RESEARCH ARTICLE • OPEN ACCESS

Bilangan Kromatik Permainan Graf Ubur-Ubur, Graf Siput, dan Graf Gurita

M. Luthfi Abdurahman, Helmi Helmi, dan Fransiskus Fran

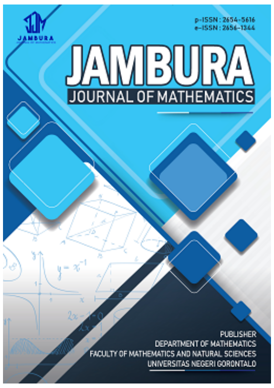
JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS

Volume 6, Issue 1, Pages 118–124, February 2024

Submit 5 Januari 2024, Direvisi 25 Februari 2024, Disetujui 27 Februari 2024

To Cite this Article : M. L. Abdurahman, H. Helmi, dan F. Fran,"Bilangan Kromatik Permainan Graf Ubur-Ubur, Graf Siput, dan Graf Gurita", *Jambura J. Math*, vol. 6, no. 1, pp. 118–124, 2024, *https://doi.org/10.37905/jjom.v6i1.23958*

JOURNAL INFO • JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS



Homepage	:	http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/index
Journal Abbreviation	:	Jambura J. Math.
Frequency	:	Biannual (February and August)
Publication Language	:	English (preferable), Indonesia
DOI	:	https://doi.org/10.37905/jjom
Online ISSN	:	2656-1344
Editor-in-Chief	:	Hasan S. Panigoro
Publisher	:	Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo
Country	:	Indonesia
OAI Address	:	http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/oai
Google Scholar ID	:	iWLjgaUAAAAJ
Email	:	info.jjom@ung.ac.id

Jambura Journal of Mathematics, Volume 6, Issue 1, Pages 118–124, February 2024 https://doi.org/10.37905/jjom.v6i1.23958

Research Article

Check for updates

Bilangan Kromatik Permainan Graf Ubur-Ubur, Graf Siput, dan Graf Gurita

M Luthfi Abdurahman[1,*], **Helmi Helmi**[1], **dan Fransiskus Fran**[1]

[1]*Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Tanjungpura, Indonesia*

ARTICLE HISTORY
Submit 5 Januari 2024
Direvisi 25 Februari 2024
Disetujui 27 Februari 2024

KATA KUNCI
Graf Ubur-ubur
Graf Siput
Graf Gurita
Bilangan Kromatik
Permainan Pewarnaan Graf

KEYWORDS
Jellyfish Graph
Snail Graph
Octopus Graph
Chromatic Numbers
Graph Coloring Games

ABSTRAK. *Pewarnaan graf adalah proses memberikan warna pada simpul atau sisi graf. Secara khusus, pewarnaan simpul graf dapat diimplementasikan dalam permainan pewarnaan graf. Artikel ini membahas tentang penentuan bilangan kromatik permainan graf ubur-ubur $J_{m,n}$, graf siput SI_n, dan graf gurita O_n. Misalkan diberikan G graf sederhana, terhubung, dan tak berarah serta diberikan dua pemain yaitu A sebagai pemain pertama dan B sebagai pemain kedua. Dua pemain A dan B mewarnai setiap simpul pada graf G dengan warna yang disediakan. Aturan permainannya adalah A harus memastikan setiap simpul graf G telah diwarnai dan B mencegah A mewarnai setiap simpul graf G. Pemain A dan B saling bergiliran mewarnai setiap simpul graf G dengan warna yang berbeda pada simpul yang bertetangga. Jika setiap simpul diwarnai dengan warna yang tersedia, maka A memenangkan permainan dan A dinyatakan kalah jika ada simpul yang tidak dapat diwarnai. Nilai terkecil dari k ketika A memenangkan permainan dengan k warna disebut bilangan kromatik permainan yang disimbolkan dengan $\chi_g(G)$. Hasil yang diperoleh yaitu A menggunakan strategi mewarnai derajat terbesar suatu graf terlebih dahulu agar A selalu menang. Dengan demikian, bilangan kromatik permainan dari graf ubur-ubur, graf siput, dan graf gurita adalah $\chi_g(J_{m,n}) = 3$ untuk $m,\ n \geq 1$, $\chi_g(SI_n) = 3$ untuk $n \geq 1$, dan $\chi_g(O_n) = 3$ untuk $n = 2,\ 3,\ 4$; $\chi_g(O_n) = 4$ untuk $n \geq 5$.*

ABSTRACT. *Graph coloring is the process of assigning colors to the vertices or edges of a graph. Specifically, coloring the vertices in graph coloring can be implemented in graph coloring games. This article aims to determine the game chromatic number of the jellyfish graph $J_{m,n}$, snail graph SI_n, and octopus graph O_n. For example, give G as a simple, connected, and undirected graph and give two players, namely A as the first player and B as the secondary player. The two players A and B color all the vertices of graph G with available colors. The game's rules are that A must ensure that all vertices of graph G are colored, while B aims to prevent graph G from being uncolored. Players A and B take turns coloring the vertices of graph G, ensuring that the color of neighboring vertices must be different, with A taking the first turn. If all vertices have been colored, A wins the game, but A loses if some vertices remain uncolored despite available colors, A loses. The smallest value of k for which A has a winning strategy in the game with k colors is the game chromatic number, denoted as $\chi_g(G)$. This thesis discusses the graph coloring game of the tadpole graph $T_{m,n}$, broom graph $B_{n,d}$, jellyfish graph $J_{m,n}$, and tribune graph $\mathfrak{T}_n$ to find the game chromatic number. The results show that player A uses a strategy to color the vertex with the highest degree in the graph, ensuring that player A always wins. Therefore, the game chromatic number of the jellyfish graph, snail graph, and octopus graph is $\chi_g(J_{m,n}) = 3$ for $m,\ n \geq 1$ and $\chi_g(SI_n) = 3$ for $n \geq 1$, while $\chi_g(O_n) = 3$ for $n = 2,\ 3,\ 4$; $\chi_g(O_n) = 4$ for $n \geq 5$.*

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan bagian dari matematika diskrit yang dikenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 untuk memecahkan permasalahan Jembatan Konigsberg [1]. Graf G didefinisikan sebagai himpunan terurut $(V,\ E)$ dengan notasi $G = (V,\ E)$. Simbol V adalah himpunan berhingga tak kosong disebut simpul pada graf G dan E adalah himpunan berhingga disebut sisi yang menghubungkan beberapa simpul pada graf G [2]. Dalam pengimplementasiannya, teori graf merepresentasikan objek dengan simpul dan hubungan antar objek dengan sisi. Salah satu topik graf adalah pewarnaan graf yang dapat digunakan untuk memecahkan permasalahan jadwal kerja perawat [3] dan jadwal ujian akhir semester [4].

