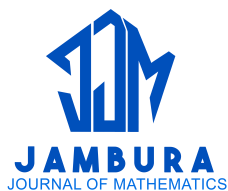


# Efek Perlindungan Mangsa dan Daya Dukung Variabel pada Sistem Mangsa-Pemangsa dengan Fungsi Respon *Beddington-DeAngelis*

Aisyiah Kholifatul Hanifah dan Abadi Abadi



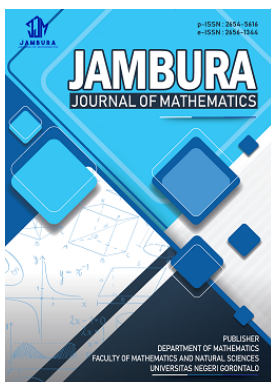
Volume 6, Issue 1, Pages 102–110, February 2024

Submit 15 Januari 2024, Direvisi 7 Februari 2024, Disetujui 10 Februari 2024

To Cite this Article : A. K. Hanifah dan A. Abadi, "Efek Perlindungan Mangsa dan Daya Dukung Variabel pada Sistem Mangsa-Pemangsa dengan Fungsi Respon *Beddington-DeAngelis*", *Jambura J. Math*, vol. 6, no. 1, pp. 102–110, 2024, <https://doi.org/10.37905/jjom.v6i1.24288>

© 2024 by author(s)

## JOURNAL INFO • JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS

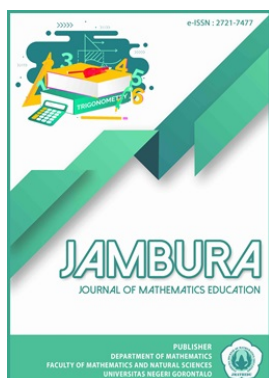


	Homepage	:	<a href="http://ejournal.ung.ac.id/index.php/jjom/index">http://ejournal.ung.ac.id/index.php/jjom/index</a>
	Journal Abbreviation	:	Jambura J. Math.
	Frequency	:	Biannual (February and August)
	Publication Language	:	English (preferable), Indonesia
	DOI	:	<a href="https://doi.org/10.37905/jjom">https://doi.org/10.37905/jjom</a>
	Online ISSN	:	2656-1344
	Editor-in-Chief	:	Hasan S. Panigoro
	Publisher	:	Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo
	Country	:	Indonesia
	OAI Address	:	<a href="http://ejournal.ung.ac.id/index.php/jjom/oai">http://ejournal.ung.ac.id/index.php/jjom/oai</a>
	Google Scholar ID	:	iWLjgaUAAAAJ
	Email	:	<a href="mailto:info.jjom@ung.ac.id">info.jjom@ung.ac.id</a>

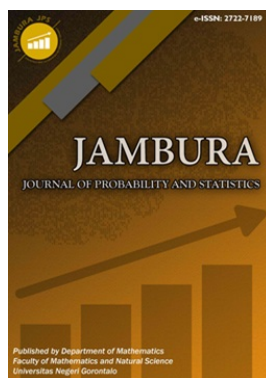
## JAMBURA JOURNAL • FIND OUR OTHER JOURNALS



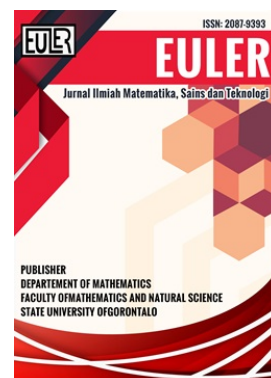
Jambura Journal of Biomathematics



Jambura Journal of Mathematics Education



Jambura Journal of Probability and Statistics



EULER : Jurnal Ilmiah Matematika, Sains, dan Teknologi

# Efek Perlindungan Mangsa dan Daya Dukung Variabel pada Sistem Mangsa-Pemangsa dengan Fungsi Respon *Beddington-DeAngelis*

Aisyiah Kholifatul Hanifah<sup>1</sup> dan Abadi Abadi<sup>1,\*</sup> 

<sup>1</sup>Jurusan Matematika, Universitas Negeri Surabaya, Indonesia

## ARTICLE HISTORY

Submit 15 Januari 2024  
Direvisi 7 Februari 2024  
Disetujui 10 Februari 2024

## KATA KUNCI

Sistem Mangsa-Pemangsa  
Beddington-DeAngelis  
Analisis Kestabilan  
Perlindungan Mangsa  
Daya dukung Variabel

## KEYWORDS

Prey-Predator System  
Beddington-DeAngelis  
Stability Analysis  
Prey Protection  
Variable Carrying Capacity

**ABSTRAK.** Beberapa spesies di dunia telah mengalami kepunahan. Untuk menyelamatkan spesies dari kepunahan, formulasi dari sistem perlu dilakukan, salah satunya dengan perlindungan mangsa. Perubahan proses fisik dan biologis juga memiliki peran pada lingkungan, yaitu mengakibatkan daya dukung yang berubah secara dinamis. Tingkat konsumsi mangsa oleh pemangsa rata-rata, yaitu fungsi respon juga penting dalam formulasi sistem. Pada penelitian ini dikonstruksikan sistem mangsa-pemangsa dengan fungsi respon *Beddington-DeAngelis* yang mempertimbangkan perlindungan mangsa dan daya dukung variabel serta proses predasi yang memperhatikan populasi pemangsa. Dalam penelitian ini ditentukan titik kesetimbangan kepunahan mangsa-pemangsa, kepunahan pemangsa, dan hidup berdampingan lalu dilanjutkan menganalisis kestabilannya. Dengan nilai perlindungan mangsa yang besar, titik kesetimbangan kepunahan pemangsa bersifat stabil asimtotik dan titik kesetimbangan hidup berdampingan bersifat stabil asimtotik, jika dan hanya jika pada rentang nilai parameter perlindungan mangsa tertentu. Selain itu, dilakukan simulasi dan didapatkan kesimpulan bahwa pada nilai perlindungan mangsa tertentu, terjadi perubahan pada kestabilan sistem yang bergantung pada batas-batas daya dukungnya.

**ABSTRACT.** Several species in the world have experienced extinction. To save species from extinction, a system needs to be formulated, one of which is protecting prey. Changes in physical and biological processes also have a role in the environment, namely resulting in dynamically changing carrying capacity. The rate of prey consumption by the average predator, i.e. the response function is also important in the system formulation. In this study, a prey-predator system was constructed with a *Beddington-DeAngelis* response function that considers prey protection and variable carrying capacity as well as a predation process that takes into account the predator population. In this research, the equilibrium point for prey-predator extinction, predator extinction, and coexistence was determined and then continued to analyze its stability. With a large prey protection value, the predator extinction equilibrium point is asymptotically stable and the coexistence equilibrium point is asymptotically stable, if and only if within a certain range of prey protection parameter values. In addition, simulations were carried out and it was concluded that at certain prey protection values, changes occurred in the stability of the system which depended on the limits of its carrying capacity.



This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License. *Editorial of JJBM: Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo, Jln. Prof. Dr. Ing. B. J. Habibie, Bone Bolango 96554, Indonesia.*

## 1. Pendahuluan

Model matematika sering kali membahas permasalahan fenomena alam yang terjadi pada makhluk hidup, serta dapat digunakan untuk memprediksi perilaku sistem untuk jangka waktu tertentu yang direpresentasikan dalam suatu sistem persamaan. Salah satu model interaksi makhluk hidup dalam satu ekosistem adalah model mangsa-pemangsa.

Beberapa spesies di dunia ini telah mengalami kepunahan dan banyak spesies lainnya yang hampir punah. Hal ini disebabkan oleh berbagai alasan misalnya pencemaran lingkungan, eksploitasi, pemanenan yang tidak teratur, pencemaran lingkungan, tingkat pemangsaan yang terlalu tinggi. Untuk menyelamatkan

spesies dari kepunahan, formulasi dari sistem perlu dilakukan [1–3].

