Konseptualisasi, validasi, tinjauan penulisan, dan supervisi. Semua penulis telah membaca dan menyetujui versi naskah yang telah dipublikasikan.

Konflik Kepentingan. Para penulis menyatakan tidak ada konflik kepentingan yang berkaitan dengan artikel ini.

Referensi

[1] T. Hawkins, *Emergence of the Theory of Lie Groups*. New York, NY: Springer New York, 2000. doi: 10.1007/978-1-4612-1202-7.

[2] A. McInerney, *First Steps in Differential Geometry*. New York, NY: Springer New York, 2013. doi: 10.1007/978-1-4614-7732-7.

[3] B. Muraleetharan, K. Thirulogasanthar, and I. Sabadini, "A representation of Weyl-Heisenberg Lie algebra in the quaternionic setting," *Ann Phys (N Y)*, vol. 385, pp. 180–213, Oct. 2017, doi: 10.1016/j.aop.2017.07.014.

[4] J. Jiang, "Representations of the q-Klein-bottle Lie algebra," *J Algebra*, vol. 591, pp. 36–58, Feb. 2022, doi: 10.1016/j.jalgebra.2021.10.028.

[5] R. N. Cahn, *Semi-simple Lie algebras and their representations*. Courier Corporation, 2014.

[6] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Third printing. New York: Springer-Verlag, 1980.

[7] M. J. Evans, "Nilpotent Lie algebras in which all proper subalgebras have class at most n," *J Algebra*, vol. 591, pp. 1–14, Feb. 2022, doi: 10.1016/j.jalgebra.2021.09.031.

[8] P. Benito, D. de-la-Concepcion, and J. Laliena, "Free nilpotent and nilpotent quadratic Lie algebras," *Linear Algebra Appl*, vol. 519, pp. 296–326, Apr. 2017, doi: 10.1016/j.laa.2017.01.007.

[9] I. Beltita and D. Beltita, "On Kirillov's lemma for nilpotent Lie algebras," *J Algebra*, vol. 427, pp. 85–103, Apr. 2015, doi: 10.1016/j.jalgebra.2014.12.026.

[10] Y. Shang, "Lie algebra method for solving biological population model," *Journal of Theoretical and Applied Physics*, vol. 7, no. 1, p. 67, 2013, doi: 10.1186/2251-7235-7-67.

[11] A. I. Ooms, "On frobenius lie algebras," *Commun Algebra*, vol. 8, no. 1, pp. 13–52, Jan. 1980, doi: 10.1080/00927878008822445.

[12] D. N. Pham, "$\mathfrak{g}$-quasi-Frobenius Lie algebras," *Archivum Mathematicum*, no. 4, pp. 233–262, 2016, doi: 10.5817/AM2016-4-233.

[13] M. A. Alvarez, M. C. Rodríguez-Vallarte, and G. Salgado, "Contact and Frobenius solvable Lie algebras with abelian nilradical," *Commun Algebra*, vol. 46, no. 10, pp. 4344–4354, Oct. 2018, doi: 10.1080/00927872.2018.1439048.

[14] B. Csikos and L. Verhoczki, "Classification of Frobenius Lie algebras of dimension ≤ 6," *Publicationes Mathematicae-Debrecen*, vol. 70, pp. 427–451, 2007.

[15] E. Kurniadi and H. Ishi, "Harmonic Analysis for 4-Dimensional Real Frobenius Lie Algebras," 2019, pp. 95–109. doi: 10.1007/978-3-030-26562-5_4.

[16] M. Gerstenhaber and A. Giaquinto, "The Principal Element of a Frobenius Lie Algebra," *Lett Math Phys*, vol. 88, no. 1–3, pp. 333–341, Jun. 2009, doi: 10.1007/s11005-009-0321-8.

[17] A. Diatta and B. Manga, "On properties of principal elements of Frobenius Lie algebras," Dec. 2012, [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/1212.5380