Pewarnaan graf merupakan metode pemberian warna pada beberapa objek pada graf yang pertama kali dicetuskan oleh Francis Guthrie tahun 1852 [1]. Pewarnaan graf terdiri dari pewarnaan simpul, sisi, maupun wilayah graf. Artikel ini membahas tentang pengembangan dari pewarnaan simpul graf. Pewarnaan pada graf G dapat dilakukan jika memilih satu dari k warna ke suatu simpul sehingga setiap simpul bertetangga memiliki warna yang berbeda [4]. Nilai minimal k warna yang dapat diberikan

*Penulis Korespondensi.

Email : *luthfialkhawarismi2@student.untan.ac.id.* (M. L. Abdurahman)
Homepage : http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/index / E-ISSN : 2656-1344

pada graf G disebut bilangan kromatik graf G dan dinotasikan dengan $\chi(G) = k$ [5]. Bilangan kromatik sangat diperlukan untuk membantu dalam menemukan hasil dari artikel ini.

Salah satu pengembangan dari pewarnaan graf adalah permainan pewarnaan graf. Konsep permainan pewarnaan graf digagas oleh Hans L. Boadlaender tahun 1991 [6]. Graf yang digunakan bersifat sederhana, yaitu graf yang tidak memiliki sisi ganda dan *loop*. Selain itu, syarat lainnya adalah harus menggunakan graf terhubung dan tidak berarah dengan jumlah pemain sebanyak dua orang. Penelitian sebelumnya telah membahas permainan pewarnaan graf. Penelitian tersebut di antaranya adalah penentuan bilangan kromatik permainan graf pot bunga dan pohon palem yang diperkenalkan oleh Mujib [7]. Kemudian, terdapat penelitian lain seperti bilangan kromatik permainan pemisahan graf lintasan dan lingkaran oleh Akhtar *et.al.* [8], dan bilangan kromatik permainan graf kartesian dari penelitian Bartnicki *et.al.* [9].

Beberapa penelitian terkait graf ubur-ubur, graf siput, maupun graf gurita banyak dilakukan sebelumnya. Penelitian yang dilakukan oleh Gustiani *et.al.* [10] menemukan bahwa graf ubur-ubur adalah graf k-prima saat melakukan pelabelan. Nilai *rainbow connection* graf siput sebesar lima ditemukan berdasarkan hasil penelitian Makhfudloh *et.al.* [11]. Penelitian dari Retnoningsih *et.al.* [12] berhasil menemukan bilangan kromatik graf gurita sebesar tiga. Permainan pewarnaan pada graf ubur-ubur, graf siput, dan graf gurita dapat dilakukan karena ketiga graf memiliki sifat sederhana, terhubung, dan tidak berarah. Oleh karena itu, penelitian mengenai graf ubur-ubur, graf siput, dan graf gurita dapat dikembangkan dengan cara mencari bilangan kromatik permainan seperti yang ditunjukkan pada penelitian sebelumnya [7–9]. Diberikan dua pemain A dan B bermain pewarnaan simpul pada graf G dengan himpunan warna $C = \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k\}$. Pemain A berusaha agar setiap simpul terwarnai, sedangkan B harus mencegahnya. Ketika permainan dimulai, A menjadi pemain pertama. Jika setiap simpul terwarnai, maka A menang dan jika sebaliknya, maka B menang. Nilai k terkecil agar A memenangkan permainan disebut bilangan kromatik permainan dengan simbol $\chi_g(G)$ [7].

Penelitian tentang permainan pewarnaan graf juga telah dilakukan sebelumnya seperti yang ditunjukkan pada [7–9]. Mujib [7] menemukan bahwa bilangan kromatik permainan graf pot bunga dan graf pohon palem masing-masing sebesar tiga. Sementara itu, Akhtar *et.al.* [8] menemukan bahwa terdapat perubahan nilai bilangan kromatik permainan graf berdasarkan jumlah setiap simpul. Adapun Bartnicki *et.al.* [9] membahas tentang bilangan kromatik permainan graf kartesian. Selain itu, referensi lain tentang teori graf dan terapannya yang turut dijadikan sebagai pendukung dalam penyusunan artikel ini dapat dilihat pada [13–19]. Penelitian dari Akbar & Sugeng [17] menunjukkan bahwa graf siput dan graf gurita adalah graf *graceful*. Selanjutnya, telah ditunjukkan bahwa nilai minimum span dari graf ubur-ubur, graf siput, dan graf gurita berturut-turut adalah $2n+1$, $n+4$, dan $m+n+1$ [18]. Penelitian lain yang dilakukan oleh Samuel & Kalaivani [19] menunjukkan bahwa graf gurita adalah graf prima.

Merujuk pada penelitian [7–9], dilakukan penelitian lanjutan mengenai bilangan kromatik permainan graf ubur-ubur, graf siput, dan graf gurita karena terdapat keunikan yang perlu dikembangkan dari ketiga graf tersebut. Pada penelitian ini, dilakukan permainan pewarnaan graf ubur-ubur, graf siput, dan graf gurita. Penelitian ini sangat penting untuk dilakukan sebagai acuan dalam penelitian lebih lanjut. Lebih lanjut, proses pencarian bilangan kromatik permainan pada penelitian ini, menggunakan strategi dari para pemainnya ditambah dengan keunikan dari masing-masing graf. Dengan demikian, artikel ini ditulis dengan tujuan untuk menentukan bilangan kromatik permainan graf ubur-ubur, graf siput, dan graf gurita.