Perilaku pada mangsa salah satunya yaitu melindungi diri dari pemangsa atau dapat disebut sebagai perlindungan mangsa. Beberapa studi terdahulu telah menunjukkan efek dari menstabilkan dinamika sistem dengan suatu perlindungan mangsa. Contohnya adalah penelitian yang dilakukan oleh Connell dkk pada tahun 1970 [4], ditemukan fakta bahwa perlindungan spasial yang ditunjukkan oleh spesies teritip (*Balanus glandula*, *Balanus cariosus*, *Chthamalus fissus*) di daerah pasang surut yang lebih tinggi dapat menstabilkan interaksinya dengan siput predator (*Thais emarginata*, *Thais canaliculata*, *Thais lamellosa*). Secara umum, perlindungan mangsa memiliki peran penting dalam kestabilan interaksi mangsa-pemangsa dan dapat mencegah ter-

\*Penulis Korespondensi.

jadinya kepunahan spesies mangsa, karena mangsa melindungi diri dari pemangsa. Beberapa penulis telah mempelajari dampak tempat perlindungan mangsa terhadap stabilitas dinamika mangsa-pemangsa [2, 3, 5–11].

Selain perlindungan mangsa yang memiliki peran penting dalam kestabilan sistem mangsa-pemangsa, perubahan proses fisik dan biologis juga memiliki peran pada lingkungan, yaitu mengakibatkan perubahan daya dukung dan pada akhirnya memberikan pengaruh pada sistem mangsa-pemangsa. Di sebagian besar literatur atau penelitian terdahulu misalnya [1, 2, 12], daya dukung dinyatakan dalam bentuk konstan. Tetapi, dalam keadaan lingkungan yang nyata, daya dukung berubah secara dinamis, jadi masuk akal jika mempertimbangkan daya dukung sebagai variabel model (yaitu fungsi dalam waktu). Selain itu, pada kenyataannya sumber daya bersifat terbatas sehingga peningkatan atau penurunan daya dukung memiliki suatu batas [5, 13–15].

Fungsi respon berkaitan erat dengan peningkatan populasi pemangsa atau pengurangan populasi mangsa saat saling berinteraksi [16]. Terdapat keadaan di mana peningkatan kepadatan pemangsa yang mengisyaratkan penurunan laju makan pemangsa karena adanya gangguan timbal balik di antara pemangsa-pemangsa. Pada penelitian yang dilakukan oleh Hassel pada tahun 1971 [17] menunjukkan bahwa efisiensi pencarian parasit serangga, *Nemeritis canescens*, menurun pada kepadatan parasit atau spesies serangga hama terutama ulat yang tinggi. Hal ini merupakan faktor kunci untuk dapat memodifikasi fungsi respon Holling tipe-II ke dalam bentuk fungsi respon *Beddington-DeAngelis*. Fungsi respon *Beddington-DeAngelis* serupa dengan respon fungsional Holling tipe-II tetapi mengandung istilah tambahan yang menggambarkan gangguan timbal balik oleh pemangsa [18, 19].

Pada penelitian terdahulu yang telah dilakukan oleh Al-Salti dkk pada tahun 2021 [5] mengenai efek penggabungan perlindungan mangsa  $m$  dan daya dukung variabel yang dibatasi antara  $K_1$  dan  $K_2$  dalam sistem dinamika interaksi mangsa-pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe-II, ditemukan bahwa untuk nilai batas awal daya dukung yang kecil, populasi mangsa-pemangsa untuk kasus daya dukung yang menurun mencapai kesetimbangan kepunahan pemangsa untuk nilai perlindungan mangsa yang tinggi. Dengan meningkatkan batas atas daya dukung, rentang nilai perlindungan mangsa dan batas awal daya dukung membuat sistem mencapai kesetimbangan hidup berdampingan yang stabil. Dengan simulasi numerik ditunjukkan bahwa kasus daya dukung variabel dan daya dukung konstan, memiliki perilaku jangka panjang yang sama namun, dinamika jangka pendeknya berbeda. Selain itu, ditunjukkan juga bahwa ketika daya dukung berubah secara perlahan, sistem membutuhkan waktu yang lebih lama untuk mencapai titik kesetimbangan.

Berdasarkan uraian di atas, pada penelitian ini dikaji lebih lanjut mengenai model mangsa-pemangsa yang mengacu pada penelitian Al-Salti dkk [5] dengan menambahkan asumsi bahwa terkait laju pemangsaan tidak hanya bergantung pada mangsa melainkan juga bergantung pada pemangsa. Dalam hal ini diasumsikan terjadi peningkatan pada kepadatan populasi pemangsa yang mengakibatkan penurunan laju pemangsaan sebagaimana yang dibahas pada penelitian Tripathi dkk [1]. Modifikasi dilakukan untuk mengetahui bagaimana efek perlindungan mangsa terhadap fenomena kepunahan populasi mangsa dan daya dukung variabel pada sistem mangsa-pemangsa dengan fungsi res-

pon *Beddington-DeAngelis*. Sistem mangsa-pemangsa disajikan ke dalam 3 populasi yaitu  $N$  (Prey/Mangsa),  $P$  (Predator/Pemangsa), dan  $K$  (Carrying Capacity/Daya Dukung).

Penelitian ini dilakukan dengan mengkaji studi literatur, mengkonstruksi model mangsa-pemangsa, menentukan titik kesetimbangan, melakukan analisis kestabilan dan analisis bifurkasi, serta membuat simulasi numerik untuk mengonfirmasi hasil analisis yang telah dilakukan.

## 2. Model

Laju populasi mangsa  $N$  terhadap waktu dipengaruhi oleh populasi mangsa yang tumbuh secara logistik dengan tingkat pertumbuhan  $r$  dengan kata lain populasi mangsa tumbuh secara eksponensial sebesar  $rN$  dan akan berkurang karena adanya faktor daya dukung  $\frac{N^2}{K}$ . Selain itu populasi mangsa akan berkurang dengan tingkat penurunan mangsa  $a$  akibat dari proses predasi yang mengalami hambatan karena adanya faktor penanganan pemangsa saat melakukan pemangsaan  $\gamma_1$  dan adanya gangguan antar populasi pemangsa  $\gamma_2$ . Selain itu, jumlah populasi mangsa yang dimangsa tersisa  $(1 - m)n$  karena adanya faktor perlindungan mangsa. Dengan demikian laju populasi mangsa atau  $N$  terhadap waktu dapat direpresentasikan pada persamaan (1):

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{a(1 - m)NP}{1 + \gamma_1(1 - m)N + \gamma_2P}. \quad (1)$$

Laju populasi pemangsa  $P$  terhadap waktu akan bertambah dengan tingkat kenaikan pemangsa  $b$  dipengaruhi oleh proses predasi yang mengikuti fungsi respon *Beddington-DeAngelis* di mana selain memperhatikan populasi mangsa juga memperhatikan gangguan di antara pemangsa. Populasi pemangsa memakan populasi mangsa untuk mendapat energi dimana yang selain digunakan untuk hidup, energi tersebut digunakan juga untuk bereproduksi menghasilkan populasi pemangsa baru. Selain itu populasi pemangsa akan berkurang akibat dari proses kematian alami pemangsa dengan tingkat kematian alami pemangsa  $c$ , sehingga laju populasi pemangsa atau  $P$  terhadap waktu dapat direpresentasikan pada persamaan (2):

$$\frac{dP}{dt} = \frac{b(1 - m)NP}{1 + \gamma_1(1 - m)N + \gamma_2P} - cP. \quad (2)$$