2. Metode

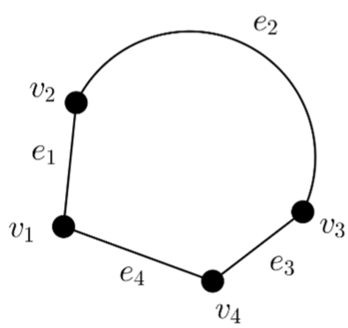
Penelitian ini menggunakan metode studi literatur sebagai dasar dalam membangun landasan teori graf dan diteruskan dengan teori mencari bilangan kromatik permainan melalui permainan pewarnaan graf yang bersumber dari beberapa artikel, buku, ataupun referensi yang lain. Metode tersebut digunakan untuk menentukan bilangan kromatik permainan graf ubur-ubur, graf siput, dan graf gurita.

Adapun tahapan penelitian dalam menentukan bilangan kromatik permainan adalah:

1. Melakukan kajian teoritis untuk mengetahui definisi bilangan kromatik permaian dengan teorema yang mendukung.
2. Memberikan contoh permainan pewarnaan graf sebagai gambaran dalam penentuan bilangan kromatik permainan.
3. Menjelaskan definisi graf ubur-ubur, graf siput, dan graf gurita.
4. Membentuk teorema bilangan kromatik permainan graf ubur-ubur, graf siput, dan graf gurita.
5. Membuktikan teorema tersebut menggunakan pembuktian secara matematis.

Sebelum menentukan bilangan kromatik permainan, terlebih dahulu diberikan contoh suatu graf, beberapa teorema yang menjadi landasan dalam menentukan bilangan kromatik permainan, dan contoh permainan pewarnaan graf.

Contoh 1. [13] Diberikan graf G dengan himpunan simpul $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Banyaknya simpul dan sisi graf G berturut-turut dinotasikan dengan $|V(G)|$ dan $|E(G)|$, seperti diilustrasikan pada Gambar 1. Berdasarkan ilustrasi pada Gambar 1, maka $|V(G)| = 4$ dan $|E(G)| = 4$.



Gambar 1. Graf G

Selanjutnya, diberikan beberapa teorema tentang permainan pewarnaan graf.

Teorema 1. [7] *Diberikan G sebuah graf dan $\Delta(G)$ merupakan derajat terbesarnya, maka $\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Bukti. Misalkan G graf dengan himpunan simpul $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$:

(i) Simpul pada graf G tidak dapat diwarnai dengan warna sebanyak k apabila jumlah warna yang tersedia kurang dari $\chi(G)$. Hal tersebut menyebabkan bilangan kromatik permainan lebih dari $\chi(G)$ sehingga $\chi_g(G) \geq \chi(G)$.

(ii) Diasumsikan A dapat mewarnai setiap simpul $v_i \in V(G)$ dengan warna simpul tetangga v_i berbeda, maka A akan selalu menang. Hal tersebut terjadi saat warna yang tersedia berjumlah $\Delta(G) + 1$ sehingga $\chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1$.

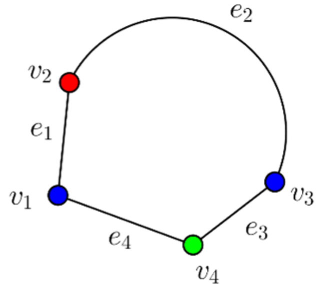
Berdasarkan poin (i) dan (ii), maka $\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1$. □

Teorema 2. [7] *Diberikan graf lintasan P_n dengan n simpul dan $n-1$ sisi, maka bilangan kromatik permainan graf lintasan adalah $\chi_g(P_n) = 2$ untuk $n = 2, 3$ dan $\chi_g(P_n) = 3$ untuk $n \geq 4$.*

Bukti. Akan dibuktikan bahwa $\chi_g(P_n) = 2$ untuk $n = 2, 3$ dan $\chi_g(P_n) = 3$ untuk $n \geq 4$. Misalkan P_n graf lintasan dengan himpunan simpul $V(P_n)$ dan sisi $E(P_n)$. Ditunjukkan bahwa $\chi(P_n) = 2$ untuk n $= 2, 3$. Hasil $\chi(P_n) = 2$ muncul akibat pewarnaan pada simpul graf P_2 dan P_3. Diberikan himpunan warna $C = \{c_1, c_2\}$. Graf P_2 dapat diwarnai oleh dua warna yang berbeda. Sedangkan simpul berderajat terbesar P_3 diwarnai dengan c_1, sehingga simpul lainnya diwarnai dengan c_2. Dengan demikian, $\chi(P_2) = \chi(P_3) = 2$. Untuk $n \geq 4$, diketahui bahwa $\chi(P_n) = 2$ dengan $\Delta(P_n) = 2$. Berdasarkan Teorema 1, maka interval bilangan kromatik permainan graf lintasan adalah $2 \leq \chi_g(P_n) \leq 3$. Asumsikan pemain A mewarnai simpul berderajat dua, misalkan v_i diwarnai dengan c_1, maka pemain B memberikan warna c_2 pada v_{i+2}. Akibatnya, simpul v_{i+1} tidak dapat diwarnai dengan warna. Dengan demikian, $\chi_g(P_n) \geq 3$ sehingga $3 \leq \chi_g(P_n) \leq 3$ atau $\chi_g(P_n) = 3$. □

Teorema 1 dan 2, selanjutnya digunakan untuk membuktikan teorema tentang bilangan kromatik permainan. Lebih khusus, Teorema 1 digunakan untuk menentukan batas bawah dan batas atas bilangan kromatik permainan, sedangkan Teorema 2 digunakan untuk mencari bilangan kromatik permainan. Selain itu, Teorema 2 digunakan untuk melakukan permainan pewarnaan graf seperti yang ditujukan pada Contoh 2.

Contoh 2. Diberikan hasil permainan pewarnaan graf G dari Gambar 1 melalui ilustrasi pada Gambar 2. Diberikan himpunan warna $C = \{merah, hijau, kuning\}$, maka A dapat memulai permainan. Misalkan A mewarnai v_2 dengan c_1, maka B mewarnai simpul lain seperti v_4 dengan c_2. Simpul v_1 dan v_3 tidak dapat diwarnai dengan c_1 dan c_2 sehingga simpul tersebut harus diberikan warna lain. Misalkan A mewarnai v_1 dengan c_3 dan B mewarnai v_3 dengan c_2. Dengan demikian, pemain A memenangkan permainan.



Gambar 2. Permainan pewarnaan graf G

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini, ditunjukkan nilai dari bilangan kromatik permainan graf ubur-ubur, graf siput, dan graf gurita.

3.1. Bilangan Kromatik Permainan Graf Ubur-Ubur

Sebelum menentukan bilangan kromatik permainan graf ubur-ubur, terlebih dahulu dijelaskan mengenai definisi graf ubur-ubur, bilangan kromatik graf ubur-ubur, dan derajat terbesar graf ubur-ubur.

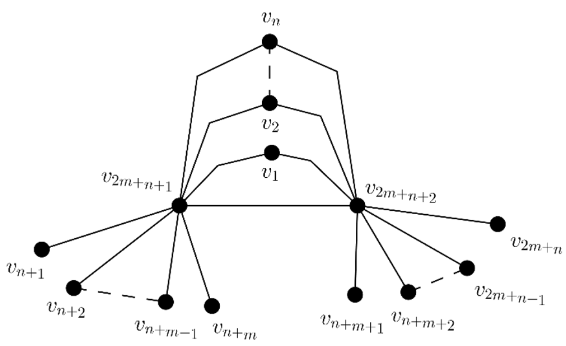
Definisi 1. [17] *Graf ubur-ubur $J_{m,n}$ adalah graf yang terbentuk dari himpunan simpul*

$$V(J_{m,n}) = \{v_i \mid 1 \leq i \leq 2m + n + 2\}$$

dan himpunan sisi

$$\begin{aligned} E(J_{m,n}) = &\{v_i v_{2m+n+1} \mid 1 \leq i \leq n\} \\ &\cup \{v_i v_{2m+n+2} \mid 1 \leq i \leq n\} \\ &\cup \{v_{n+i} v_{2m+n+1} \mid 1 \leq i \leq m\} \\ &\cup \{v_{m+n+i} v_{2m+n+2} \mid 1 \leq i \leq n\} \\ &\cup \{v_{2m+n+1} v_{2m+n+2}\}. \end{aligned}$$

Ilustrasi graf ubur-ubur $J_{m,n}$ dapat dilihat pada Gambar 3 dengan $|V(J_{m,n})| = 2m + n + 2$ dan $|E(J_{m,n})| = 2m + 2n + 1$.



Gambar 3. Graf ubur-ubur $J_{m,n}$

Mengacu pada Definisi 1 dan Gambar 3, dapat ditunjukkan bahwa derajat terbesar graf ubur-ubur adalah $\Delta(J_{m,n}) = m + n + 1$ sebagai batas atas Teorema 1. Kemudian, dirumuskan teorema yang menjelaskan tentang bilangan kromatik graf ubur-ubur sebagai batas bawah Teorema 1. Pencarian bilangan kromatik graf ubur-ubur dapat dilakukan dengan menggunakan Algoritma Welch-Powell [4]. Bilangan kromatik graf ubur-ubur dapat dilihat pada Teorema 3.

Teorema 3. *Diberikan graf ubur-ubur dengan $2m+n+2$ simpul dan $2m+2n+1$ sisi, maka $\chi\left(J_{m,n}\right)=3$ untuk $m,n\geq 1$.*

Bukti. Akan dibuktikan bahwa $\chi\left(J_{m,n}\right)=3$ *untuk* $m,n\geq 1$. Berdasarkan Algoritma Welch-Powell, dilakukan pewarnaan simpul graf ubur-ubur. Pertama, salah satu simpul yang memiliki derajat terbesar diwarnai dengan warna pertama. Kemudian, dilakukan pewarnaan terhadap simpul-simpul lain. Namun, karena terdapat tiga simpul yang saling bertetangga satu sama lain, maka pewarnaan dapat dilakukan dengan tiga warna. Dengan demikian, $\chi\left(J_{m,n}\right)=3$. □

Secara formal, rumusan teorema bilangan kromatik permainan graf ubur-ubur dinyatakan pada Teorema 4.

Teorema 4. *Diberikan graf ubur-ubur dengan $2m+n+2$ simpul dan $2m+2n+1$ sisi, maka $\chi_g\left(J_{m,n}\right)=3$ untuk $m,n\geq 1$.*

Bukti. Akan dibuktikan bahwa $\chi_g\left(J_{m,n}\right)=3$ *untuk* $m,n\geq 1$. Berdasarkan Teorema 1, maka nilai bilangan kromatik permainan graf ubur-ubur adalah $3\leq\ \chi_g\left(J_{m,n}\right)\leq\ m+n+2$ dengan $\chi_g\left(J_{m,n}\right)$ bilangan asli. Bilangan kromatik permainan ditentukan berdasarkan metode pada Teorema 2. Diberikan himpunan warna $C=\{c_1,\ c_2,\ c_3\}$. Pemain A mewarnai terlebih dahulu simpul v_{2m+n+1} atau v_{2m+n+2} sebagai simpul berderajat terbesar. Permainan pewarnaan graf diawali dengan A mewarnai simpul v_{2m+n+1} dengan c_1.