Daya dukung diasumsikan berubah secara dinamis mengikuti model pertumbuhan logistik tergantung pada nilai awal dan nilai pembatasnya  $K_1, K_2$ . Daya dukung berubah dengan tingkat pertumbuhan  $\alpha$  dengan kata lain daya dukung tumbuh secara eksponensial dengan batas bawah daya dukung  $K_1$  yaitu  $\alpha(K - K_1)$  dan akan berkurang karena adanya batas atas dan batas bawah daya dukung  $\alpha \frac{(K - K_1)^2}{\delta_k}$ , di mana  $\delta_k = K_2 - K_1$ . Dengan demikian laju daya dukung atau  $K$  terhadap waktu dapat direpresentasikan pada persamaan (3):

$$\frac{dK}{dt} = \alpha(K - K_1) \left(1 - \frac{K - K_1}{\delta_k}\right). \quad (3)$$

Dari persamaan (1)-(3), diperoleh sistem mangsa-pemangsa dengan fungsi respon *Beddington-DeAngelis* yang mempertimbangkan perlindungan mangsa dan daya dukung variabel pada persamaan (4):

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{a(1-m)NP}{1 + \gamma_1(1-m)N + \gamma_2P} \\ \frac{dP}{dt} &= \frac{b(1-m)NP}{1 + \gamma_1(1-m)N + \gamma_2P} - cP \\ \frac{dK}{dt} &= \alpha(K - K_1) \left(1 - \frac{K - K_1}{\delta_K}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

dengan keterangan variabel atau parameter yang digunakan dijelaskan pada Tabel 1.

Tabel 1. Keterangan variabel dan parameter

Variabel	Keterangan
$N$	Populasi mangsa
$P$	Populasi pemangsa
$K$	Daya dukung
$r$	Laju pertumbuhan mangsa
$a$	Tingkat penurunan mangsa
$b$	Tingkat kenaikan pemangsa
$c$	Tingkat kematian alami pemangsa
$m$	Konstanta perlindungan mangsa, $m \in [0, 1)$
$\gamma_1$	Parameter penanganan
$\gamma_2$	Besarnya gangguan di antara pemangsa
$\alpha$	Tingkat penurunan atau kenaikan daya dukung
$K_1, K_2$	Batas daya dukung, $\delta_K = K_2 - K_1$

Sumber: [1, 5]

Untuk mempermudah penentuan titik kesetimbangan, jumlah parameter dalam sistem atau model (4) dapat direduksi dengan penskalaan mengikuti persamaan (5):

$$n = \frac{N}{n_c}, \quad p = \frac{P}{p_c}, \quad k = \frac{K}{k_c}, \quad \tau = \frac{t}{\tau_c}. \tag{5}$$

Sistem (4) dapat ditransormasi menggunakan penskalaan (5), sehingga diperoleh sistem berskala pada persamaan (6):

$$\begin{aligned} \frac{dn}{d\tau} &= n \left(1 - \frac{n}{K}\right) - \frac{(1-m)np}{1 + \beta_1(1-m)n + \beta_2p} \\ \frac{dp}{d\tau} &= \frac{(1-m)np}{1 + \beta_1(1-m)n + \beta_2p} - \sigma_1p \\ \frac{dk}{d\tau} &= \sigma_2(k - k_1) \left(1 - \frac{k - k_1}{\delta_k}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

dimana,

$$n_c = k_c = \frac{r}{b}, \quad p_c = \frac{r}{a}, \quad \tau_c = \frac{1}{r}$$

dan

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{r\gamma_1}{b}, \quad \beta_2 = \frac{r\gamma_2}{a}, \quad \sigma_1 = \frac{c}{r}, \quad \sigma_2 = \frac{\alpha}{r} \\ \delta_k &= k_2 - k_1, \quad k_1 = \frac{rK_1}{b}, \quad k_2 = \frac{rK_2}{b}. \end{aligned}$$

### 3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini, disajikan keberadaan titik keseimbangan sistem (6), analisis titik kesetimbangannya, serta simulasi numeriknya.

#### 3.1. Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan diperoleh dengan menyelesaikan sistem (6), yaitu kondisi yang diperoleh ketika  $\frac{dn}{d\tau} = \frac{dp}{d\tau} = \frac{dk}{d\tau} = 0$ . Terdapat 6 kemungkinan titik kesetimbangan yang dapat dikelompokkan dalam 3 jenis titik kesetimbangan sebagai berikut:

1. Titik kesetimbangan kepunahan mangsa-pemangsa

$$\xi_1 = (0, 0, k_1) \text{ dan } \xi_2 = (0, 0, k_2)$$

2. Titik kesetimbangan kepunahan pemangsa

$$\xi_3 = (k_1, 0, k_1) \text{ dan } \xi_4 = (k_2, 0, k_2)$$

3. Titik kesetimbangan hidup berdampingan

$$\xi_5 = (n_1^*, p_1^*, k_1) \text{ dan } \xi_6 = (n_2^*, p_2^*, k_2)$$

dimana  $n_i^*$ ,  $i = 1, 2$  adalah solusi dari persamaan kuadrat (7):

$$An^2 + Bn + C = 0. \tag{7}$$

dengan

$$A = \beta_2,$$

$$B = \beta_1 k_i m \sigma_1 - \beta_1 k_i \sigma_1 - \beta_2 k_i - k_i m + k_i, \quad i = 1, 2$$

$$C = -k_i \sigma_1, \quad i = 1, 2.$$

dan

$$p_i^* = \frac{(1-m)(1-\sigma_1\beta_1)n_i^* - \sigma_1}{\sigma_1\beta_2}, \quad i = 1, 2.$$

Titik kesetimbangan  $\xi_5$  dan  $\xi_6$  ada ketika

$$(1-m) > \frac{\sigma_1}{(1-\beta_1\sigma_1)n_i^*}, \quad i = 1, 2.$$

#### 3.2. Analisis Kestabilan

Kestabilan titik-titik kesetimbangan ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobian pada setiap titik kesetimbangan sistem (6). Untuk tujuan ini, kita perhatikan bahwa matriks Jacobian sistem (6) pada titik kesetimbangan, dilambangkan dengan  $J(\xi)$ , yaitu

$$J(\xi) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{bmatrix} \tag{8}$$

dimana

$$J_{11} = 1 - \frac{2n}{k} - \frac{\left((1-m)p + \beta_2(1-m)p^2\right)}{\left(1 + \beta_1(1-m)n + \beta_2p\right)^2}$$

$$J_{12} = - \frac{\left((1-m)n + \beta_1(1-m)^2n^2\right)}{\left(1 + \beta_1(1-m)n + \beta_2p\right)^2}$$

$$J_{13} = \frac{n^2}{k^2}$$

$$J_{21} = \frac{(1-m)p + \beta_2(1-m)p^2}{\left(1 + \beta_1(1-m)n + \beta_2p\right)^2}$$

$$J_{22} = \frac{(1-m)n + \beta_1(1-m)^2n^2}{\left(1 + \beta_1(1-m)n + \beta_2p\right)^2} - \sigma_1$$

$$J_{33} = \sigma_2 \left(1 - \frac{k - k_1}{\delta_k}\right) - \sigma_2 \left(\frac{k - k_1}{\delta_k}\right).$$



Berdasarkan matriks Jacobian pada persamaan (8), dilakukan analisis kestabilan pada masing-masing titik kesetimbangan sebagai berikut:

### 3.2.1. Titik Kesetimbangan Kepunahan Mangsa-Pemangsa

Sifat kestabilan untuk titik kesetimbangan kepunahan mangsa-pemangsa dinyatakan dalam Teorema 1.

**Teorema 1.** Titik kesetimbangan kepunahan mangsa-pemangsa  $\xi_1 = (0, 0, k_1)$  dan  $\xi_2 = (0, 0, k_2)$  merupakan titik pelana yang tidak stabil.

*Bukti.* Dengan mengevaluasi matriks Jacobian (8) di titik kesetimbangan  $\xi_1$  dan  $\xi_2$  diperoleh:

1. Matriks Jacobian (8) di titik  $\xi_1$ , yaitu

$$J(\xi_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Dari matriks Jacobian persamaan (9), diperoleh nilai eigen masing-masing  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -\sigma_1$ ,  $\lambda_3 = \sigma_2$ , sehingga titik kesetimbangan  $\xi_1$  merupakan titik pelana yang tidak stabil karena  $\lambda_1 = 1$  dan  $\lambda_3 = \sigma_2$  positif.