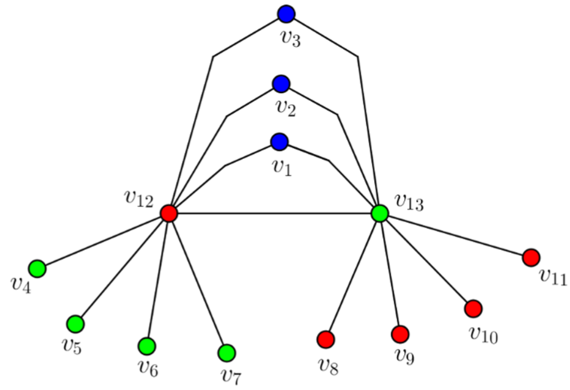
(i) Apabila B mewarnai v_{2m+n+2} dengan c_2, karena $d\left(v_i\right)=2,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, maka v_i tidak dapat diwarnai dengan c_1 atau c_2 sehingga harus diwarnai dengan c_3. Kemudian, para pemain saling bergiliran dalam mewarnai. Karena $v_j,\ j=n+1,\ \ldots,\ m+n,\ m+n+1,\ \ldots,\ 2m+n$ saling bebas, maka sisa simpul lainnya dapat diwarnai dengan tiga warna.

(ii) Apabila B mewarnai simpul selain v_{2m+n+2} tanpa mengurangi unsur generalisasi semisal v_n dengan c_2, maka A dapat mewarnai simpul lain. Jika A mewarnai v_{2m+n+2} dengan c_3, maka B dapat mewarnai v_i dengan c_2 atau v_j dengan warna yang berbeda berdasarkan v_{2m+n+1} dan v_{2m+n+2}. Berdasarkan poin (i), maka sisa simpul graf dapat diwarnai dengan tiga warna.

Berdasarkan poin (i) dan (ii), maka A selalu memenangkan permainan sehingga $\chi_g(J_{m,n})\leq 3$. Dengan demikian, maka $3\leq\chi_g\left(J_{m,n}\right)\leq\ 3$ atau $\chi_g(J_{m,n})=3$. □

Contoh implementasi Teorema 4 dapat diilustrasikan pada Contoh 3.

Contoh 3. Diberikan graf ubur-ubur $J_{4,3}$ yang diilustrasikan pada Gambar 4, dimana pemain A dan B memulai permainan pewarnaan graf tersebut. Diberikan himpunan warna $C=\{merah,\ hijau,\ biru\}$. Pemain A mewarnai v_{12} dengan warna merah. Kemudian, pemain B mewarnai v_{13} dengan warna hijau. Setelah itu, pemain A mewarnai v_1 dengan warna biru. Pemain B mewarnai v_4 dengan warna hijau. Selanjutnya, pemain A mewarnai v_8 dengan warna merah. Berdasarkan Teorema 2, maka v_2 dan v_3 hanya dapat diwarnai dengan warna biru. Simpul lainnya yaitu v_4 hingga v_{11} diwarnai dengan warna yang berbeda berdasarkan v_{12} dan v_{13}. Pemain A dan B saling bergiliran dalam permainan hingga semua simpul terwarnai. Dengan demikian, $\chi_g\left(J_{4,3}\right)=3$ dan A memenangkan permainan.



Gambar 4. Permainan pewarnaan graf ubur-ubur $J_{4,3}$

3.2. *Bilangan Kromatik Permainan Graf Siput*

Sebelum menentukan bilangan kromatik permainan graf siput, terlebih dahulu dijelaskan mengenai definisi graf siput.

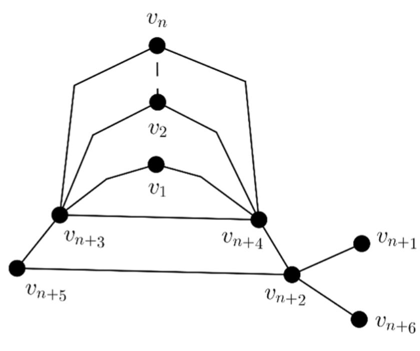
Definisi 2. [18] *Graf siput SI_n adalah graf yang terbentuk dari himpunan simpul*

$$V\left(SI_n\right)=\{v_i\ \mid\ 1\leq i\leq n+6\}$$

dan himpunan sisi

$$E\left(SI_n\right)=\{v_iv_{n+3}\ \mid\ 1\leq i\leq n\}\cup\{v_iv_{n+4}\ \mid\ 1\leq i\leq n\}\cup\{v_{n+2}v_{n+4},\ v_{n+3}v_{n+4},\ v_{n+2}v_{n+5},\ v_{n+3}v_{n+5},\ v_{n+1}v_{n+2},\ v_{n+6}v_{n+2}\}.$$

Ilustrasi graf siput SI_n dapat dilihat pada Gambar 5 dengan $|V(SI_n)|=n+6$ dan $|E(SI_n)|=2n+6$.



Gambar 5. Graf siput SI_n

Mengacu pada Definisi 2 dan Gambar 5, dapat ditunjukkan bahwa derajat terbesar graf siput adalah $\Delta(SI_n) = n + 2$ sebagai batas atas Teorema 1. Kemudian, dirumuskan teorema yang menjelaskan tentang bilangan kromatik graf siput sebagai batas bawah Teorema 1. Pencarian bilangan kromatik graf ubur-ubur dapat dilakukan dengan menggunakan Algoritma Welch-Powell [4]. Bilangan kromatik graf siput dapat dilihat pada Teorema 5.

Teorema 5. *Diberikan graf siput dengan $n+6$ simpul dan $2n+6$ sisi, maka $\chi(SI_n) = 3$ untuk $n \geq 1$.*

Bukti. Akan dibuktikan bahwa $\chi(SI_n) = 3$ *untuk* $n \geq 1$. Berdasarkan Algoritma Welch-Powell, dilakukan pewarnaan simpul graf siput. Pertama, salah satu simpul yang memiliki derajat terbesar diwarnai dengan warna pertama. Kemudian, dilakukan pewarnaan terhadap simpul-simpul lain. Namun, karena terdapat tiga simpul yang saling bertetangga satu sama lain, maka pewarnaan dapat dilakukan dengan tiga warna. Dengan demikian, $\chi(SI_n) = 3$. □

Secara formal, rumusan teorema bilangan kromatik permainan graf siput dinyatakan pada Teorema 6.