2. Matriks Jacobian (8) di titik  $\xi_2$ , yaitu

$$J(\xi_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_2 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Dari matriks Jacobian persamaan (10), diperoleh nilai eigen masing-masing  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -\sigma_1$ ,  $\lambda_3 = -\sigma_2$ , sehingga titik kesetimbangan  $\xi_2$  merupakan titik pelana yang tidak stabil karena  $\lambda_1 = 1$  positif. □

### 3.2.2. Titik Kesetimbangan Kepunahan Pemangsa

Sifat kestabilan untuk titik kesetimbangan kepunahan pemangsa dinyatakan dalam Teorema 2.

**Teorema 2.** Titik kesetimbangan kepunahan pemangsa  $\xi_3 = (k_1, 0, k_1)$  selalu tidak stabil dan merupakan titik pelana, sedangkan titik kesetimbangan  $\xi_4 = (k_2, 0, k_2)$  stabil asimtotik lokal dan merupakan titik simpul jika  $m > 1 - \frac{\sigma_1}{k_2(1-\sigma_1\beta_1)}$ .

*Bukti.* Dengan mengevaluasi matriks Jacobian (8) di titik kesetimbangan  $\xi_3$  dan  $\xi_4$  diperoleh:

1. Matriks Jacobian (8) di titik  $\xi_3$ , yaitu

$$J(\xi_3) = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{(1-m)k_1}{1+\beta_1(1-m)k_1} & 1 \\ 0 & \frac{(1-m)k_1}{1+\beta_1(1-m)k_1} - \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Dari matriks Jacobian persamaan (11), diperoleh nilai eigen

masing-masing:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1, \\ \lambda_2 &= \frac{((1-m)k_1 + \beta_1(1-m)^2k_1^2)}{(1 + \beta_1(1-m)k_1)^2} - \sigma_1, \\ \lambda_3 &= \sigma_2. \end{aligned}$$

sehingga titik kesetimbangan  $\xi_3$  merupakan titik pelana yang tidak stabil karena  $\lambda_3 = \sigma_2$  positif.

2. Matriks Jacobian (8) di titik  $\xi_4$ , yaitu

$$J(\xi_4) = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{(1-m)k_2}{1+\beta_1(1-m)k_2} & 1 \\ 0 & \frac{(1-m)k_2}{1+\beta_1(1-m)k_2} - \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_2 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Dari matriks Jacobian persamaan (12), diperoleh nilai eigen masing-masing:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1, \\ \lambda_2 &= \frac{((1-m)k_1 + \beta_1(1-m)^2k_1^2)}{(1 + \beta_1(1-m)k_1)^2} - \sigma_1, \\ \lambda_3 &= -\sigma_2 \end{aligned}$$

sehingga titik kesetimbangan  $\xi_4$  merupakan titik simpul yang stabil asimtotik lokal jika  $\lambda_2 < 0$  atau  $m > 1 - \frac{\sigma_1}{k_2(1-\sigma_1\beta_1)}$ . □

### 3.2.3. Titik Kesetimbangan Hidup Berdampungan

Sifat kestabilan untuk titik kesetimbangan hidup berdampungan antara kedua populasi dinyatakan dalam Teorema 3.

**Teorema 3.** Titik kesetimbangan hidup berdampungan  $\xi_5 = (n_1^*, p_1^*, k_1)$  tidak stabil, sedangkan titik kesetimbangan  $\xi_6 = (n_2^*, p_2^*, k_2)$  stabil asimtotik lokal jika  $\text{trace}(J^*(\xi_6)) < 0$  dan  $\det(J^*(\xi_6)) > 0$ .

*Bukti.* Dengan mengevaluasi matriks Jacobian (8) di titik kesetimbangan  $\xi_5$  dan  $\xi_6$  diperoleh:

1. Matriks Jacobian (8) di titik  $\xi_5$ , yaitu

$$J(\xi_5) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

dimana

$$\begin{aligned} J_{11} &= 1 - \frac{2n_1^*}{k_1} - \left( \frac{(1-m)p_1^* + \beta_2(1-m)p_1^{*2}}{(1 + \beta_1(1-m)n_1^* + \beta_2p_1^{*2})^2} \right) \\ J_{12} &= - \left( \frac{(1-m)n_1^* + \beta_1(1-m)^2n_1^{*2}}{(1 + \beta_1(1-m)n_1^* + \beta_2p_1^{*2})^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{13} &= \frac{n_1^{*2}}{k_1^2} \\
 J_{21} &= \frac{(1-m)p_1^* + \beta_2(1-m)p_1^{*2}}{(1+\beta_1(1-m)n_1^* + \beta_2 p_1^{*2})^2} \\
 J_{22} &= \frac{(1-m)n_1^* + \beta_1(1-m)^2 n_1^{*2}}{(1+\beta_1(1-m)n_1^* + \beta_2 p_1^{*2})^2} - \sigma_1 \\
 J_{33} &= \sigma_2.
 \end{aligned}$$

Dari matriks Jacobian persamaan (13), diperoleh salah satu nilai eigen  $\lambda_3 = \sigma_2$ . Karena semua nilai parameter positif, maka  $\lambda_3 = \sigma_2 > 0$ . Hal ini sudah cukup untuk menunjukkan bahwa titik kesetimbangan  $\xi_5$  tidak stabil.

2. Matriks Jacobian (8) di titik  $\xi_6$ , yaitu

$$J(\xi_6) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

dimana

$$\begin{aligned}
 J_{11} &= 1 - \frac{2n_2^*}{k_2} - \left( \frac{(1-m)p_2^* + \beta_2(1-m)p_2^{*2}}{(1+\beta_1(1-m)n_2^* + \beta_2 p_2^{*2})^2} \right) \\
 J_{12} &= - \left( \frac{(1-m)n_2^* + \beta_1(1-m)^2 n_2^{*2}}{(1+\beta_1(1-m)n_2^* + \beta_2 p_2^{*2})^2} \right) \\
 J_{13} &= \frac{n_2^{*2}}{k_2^2} \\
 J_{21} &= \frac{(1-m)p_2^* + \beta_2(1-m)p_2^{*2}}{(1+\beta_1(1-m)n_2^* + \beta_2 p_2^{*2})^2} \\
 J_{22} &= \frac{(1-m)n_2^* + \beta_1(1-m)^2 n_2^{*2}}{(1+\beta_1(1-m)n_2^* + \beta_2 p_2^{*2})^2} - \sigma_1 \\
 J_{33} &= -\sigma_2.
 \end{aligned}$$

Dari matriks Jacobian persamaan (14), diperoleh salah satu nilai eigen negatif, yaitu  $\lambda_3 = -\sigma_2$ . Dua nilai eigen lainnya adalah nilai eigen dari matriks tereduksi pada persamaan (15), yaitu:

$$J^*(\xi_6) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}, \tag{15}$$

dimana

$$\begin{aligned}
 J_{11} &= 1 - \frac{2n_2^*}{k_2} - \left( \frac{(1-m)p_2^* + \beta_2(1-m)p_2^{*2}}{(1+\beta_1(1-m)n_2^* + \beta_2 p_2^{*2})^2} \right) \\
 J_{12} &= - \left( \frac{(1-m)n_2^* + \beta_1(1-m)^2 n_2^{*2}}{(1+\beta_1(1-m)n_2^* + \beta_2 p_2^{*2})^2} \right) \\
 J_{21} &= \frac{(1-m)p_2^* + \beta_2(1-m)p_2^{*2}}{(1+\beta_1(1-m)n_2^* + \beta_2 p_2^{*2})^2} \\
 J_{22} &= \frac{(1-m)n_2^* + \beta_1(1-m)^2 n_2^{*2}}{(1+\beta_1(1-m)n_2^* + \beta_2 p_2^{*2})^2} - \sigma_1.
 \end{aligned}$$

Nilai eigen dari  $J^*(\xi_6)$  mempunyai bagian real negatif jika  $trace(J^*(\xi_6)) < 0$  dan  $det(J^*(\xi_6)) > 0$  [20]. Selanjutnya, dari persamaan (15), akan ditunjukkan bahwa:

- $trace(J^*(\xi_6)) < 0$ :

$$trace(J^*(\xi_6)) = J_{11} + J_{22}. \tag{16}$$

Karena semua nilai parameter positif, maka  $trace(J^*(\xi_6)) < 0$ .