Teorema 6. *Diberikan graf siput dengan $n+6$ simpul dan $2n+6$ sisi, maka $\chi_g(SI_n) = 3$ untuk $n \geq 1$.*

Bukti. Akan dibuktikan bahwa $\chi_g(SI_n) = 3$. Berdasarkan Teorema 1, maka nilai bilangan kromatik permainan graf siput adalah $3 \leq \chi_g(SI_n) \leq n+3$ dengan $\chi_g(SI_n)$ bilangan asli. Bilangan kromatik permainan ditentukan berdasarkan metode pada Teorema 2. Diberikan himpunan warna $C = \{c_1, c_2, c_3\}$. Pemain A mewarnai terlebih dahulu simpul v_{n+3} atau v_{n+4} sebagai simpul berderajat terbesar. Permainan pewarnaan graf diawali dengan A mewarnai simpul v_{n+3} dengan c_1.

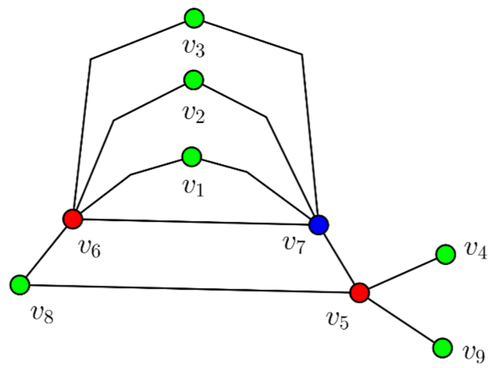
(i) Apabila B mewarnai v_{n+4} dengan c_2, karena $d(v_i) = 2$, $i = 1, 2, \ldots, n$, maka v_i tidak dapat diwarnai dengan c_1 atau c_2 sehingga harus diwarnai dengan c_3. Kemudian, para pemain saling bergiliran dalam mewarnai. Permainan terus dilakukan sehingga simpul yang tersisa dapat diwarnai dengan tiga warna.

(ii) Apabila B mewarnai simpul selain v_{n+4} tanpa mengurangi unsur generalisasi semisal v_{n+2} dengan c_2, maka A dapat mewarnai simpul lain. Jika A mewarnai v_{n+1} dengan c_1, maka B dapat mewarnai v_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ dengan c_2. Berdasarkan poin (i), maka sisa simpul pada graf dapat diwarnai dengan tiga warna.

Berdasarkan poin (i) dan (ii), maka A selalu memenangkan permainan sehingga $\chi_g(SI_n) \leq 3$. Dengan demikian, $3 \leq \chi_g(SI_n) \leq 3$ atau $\chi_g(SI_n) = 3$. □

Contoh implementasi Teorema 6 dapat diilustrasikan pada Contoh 4.

Contoh 4. Diberikan graf ubur-ubur SI_3 yang diilustrasikan pada Gambar 6, dimana pemain A dan B memulai permainan pewarnaan graf tersebut. Diberikan himpunan warna $C = \{merah, hijau, biru\}$. Pemain A mewarnai v_6 dengan warna merah. Kemudian, pemain B mewarnai v_1 dengan warna hijau. Setelah itu, pemain A mewarnai v_8 dengan warna hijau. Pemain B mewarnai v_5 dengan warna merah. Selanjutnya, A mewarnai v_4 dengan warna hijau. Berdasarkan Teorema 2, maka v_7 hanya dapat diwarnai dengan warna biru. Pemain A dan B saling bergiliran dalam permainan hingga semua simpul terwarnai. Dengan demikian, $\chi_g(SI_3) = 3$ dan A memenangkan permainan.



Gambar 6. Permainan pewarnaan graf siput SI_3

3.3. *Bilangan Kromatik Permainan Graf Gurita*

Sebelum menentukan bilangan kromatik permainan graf gurita, terlebih dahulu dijelaskan mengenai definisi graf gurita.

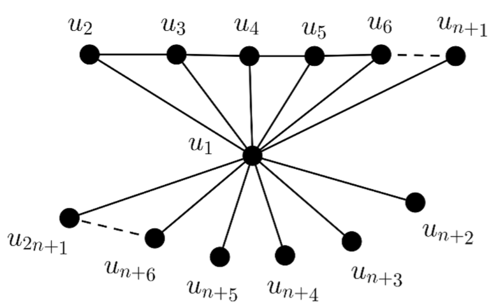
Definisi 3. [19] *Graf gurita O_n adalah graf hasil kombinasi antara graf kipas dan graf bintang yang terbentuk dari himpunan simpul dengan*

$$V(O_n) = \{u_i \mid i = 1, 2, \ldots, 2n+1\}$$

dan himpunan sisi

$$E(O_n) = \{u_1u_i \mid 1 \leq i \leq 2n+1\} \cup \{u_iu_{i+1} \mid 2 \leq i \leq n\}.$$

Ilustrasi graf gurita O_n dapat dilihat pada Gambar 7 dengan $|V(O_n)| = 2n+1$ dan $|E(O_n)| = 3n - 1$.



Gambar 7. Graf gurita O_n

Mengacu pada Definisi 3 dan Gambar 7, dapat ditunjukkan bahwa derajat terbesar graf gurita adalah $\Delta(O_n) = 2n$ sebagai batas atas Teorema 1. Selanjutnya, dirumuskan teorema yang menjelaskan tentang bilangan kromatik graf siput sebagai batas bawah Teorema 1. Pencarian bilangan kromatik graf ubur-ubur dapat dilakukan dengan menggunakan Algoritma Welch-Powell [4]. Bilangan kromatik graf siput dapat dilihat pada Teorema 7.

Teorema 7. *Diberikan graf siput dengan* $2n+1$ *simpul dan* $3n-1$ *sisi, maka* $\chi\left(O_n\right) = 3$ *untuk* $n \geq 1$.

Bukti. Akan dibuktikan bahwa $\chi\left(O_n\right) = 3$ *untuk* $n \geq 1$. Berdasarkan Algoritma Welch-Powell, dilakukan pewarnaan simpul graf siput. Pertama, salah satu simpul yang memiliki derajat terbesar diwarnai dengan warna pertama. Kemudian, dilakukan pewarnaan terhadap simpul-simpul lain. Namun, karena terdapat tiga simpul yang saling bertetangga satu sama lain, maka pewarnaan dapat dilakukan dengan tiga warna. Dengan demikian, $\chi\left(O_n\right) = 3$. □

Secara formal, rumusan teorema bilangan kromatik permainan graf gurita dinyatakan pada Teorema 8.