- $det(J^*(\xi_6)) > 0$ :

$$det(J^*(\xi_6)) = J_{11}J_{22} - J_{21}J_{12}. \tag{17}$$

Karena semua nilai parameter positif, maka  $det(J^*(\xi_6)) > 0$ .

Dengan demikian, titik kesetimbangan  $\xi_6$  stabil asimtotik lokal karena  $trace(J^*(\xi_6)) < 0$  dan  $det(J^*(\xi_6)) > 0$ . □

### 3.3. Analisis Bifurkasi

Pada bagian ini disajikan analisis bifurkasi sistem (6) pada titik kesetimbangan  $\xi_4$  dan  $\xi_6$  dalam Teorema 4 beserta pembuktiannya. Dalam hal ini diambil parameter perlindungan mangsa  $m$  sebagai parameter bifurkasi.

**Teorema 4.** Sistem (6) mengalami perubahan kestabilan atau bifurkasi transcritical pada titik kesetimbangan  $\xi_4$  ketika parameter perlindungan mangsa  $m$  melewati titik percabangan yaitu  $m^* = 1 - \frac{\sigma_1}{k_2(1-\sigma_1\beta_1)}$ .

*Bukti.* Berdasarkan teorema Sotomayor [21], diambil parameter perlindungan mangsa  $m$  menjadi parameter bifurkasi dengan nilai bifurkasi  $m^* = 1 - \frac{\sigma_1}{k_2(1-\sigma_1\beta_1)}$ , dengan mengevaluasi matriks Jacobian sistem (6) di  $(\xi_4, m^*)$ , yaitu:

$$J(\xi_4, m^*) = \begin{bmatrix} -1 & -\sigma_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_2 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Dari matriks Jacobian pada persamaan (18), jelas ditunjukkan bahwa matriks  $J(\xi_4, m^*)$  memiliki nilai eigen nol, misalkan  $\lambda_2 = 0$ . Selanjutnya, perlu untuk mencari vektor eigen kanan dan kiri dari  $\lambda_2 = 0$ . Misalkan  $u = (u_1, u_2, u_3)^T$  dan  $v = (v_1, v_2, v_3)^T$  masing-masing adalah vektor eigen kanan dan kiri dari  $\lambda_2 = 0$ . Kedua vektor eigen tersebut dapat dicari dengan menyelesaikan  $J(\xi_4, m^*)u = 0$  dan  $J^T(\xi_4, m^*)v = 0$ . Oleh karena itu, diperoleh  $u = (\sigma_1, -1, 0)^T$  dan  $v = (0, 1, 0)^T$ .

Sistem (6) dapat ditulis kembali dalam bentuk vektor pada persamaan (19):

$$x' = f(x), \tag{19}$$

dimana  $x = (n, p, k)^T$  dan

$$f(x) = \begin{bmatrix} n \left( 1 - \frac{n}{k} \right) - \frac{(1-m)np}{1+\beta_1(1-m)n+\beta_2 p} \\ \frac{(1-m)np}{1+\beta_1(1-m)n+\beta_2 p} - \sigma_1 p \\ \sigma_2 \left( k - k_1 \right) \left( 1 - \frac{k-k_1}{\delta_k} \right) \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Untuk menggunakan teorema Sotomayor, diperlukan untuk memeriksa tiga kondisi pada persamaan (21), yaitu:

$$\begin{aligned} v^T f_m(\xi_4, m^*) &= 0, \\ v^T (Df_m(\xi_4, m^*) \mathbf{u}) &\neq 0, \text{ dan} \\ v^T [D^2 f(\xi_4, m^*) (\mathbf{u}, \mathbf{u})] &\neq 0. \end{aligned} \tag{21}$$

- Untuk kondisi pertama, diperlukan  $f_m$  sedemikian hingga diperoleh:

$$\begin{aligned} f_m(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \frac{(1+\beta_2 p)np}{(1+\beta_1(1-m)n+\beta_2 p)^2} \\ -\frac{(1+\beta_2 p)np}{(1+\beta_1(1-m)n+\beta_2 p)^2} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan} \\ f_m(\xi_4, m^*) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{22}$$

oleh karena itu, dapat ditunjukkan bahwa  $v^T f_m(\xi_4, m^*) = 0$ .

- Untuk kondisi kedua, diperlukan  $Df_m(\xi_4, m^*)$  sedemikian hingga diperoleh:

$$Df_m(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

dimana

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{(1 + \beta_2 p) p}{(1 + \beta_1 (1 - m) n + \beta_2 p)^2} - \frac{2\beta_1 (1 + \beta_2 p) (1 - m) np}{(1 + \beta_1 (1 - m) n + \beta_2 p)^3} \\ D_{12} &= \frac{(1 + 2\beta_2 p) n}{(1 + \beta_1 (1 - m) n + \beta_2 p)^2} - \frac{2\beta_2 (1 + \beta_2 p) np}{(1 + \beta_1 (1 - m) n + \beta_2 p)^3} \\ D_{21} &= \frac{2\beta_1 (1 + \beta_2 p) (1 - m) np}{(1 + \beta_1 (1 - m) n + \beta_2 p)^3} - \frac{(1 + \beta_2 p) p}{(1 + \beta_1 (1 - m) n + \beta_2 p)^2} \\ D_{22} &= \frac{2\beta_2 (1 + \beta_2 p) np}{(1 + \beta_1 (1 - m) n + \beta_2 p)^3} - \frac{(1 + 2\beta_2 p) n}{(1 + \beta_1 (1 - m) n + \beta_2 p)^2}. \end{aligned}$$

dan

$$Df_m(\xi_4, m^*) = \begin{bmatrix} 0 & k_2 (1 - \sigma_1 \beta_1)^2 & 0 \\ 0 & -k_2 (1 - \sigma_1 \beta_1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Oleh karena itu, dapat ditunjukkan bahwa  $v^T (Df_m(\xi_4, m^*) \mathbf{u}) = k_2 (1 - \sigma_1 \beta_1)^2 \neq 0$ .

- Untuk kondisi ketiga, diperlukan  $D^2 f(\xi_4, m^*) (\mathbf{u}, \mathbf{u})$  sedemikian hingga diperoleh:

$$D^2 f(\xi_4, m^*) (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} -\frac{2\sigma_1^2}{k_2} + 2\beta_2 \sigma_1 (1 - \sigma_1 \beta_1) \\ -2\beta_2 \sigma_1 (1 - \sigma_1 \beta_1) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Oleh karena itu, dapat ditunjukkan bahwa  $v^T [D^2 f(\xi_4, m^*) (\mathbf{u}, \mathbf{u})] = -2\beta_2 \sigma_1 (1 - \sigma_1 \beta_1) \neq 0$ .