Teorema 8. *Diberikan graf gurita* O_n *dengan* $2n+1$ *simpul, maka nilai dari* $\chi_g\left(O_n\right)$ *adalah*

$$\chi_g\left(O_n\right) = \begin{cases} 3, & untuk\ n = 2,\ 3,\ 4 \\ 4, & untuk\ n \geq 5. \end{cases}$$

Bukti. Akan dibuktikan bahwa

$$\chi_g\left(O_n\right) = \begin{cases} 3, & untuk\ n = 2,\ 3,\ 4 \\ 4, & untuk\ n \geq 5. \end{cases}$$

Berdasarkan Teorema 1, diketahui nilai bilangan kromatik permainan graf gurita adalah $3 \leq \chi_g\left(O_n\right) \leq 2n+1$ dengan $\chi_g\left(O_n\right)$ bilangan asli. Bilangan kromatik permainan ditentukan berdasarkan metode pada Teorema 2. Diberikan himpunan warna $C = \{c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4\}$. Pemain A mewarnai terlebih dahulu simpul berderajat terbesar.

Untuk $n = 2,\ 3,\ 4$, diberikan graf gurita O_4. Permainan pewarnaan graf diawali dengan A mewarnai simpul u_1 dengan c_1.

(i) Apabila B mewarnai u_5 dengan c_2, maka u_4 tidak dapat diwarnai dengan c_1 atau c_2 sehingga harus diwarnai dengan c_3. Kemudian, A mewarnai u_4 dengan c_3. Para pemain saling bergiliran dalam mewarnai. Karena simpul $u_j,\ j = 6,\ \ldots,\ 11$ saling bebas, maka sisa simpul lainnya dapat diwarnai dengan tiga warna.

(ii) Apabila B mewarnai simpul selain u_5 semisal u_3 dengan c_2, maka A dapat mewarnai simpul u_5 dengan c_2. Jika A mewarnai u_5 dengan c_2, maka B dapat mewarnai u_4 dengan c_3. Berdasarkan poin (i), maka sisa simpul graf dapat diwarnai dengan tiga warna.

Berdasarkan poin (i) dan (ii), maka A selalu memenangkan permainan sehingga $\chi_g(O_n) \leq 3$. Dengan demikian, $3 \leq \chi_g\left(O_n\right) \leq 3$ atau $\chi_g(O_n) = 3$ dengan $n = 2,\ 3,\ 4$.

Untuk $n \geq 5$, diberikan graf gurita O_n. Permainan pewarnaan graf diawali dengan A mewarnai simpul u_1 dengan c_1.

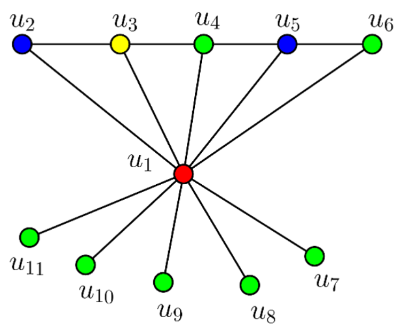
(a) Apabila B mewarnai u_{n+1} dengan c_2, maka u_n tidak dapat diwarnai dengan c_1 atau c_2 sehingga harus diwarnai dengan c_3. Kemudian, A mewarnai u_n dengan c_3. Selanjutnya, pemain B mewarnai u_{n-2} dengan c_3. Akibatnya, simpul u_{n-1} tidak dapat diwarnai dengan c_1, c_2, atau c_3 sehingga harus diwarnai dengan c_4. Para pemain saling bergiliran dalam mewarnai. Karena simpul $u_j,\ j = n+2,\ \ldots,\ 2n+1$ saling bebas, maka simpul yang tersisa dapat diwarnai dengan empat warna.

(b) Apabila B mewarnai simpul selain u_{n+1} tanpa mengurangi unsur generalisasi semisal u_n dengan c_2, maka A dapat mewarnai simpul u_{n+2} dengan c_2. Ketika A mewarnai u_{n+2} dengan c_2, pemain B mewarnai u_{n-2} dengan c_3. Akibatnya, simpul u_{n-1} harus diwarnai dengan c_4. Berdasarkan poin (a), maka sisa simpul graf dapat diwarnai dengan empat warna.

Berdasarkan poin (a) dan (b), maka A selalu memenangkan permainan sehingga $\chi_g(O_n) \leq 4$. Karena terdapat simpul u_{n-1} yang harus diwarnai dengan c_4, maka graf tersebut tidak dapat diwarnai dengan tiga warna. Akibatnya, $\chi_g(O_n) \geq 4$. Dengan demikian, $4 \leq \chi_g\left(O_n\right) \leq 4$ atau $\chi_g(O_n) = 4$ dengan $n \geq 5$. □

Contoh implementasi Teorema 8 dapat diilustrasikan pada Contoh 5.

Contoh 5. Diberikan graf gurita O_5 yang diilustrasikan pada Gambar 8, dimana pemain A dan B memulai permainan pewarnaan graf tersebut. Diberikan himpunan warna $C = \{merah,\ hijau,\ biru,\ kuning\}$. Pemain A mewarnai u_1 dengan warna merah. Kemudian, pemain B mewarnai u_6 dengan warna hijau. Setelah itu, A mewarnai u_4 dengan warna hijau. Pemain B mewarnai u_2 dengan warna biru. Selanjutnya, A mewarnai u_{11} dengan warna hijau. Berdasarkan Teorema 2, maka u_3 hanya dapat diwarnai dengan warna kuning. Pemain A dan B saling bergiliran dalam permainan hingga semua simpul terwarnai. Dengan demikian, $\chi_g\left(O_5\right) = 4$ dan A memenangkan permainan.