Karena ketiga kondisi terpenuhi, maka berdasarkan teorema Sotomayor, titik kesetimbangan  $\xi_4$  mengalami bifurkasi *transcritical* ketika

$$m^* = 1 - \frac{\sigma_1}{k_2 (1 - \sigma_1 \beta_1)}.$$

□

Ketika  $m > 1 - \frac{\sigma_1}{k_2 (1 - \sigma_1 \beta_1)}$ , titik kesetimbangan  $\xi_4$  merupakan titik simpul yang stabil asimtotik lokal, ketika  $m < 1 - \frac{\sigma_1}{k_2 (1 - \sigma_1 \beta_1)}$ , titik kesetimbangan  $\xi_4$  menjadi titik pelana yang tidak stabil, dan pada saat bersamaan muncul  $\xi_6$  yang stabil.

Analisis bifurkasi titik kesetimbangan  $\xi_6$  dapat dilakukan dengan menggunakan hasil analisis kestabilannya. Hal ini dapat dilakukan menggunakan matriks Jacobian pada persamaan (14). Namun, karena komponen matriks pada persamaan (14) masih memuat  $n_2^*$  dan  $p_2^*$  yang ekspresinya cukup panjang dan rumit, maka analisis bifurkasi titik kesetimbangan  $\xi_6$  terlalu rumit untuk dihitung secara analitik. Oleh karena itu, analisis bifurkasi titik kesetimbangan  $\xi_6$  dilakukan secara numerik dengan mengontinuasi nilai parameter  $m$ .

### 3.4. Simulasi Numerik

Pada bagian ini, dilakukan simulasi numerik dari sistem persamaan (6) untuk menggambarkan hasil analitik yang telah dilakukan sebelumnya. Parameter yang digunakan disajikan pada Tabel 2.

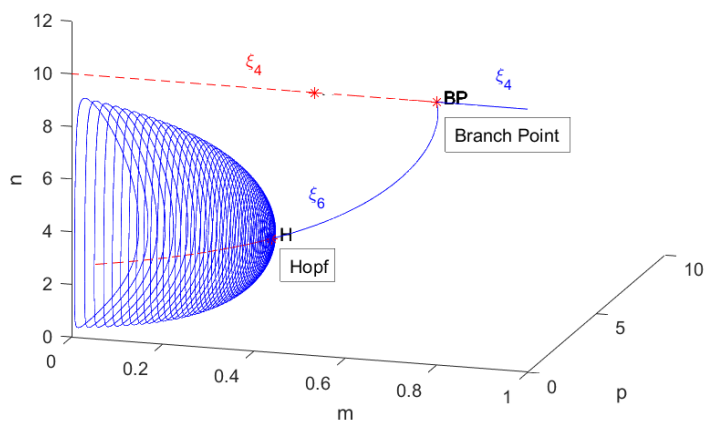
Tabel 2. Nilai parameter

Parameter	Nilai	Referensi
$\beta_1$	0,50	[5]
$\beta_2$	0,01	[1]
$\sigma_1$	1,00	[5]
$\sigma_2$	0,40	[5]

Simulasi awal dilakukan menggunakan nilai parameter pada Tabel 2 dan nilai parameter untuk kasus daya dukung meningkat diasumsikan yaitu  $m = 0,5$ ,  $k_1 = 8$ , dan  $k_2 = 10$ . Ditemukan fakta bahwa sistem (6) mengalami perubahan kestabilan atau bifurkasi yang ditunjukkan pada Gambar 1 untuk kasus daya dukung meningkat. Kurva merah dan kurva biru menunjukkan keadaan tidak stabil dan stabil pada setiap titik kesetimbangan. H menunjukkan titik terjadinya bifurkasi Hopf serta BP menunjukkan titik terjadinya bifurkasi *Transcritical*.

Gambar 1 menunjukkan terjadinya bifurkasi *Transcritical* pada titik  $m = 0,8$ . Hal ini menunjukkan bahwa sistem mengalami perubahan kestabilan kepunahan pemangsa pada  $m = 0,8$ , dengan kata lain, terdapat titik kesetimbangan kepunahan pemangsa  $\xi_4 = (k_2, 0, k_2)$  yang stabil pada interval nilai parameter  $m = (0,8; 1)$  dan tidak stabil pada interval  $m = (0; 0,8)$ .

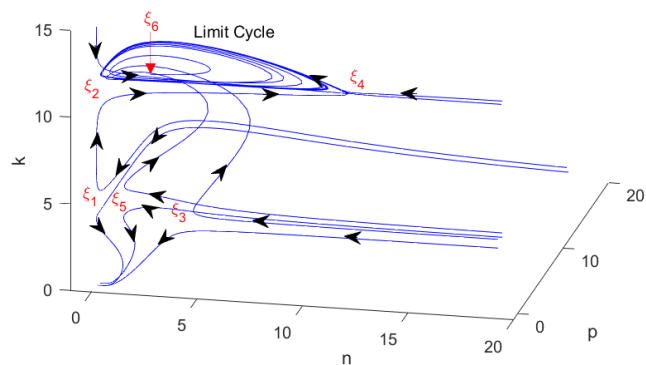
Gambar 1 juga menunjukkan bahwa sistem mengalami bifurkasi *Hopf Supercritical* pada  $m = 0,37$  karena terdapat siklus



Gambar 1. Bifurkasi dengan parameter  $m$  dan kasus daya dukung meningkat ( $k_2 > k_1$ )

periodik yang stabil setelah bifurkasi, dengan kata lain, terjadi titik kesetimbangan hidup berdampingan  $\xi_6 = (n^*, p^*, k_2)$  yang stabil pada interval nilai parameter  $m = (0, 37; 0, 8)$ . Adapun untuk interval nilai parameter  $m = (0; 0, 37)$ , sistem memiliki solusi periodik atau dengan kata lain pertumbuhan populasi mangsa dan pemangsa mengalami siklus yang berkala. Jumlah mangsa yang meningkat akan menyebabkan peningkatan jumlah pemangsa. Kemudian, dengan penurunan populasi mangsa, populasi pemangsa juga dapat menurun.

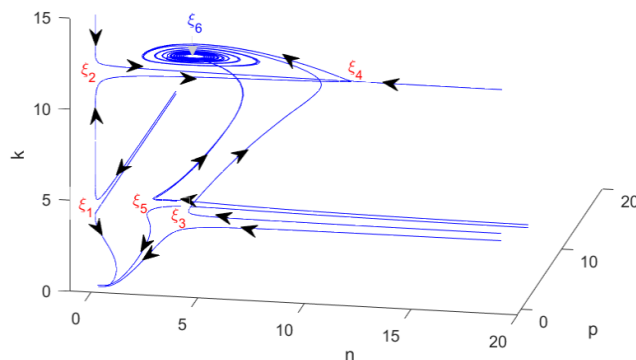
Untuk memperjelas Gambar 1, ditunjukkan simulasi dalam potret fase mengenai bagaimana pengaruh parameter perlindungan mangsa dengan kasus daya dukung meningkat. Simulasi dilakukan dengan nilai parameter pada Tabel 2 dengan 3 kasus nilai parameter perlindungan mangsa berbeda yaitu  $m = 0, 1; 0, 5; 0, 9$  serta batas dukung yang digunakan adalah  $k_1 = 4, k_2 = 12$ . Potret fase dengan 3 kasus nilai  $m$  beserta penjelasannya disajikan pada Gambar 2.



Gambar 2. Potret fase dengan  $m=0.1$  dan kasus daya dukung meningkat( $k_2 > k_1$ )

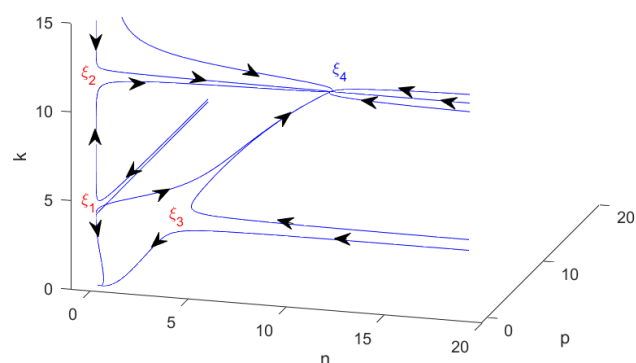
Gambar 2 menunjukkan kasus pertama pada saat perlindungan mangsa kecil  $m = 0, 1$  dan berada pada interval  $m = (0; 0, 37)$ , terdapat titik kesetimbangan kepunahan mangsa-pemangsa  $\xi_1 = (0, 0, k_1)$  dan  $\xi_2 = (0, 0, k_2)$ , titik kesetimbangan kepunahan pemangsa  $\xi_3 = (k_1, 0, k_1)$  dan  $\xi_4 = (k_2, 0, k_2)$ , serta titik kesetimbangan hidup berdampingan  $\xi_5 = (n^*, p^*, k_1)$  yang tidak stabil dan merupakan titik pelana. Kemudian untuk titik kesetimbangan hidup berdampingan  $\xi_6 = (n^*, p^*, k_2)$  tidak stabil namun terdapat *limit cycle* disekitar titik

$\xi_6$  yang artinya pertumbuhan populasi mangsa dan pemangsa tetap ada dan mengalami siklus yang berkala, seperti ditunjukkan pada Gambar 3.



Gambar 3. Potret fase dengan  $m=0.5$  dan kasus daya dukung meningkat ( $k_2 > k_1$ )

Gambar 3 menunjukkan kasus kedua pada saat perlindungan mangsa  $m = 0, 5$  yaitu berada pada interval  $m = (0, 37; 0, 8)$ , terdapat titik kesetimbangan kepunahan mangsa-pemangsa  $\xi_1 = (0, 0, k_1)$  dan  $\xi_2 = (0, 0, k_2)$ , titik kesetimbangan kepunahan pemangsa  $\xi_3 = (k_1, 0, k_1)$  dan  $\xi_4 = (k_2, 0, k_2)$ , serta titik kesetimbangan hidup berdampingan  $\xi_5 = (n^*, p^*, k_1)$  yang tidak stabil dan merupakan titik pelana. Kemudian untuk titik kesetimbangan hidup berdampingan  $\xi_6 = (n^*, p^*, k_2)$  stabil asimtotik dan merupakan titik spiral, seperti ditunjukkan pada Gambar 4.



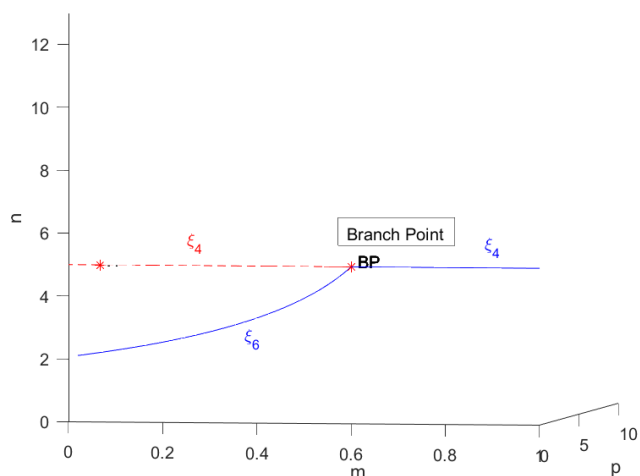
Gambar 4. Potret fase dengan  $m=0.9$  dan kasus daya dukung meningkat( $k_2 > k_1$ )

Gambar 4 menunjukkan kasus ketiga pada saat perlindungan mangsa besar  $m = 0, 9$  yaitu berada pada interval  $m = (0, 8; 1)$ , terdapat titik kesetimbangan kepunahan mangsa-pemangsa  $\xi_1 = (0, 0, k_1)$  dan  $\xi_2 = (0, 0, k_2)$ , serta titik kesetimbangan kepunahan pemangsa  $\xi_3 = (k_1, 0, k_1)$  yang tidak stabil dan merupakan titik pelana. Kemudian untuk titik kesetimbangan kepunahan pemangsa  $\xi_4 = (k_2, 0, k_2)$  stabil asimtotik dan merupakan titik simpul. Dengan perlindungan mangsa yang besar, jelas bahwa populasi pemangsa mengalami kepunahan karena populasi mangsa diberikan perlindungan yang besar sehingga pemangsa kesulitan untuk memangsa dan mendapat energi untuk hidup dan berkembang biak.

Simulasi selanjutnya dilakukan menggunakan nilai parameter pada Tabel 2 dan nilai parameter untuk kasus daya dukung menurun diasumsikan yaitu  $m = 0, 2; k_1 = 8; dan k_2 = 5$ . Ditemukan fakta bahwa sistem (6) mengalami perubahan kestabilan



atau bifurkasi yang ditunjukkan pada Gambar 5 untuk kasus daya dukung menurun. Kurva merah dan kurva biru menunjukkan keadaan tidak stabil dan stabil pada setiap titik kesetimbangan. Dengan BP menunjukkan titik terjadinya bifurkasi *Transcritical*.



**Gambar 5.** Bifurkasi dengan parameter  $m$  dan kasus daya dukung menurun ( $k_2 < k_1$ )

Gambar 5 menunjukkan terjadi bifurkasi *Transcritical* pada  $m = 0,6$ . Hal ini menunjukkan bahwa sistem mengalami perubahan kestabilan kepunahan pemangsa pada  $m = 0,6$ , atau dengan kata lain, terdapat titik kesetimbangan kepunahan pemangsa  $\xi_4 = (k_2, 0, k_2)$  yang stabil pada interval nilai parameter  $m = (0,6; 1)$  dan tidak stabil ketika  $m = (0; 0,6)$ . Kemudian terdapat titik kesetimbangan hidup berdampingan  $\xi_6 = (n^*, p^*, k_2)$  yang stabil pada interval nilai parameter  $m = (0; 0,6)$ .

Simulasi mengenai pengaruh parameter perlindungan mangsa dengan kasus daya dukung menurun dapat dilakukan dengan membagi menjadi 2 kasus nilai perlindungan mangsa  $m$ , yaitu pada interval  $m = (0; 0,6)$  dan  $m = (0,6; 1)$ . Secara kualitatif, penjelasan mengenai pengaruh parameter perlindungan mangsa dengan kasus daya dukung menurun sama dengan kasus daya dukung meningkat, yang ditampilkan pada Gambar 3 dan Gambar 4.

#### 4. Kesimpulan

Pada penelitian ini telah dilakukan pencarian titik kesetimbangan, analisis kestabilan, dan simulasi numerik sehingga diperoleh bahwa parameter perlindungan mangsa dan daya dukung variabel berpengaruh terhadap kestabilan sistem mangsa-pemangsa dengan fungsi respon *Beddington-DeAngelis* serta ditemukan adanya bifurkasi atau perubahan kestabilan pada nilai parameter perlindungan mangsa tertentu pada saat dilakukan simulasi numerik. Untuk kasus daya dukung meningkat ( $k_2 > k_1$ ), terdapat titik kesetimbangan kepunahan pemangsa  $\xi_4 = (k_2, 0, k_2)$  yang stabil untuk nilai parameter perlindungan mangsa yang besar yaitu pada rentang  $(0,8; 1)$ . Terdapat titik kesetimbangan hidup berdampingan  $\xi_6 = (n^*, p^*, k_2)$  yang stabil untuk nilai parameter perlindungan mangsa pada rentang  $(0,37; 0,8)$ . Untuk nilai parameter perlindungan mangsa yang kecil yaitu pada rentang  $(0; 0,37)$ , populasi mangsa dan pemangsa bersifat periodik atau terjadi fluktuasi dengan kata lain pertumbuhan populasi mangsa dan pemangsa mengalami siklus yang berkala. Untuk

kasus daya dukung menurun atau ( $k_2 < k_1$ ), sistem mencapai kesetimbangan kepunahan pemangsa yang stabil untuk nilai parameter perlindungan mangsa yang besar. Sistem juga mencapai kesetimbangan hidup berdampingan yang stabil untuk nilai parameter perlindungan mangsa pada rentang  $(0; 0,6)$ . Perlindungan mangsa memberikan dampak pada upaya konservasi populasi mangsa dan pemangsa. Ketika perlindungan mangsa kecil, akan terjadi fluktuasi atau naik turunnya pertumbuhan populasi mangsa dan pemangsa, keadaan tersebut lebih rentan oleh pengaruh eksternal seperti cuaca, jika cuaca tidak mendukung dapat mengakibatkan terjadinya kepunahan. Dengan adanya perlindungan mangsa yang lebih besar sistem dapat lebih stabil dan tidak mudah terganggu oleh faktor-faktor eksternal yang dapat menyebabkan kepunahan.