Gambar 8. Permainan pewarnaan graf gurita 0_5

4. Kesimpulan

Jika $\chi\left(G\right)$ bilangan kromatik suatu graf dan $\Delta\left(G\right)$ derajat terbesar suatu graf, maka nilai bilangan kromatik permainan graf ubur-ubur, graf siput, dan graf gurita adalah $3 \leq \chi_g\left(J_{m,n}\right) \leq m+2n+2$, $3 \leq \chi_g\left(SI_n\right) \leq n+3$, dan $3 \leq \chi_g\left(O_n\right) \leq$

$2n+1$. Dengan demikian, bilangan kromatik permainan dari graf ubur-ubur, graf siput, dan graf gurita adalah $\chi_g\left(J_{m,n}\right)=3$ untuk $m,\ n\geq 1$, $\chi_g\left(SI_n\right)=3$ untuk $n\geq 1$, dan $\chi_g\left(O_n\right)=3$ untuk $n=2,\ 3,\ 4$; $\chi_g\left(O_n\right)=4$ untuk $n\geq 5$.

Kontribusi Penulis. **M. Luthfi Abdurahman:** Konseptualisasi, metodologi, studi literatur, visualisasi, dan penulisan naskah. **Helmi:** Konseptualisasi, metodologi, analisis formal, validasi, tinjauan penulisan, dan supervisi. **Fransiskus Fran:** Konseptualisasi, metodologi, analisis formal, validasi, tinjauan penulisan, supervisi, dan pendanaan. Semua penulis telah membaca dan menyetujui versi manuskrip yang diterbitkan.

Ucapan Terima Kasih. Para penulis menyampaikan terima kasih kepada editor dan reviewer atas pembacaan yang cermat, kritik yang mendalam, dan rekomendasi yang praktis untuk meningkatkan kualitas tulisan ini.

Pembiayaan. Penelitian ini tidak menerima pembiayaan eksternal.

Konflik Kepentingan. Para penulis menyatakan tidak ada konflik kepentingan yang terkait dengan artikel ini.

Referensi

[1] N. Deo, *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science,* Courier Dover Publications, 2017.

[2] R. Munir, *Matematika Diskrit*, Edisi 3, Bandung: Informatika Bandung, 2010.

[3] R. F. Sari, F. Rakhmawati, and N. Lela, "Implementasi Pewarnaan Graf Menggunakan Metode Algoritma Tabu Search Pada Penjadwalan Kerja Perawat," *G-Tech: Jurnal Teknologi Terapan*, vol. 7, no. 1, 298-304, 2023, doi: 10.33379/gtech.v7i1.2021.

[4] P. Pasnur, "Implementasi Algoritma Welch-Powell dalam Pembuatan Jadwal Ujian Akhir Semester," *Inspiration: Jurnal Teknologi Informasi dan Komunikasi,* vol. 2, no. 1, 35-44, 2012, doi: 10.355585/inspir.v2i1.16.

[5] R. J. Wilson, *Introduction to Graph Theory Fourth Edition,* England: Addison Wesley Longman Limited, 1996.

[6] H. L. Bodlaender, "On The Complexity of Some Coloring Games," *International Journal of Foundations of Computer Science.,* vol. 2, no. 2, pp. 133-147, 1991, doi: 10.1142/S0129054191000091.

[7] A. Mujib, "Bilangan Kromatik Permainan Graf Pot Bunga (C_mS_n) dan Graf Pohon Palem $(C_kP_lS_m)$," *TEOREMA: Teori Dan Riset Matematika,* vol. 4, no. 1, pp. 13-22, 2019, doi: 10.25157/teorema.v4i1.1903.

[8] M. S. Akhtar, U. Ali, Abbas G, and M. Batool, "On The Game Chromatic Number of Splitting Graphs of Path and Cycle," *Theoritical Computer Science*, vol. 795, pp. 50-56, 2019, doi: 10.1016/j.tcs.2019.05.035.

[9] T. Bartnicki, et al., "Game Chromatic Number of Cartesian Product Graphs," *The Electronic Journal Of Combinatorics,* vol. 15, 2008,doi: 10.37236/796.

[10] B. Gustiani, F. Fran, and N. M. Huda, "Pelabelan k-Prima pada Graf Ubur-Ubur," *Buletin Ilmiah Matematika, Statistika, dan Ilmu Terapan (Bimaster),* vol. 13, no. 1, pp. 35-42, 2023, doi: 10.26418/bbimst.v13n1.74049.

[11] I. I. Makhfudloh, Dafik, and R. Adawiyah, "Rainbow Connection pada Graf Siput, Graf Tunas Kelapa dan Graf Lotus," *CGANT Journal of Mathematics and Applications,* vol. 4, no. 1, pp. 8-16, 2023, doi: 10.25037/cgantjma.v4i1.91.

[12] I. I. Retnoningsih, Dafik, and S. Hussen, "Pewarnaan Titik pada Keluarga Graf Sentripetal," *CGANT Journal of Mathematics and Applications,* vol. 3, no. 1, 2022, doi: http://doi.org/10.25037/cgantjma.v3i1.75.

[13] S. Rahayuningsih, *Teori Graph dan Penerapannya*, Jawa Timur:Universitas Wisnuwardhana Press Malang (Unidha Press), 2018.

[14] J. M. Harris, J. L. Hirst, and M. J. Mossinghoff, *Combinatorics and Graph Theory*, New York: Springer, 2008, doi: 10.1007/978-0-387-79711-3.

[15] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications (Vol. 290),* London: Macmillan, 1976.

[16] R. Balakrishnan and K. Ranganathan, *A Textbook of Graph Theory,* Second Edition. Germany: Springer Science & Business Media, 2012, doi: 10.1007/978-1-4614-4529-6

[17] K. Akbar and K. A. Sugeng, "Pelabelan Graceful pada Graf Siput dan Graf Ubur-Ubur," in *Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology*, 2021, pp. 143-148, doi: 10.30598/pattimurasci.2021.knmxx.143-148.

[18] H. Komarulloh, "Nilai Minimum Span pada Graf Gurita, Graf Siput, dan Graf Ubur-Ubur," in *Prosiding Galuk Mathematics National Conference,* 2023, pp. 56-62.

[19] A. E. Samuel and S. Kalaivani, "Prime Labelling For Some Octopus Related Graphs," *IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM),* vol. 12, 2016, doi: 10.9790/5728-1206035764.