**Kontribusi Penulis.** Aisyiah Kholifatul Hanifah: Konseptualisasi, pengumpulan data, metodologi, analisis formal, investigasi, penulisan draft, dan visualisasi. Abadi: Konseptualisasi, validasi, penulisan pembahasan dan pengeditan, supervisi. Semua penulis telah membaca dan menyetujui versi manuskrip yang diterbitkan.

**Ucapan Terima Kasih.** Para penulis menyampaikan terima kasih kepada editor dan reviewer atas pembacaan yang cermat, kritik yang mendalam, dan rekomendasi yang praktis untuk meningkatkan kualitas tulisan ini.

**Pembiayaan.** Penelitian ini tidak menerima pembiayaan eksternal.

**Konflik Kepentingan.** Para penulis menyatakan tidak ada konflik kepentingan yang terkait dengan artikel ini.

#### Referensi

- [1] J. P. Tripathi, S. Abbas, and M. Thakur, "Dynamical analysis of a prey-predator model with Beddington-DeAngelis type function response incorporating a prey refuge," *Nonlinear Dyn.*, vol. 80, no. 1–2, pp. 177–196, 2014, doi: [10.1007/s11071-014-1859-2](https://doi.org/10.1007/s11071-014-1859-2).
- [2] S. Chakraborty, P. K. Tiwari, S. K. Sasmal, S. Biswas, S. Bhattacharya, and J. Chattopadhyay, "Interactive effects of prey refuge and additional food for predator in a diffusive predator-prey system," *Appl. Math. Model.*, vol. 47, pp. 128–140, 2017, doi: [10.1016/j.apm.2017.03.028](https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.03.028).
- [3] S. Samanta, R. Dhar, I. M. Elmojtaba, and J. Chattopadhyay, "The Role of Additional Food in A Predator-prey Model with A Prey Refuge," *J. Biol. Syst.*, vol. 24, no. 2–3, pp. 345–365, 2016, doi: [10.1142/S0218339016500182](https://doi.org/10.1142/S0218339016500182).
- [4] J. H. Connell, S. E. Monographs, N. Winter, and J. H. Connell, "A Predator-Prey System in the Marine Intertidal Region . I. Balanus glandula and Several Predatory Species of Thais," *Ecol. Soc. Am.*, vol. 40, no. 1, pp. 49–78, 1970.
- [5] N. Al-Salti, F. Al-Musalhi, V. Gandhi, M. Al-Moqbali, and I. Elmojtaba, "Dynamical analysis of a prey-predator model incorporating a prey refuge with variable carrying capacity," *Ecol. Model.*, vol. 45, no. July 2020, p. 100888, 2021, doi: [10.1016/j.ecocom.2020.100888](https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2020.100888).
- [6] E. González-Olivares and R. Ramos-Jiliberto, "Dynamic consequences of prey refuges in a simple model system: More prey, fewer predators and enhanced stability," *Ecol. Modell.*, vol. 166, no. 1–2, pp. 135–146, 2003, doi: [10.1016/S0304-3800\(03\)00131-5](https://doi.org/10.1016/S0304-3800(03)00131-5).
- [7] Y. Huang, F. Chen, and L. Zhong, "Stability analysis of a prey-predator model with holling type III response function incorporating a prey refuge," *Appl. Math. Comput.*, vol. 182, no. 1, pp. 672–683, 2006, doi: [10.1016/j.amc.2006.04.030](https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.04.030).
- [8] Z. Ma, S. Wang, W. Li, and Z. Li, "The effect of prey refuge in a patchy predator-prey system," *Math. Biosci.*, vol. 243, no. 1, pp. 126–130, 2013, doi: [10.1016/j.mbs.2013.02.011](https://doi.org/10.1016/j.mbs.2013.02.011).
- [9] D. Mukherjee, "The effect of refuge and immigration in a predator-prey system in the presence of a competitor for the prey," *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, vol. 31, pp. 277–287, 2016, doi: [10.1016/j.nonrwa.2016.02.004](https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2016.02.004).
- [10] A. Sih, "Prey refuges and predator-prey stability," *Theor. Popul. Biol.*, vol. 31, no. 1, pp. 1–12, 1987, doi: [10.1016/0040-5809\(87\)90019-0](https://doi.org/10.1016/0040-5809(87)90019-0).
- [11] N. M. S. Sundari and M. Valliathal, "Analysing a prey predator model for

- stability with prey refuge-stage structure on predator,” *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1139, no. 1, 2018, doi: [10.1088/1742-6596/1139/1/012016](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1139/1/012016).
- [12] M. Moustafa, M. H. Mohd, A. I. Ismail, and F. A. Abdullah, “Dynamical analysis of a fractional-order Rosenzweig–MacArthur model incorporating a prey refuge,” *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 109, pp. 1–13, 2018, doi: [10.1016/j.chaos.2018.02.008](https://doi.org/10.1016/j.chaos.2018.02.008).
- [13] M. K. A. Al-Moqbali, N. S. Al-Salti, and I. M. Elmojtaba, “Prey-predator models with variable carrying capacity,” *Mathematics*, vol. 6, no. 6, Jun. 2018, doi: [10.3390/math6060102](https://doi.org/10.3390/math6060102).
- [14] C. Ganguli, T. K. Kar, and P. K. Mondal, “Optimal harvesting of a prey-predator model with variable carrying capacity,” *Int. J. Biomath.*, vol. 10, no. 5, pp. 1–24, 2017, doi: [10.1142/S1793524517500693](https://doi.org/10.1142/S1793524517500693).
- [15] P. S. Meyer and J. H. Ausubel, “Carrying capacity: A model with logistically varying limits,” *Technol. Forecast. Soc. Change*, vol. 61, no. 3, pp. 209–214, 1999, doi: [10.1016/S0040-1625\(99\)00022-0](https://doi.org/10.1016/S0040-1625(99)00022-0).
- [16] C. S. Holling, “The Components of Predation as Revealed by a Study of Small-Mammal Predation of the European Pine Sawfly,” *Can. Entomol.*, vol. 91, no. 547, pp. 293–320, 1959, doi: [10.2351/1.5058368](https://doi.org/10.2351/1.5058368).
- [17] M. P. Hassell, “Mutual Interference between Searching Insect Parasites,” *J. Anim. Ecol.*, vol. 40, no. 2, p. 473, 1971, doi: [10.2307/3256](https://doi.org/10.2307/3256).
- [18] J. R. Beddington, “Mutual Interference Between Parasites or Predators and its Effect on Searching Efficiency,” *J. Anim. Ecol.*, vol. 44, no. 1, p. 331, 1975, doi: [10.2307/3866](https://doi.org/10.2307/3866).
- [19] D. L. DeAngelis, R. A. Goldstein, and R. V. O’Neill, “A Model for Tropic Interaction,” *Ecology*, vol. 56, no. 4, pp. 881–892, 1975, doi: [10.2307/1936298](https://doi.org/10.2307/1936298).
- [20] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, and D. B. Meade, *Elementary differential equations and boundary value problems*, 12th Edition. John Wiley & Sons, 2021.
- [21] L. Perko, *Equations and Dynamical Systems*. New York: Springer, 2001, doi: [10.1007/978-1-4613-0003-8](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0003-8).