RESEARCH ARTICLE • OPEN ACCESS

Koreksi pada artikel Hayati dkk.: Teori Titik Tetap untuk Tipe Kannan yang Diperumum dalam Ruang b-Metrik Modular Lengkap

Afifah Hayati dan Noor Sofiyati

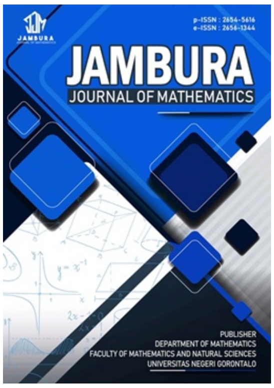
JAMBURA
JOURNAL OF MATHEMATICS

Volume 6, Issue 2, Pages 182–186, August 2024

Diterima 4 Juli 2024, Direvisi 18 Juli 2024, Disetujui 22 Juli 2024, Diterbitkan 1 Agustus 2024

To Cite this Article : A. Hayati dan N. Sofiyati,"Koreksi pada artikel Hayati dkk.: Teori Titik Tetap untuk Tipe Kannan yang Diperumum dalam Ruang b-Metrik Modular Lengkap", *Jambura J. Math*, vol. 6, no. 2, pp. 182–186, 2024, https://doi.org/10.37905/jjom.v6i2.26441

JOURNAL INFO • JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS

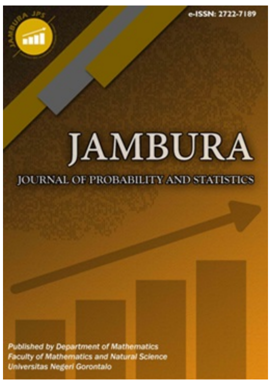


Homepage	:	http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/index
Journal Abbreviation	:	Jambura J. Math.
Frequency	:	Biannual (February and August)
Publication Language	:	English (preferable), Indonesia
DOI	:	https://doi.org/10.37905/jjom
Online ISSN	:	2656-1344
Editor-in-Chief	:	Hasan S. Panigoro
Publisher	:	Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo
Country	:	Indonesia
OAI Address	:	http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/oai
Google Scholar ID	:	iWLjgaUAAAAJ
Email	:	info.jjom@ung.ac.id

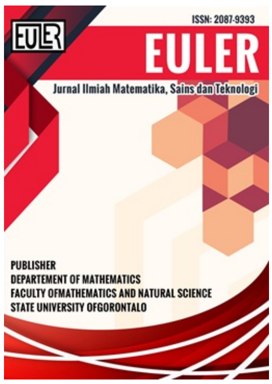
JAMBURA JOURNAL • FIND OUR OTHER JOURNALS

Jambura Journal of Biomathematics

Jambura Journal of Mathematics Education



Jambura Journal of Probability and Statistics



EULER : Jurnal Ilmiah Matematika, Sains, dan Teknologi

Jambura Journal of Mathematics, Volume 6, Issue 2, Pages 182–186, August 2024 https://doi.org/10.37905/jjom.v6i2.26441

Research Article

Check for updates

Koreksi pada artikel Hayati dkk.: Teori Titik Tetap untuk Tipe Kannan yang Diperumum dalam Ruang b-Metrik Modular Lengkap

Afifah Hayati[1,*] **dan Noor Sofiyati**[1]

[1] *Program Studi Matematika, Universitas Nahdlatul Ulama Purwokerto, Purwokerto, Indonesia*

ARTICLE HISTORY
Diterima 4 Juli 2024
Direvisi 18 Juli 2024
Disetujui 22 Juli 2024
Diterbitkan 1 Agustus 2024

KATA KUNCI
Ruang b-Metrik Modular
Fungsi *Altering Distance*
Pemetaan Tipe Kannan

KEYWORDS
Modular b-Metric Spaces
Altering Distance Function
Kannan Type Mappings

ABSTRAK. *Artikel ini merupakan komentar untuk penelitian yang dilakukan oleh Hayati dkk. yang telah dipublikasikan pada Jambura Journal of Mathematics volume 5 nomor 2 tahun 2023. Diperoleh bahwa terjadi kesalahan dalam proses pembuktian teorema titik tetap untuk pemetaan tipe Kannan yang diperumum dalam ruang b-metrik modular. Kesalahan tersebut menjadikan eksistensi titik tetap dalam teorema tersebut tidak terjamin. Dengan menambahkan sifat konveks untuk b-metrik modular, teorema titik tetap tersebut tetap berlaku.*

ABSTRACT. *This article is a commentary on research that is conducted by Hayati et al. which was published in Jambura Journal of Mathematics volume 5 number 2 in 2023. It was found that there is an error occurred in the process of proving the fixed point theorems for generalized Kannan type mappings in modular b-metric spaces. This error makes the existence of the fixed point in the theorem is not valid. By adding the convex property to the modular b-metric, the fixed point theorems still holds.*

1. Pendahuluan

Teorema titik tetap yang berkembang pesat saat ini merupakan perumuman dari prinsip kontraksi Banach yang memberikan teorema titik tetap untuk pemetaan kontraksi dalam ruang metrik [1, 2]. Beberapa faktor yang mempengaruhi pengembangan tersebut adalah munculnya berbagai perumuman dari pemetaan kontraksi dan perumuman dari ruang yang strukturnya lebih umum dari ruang metrik. Salah satu perumuman dari pemetaan kontraksi diberikan oleh Kannan pada tahun 1969 dan dikenal sebagai pemetaan Kannan [3]. Selanjutnya, berbagai pengembangan teorema titik tetap untuk pemetaan tipe Kannan di ruang metrik diberikan oleh Górnicki [4]. Lebih lanjut, beberapa perumuman dari ruang metrik adalah ruang b-metrik yang diperkenalkan oleh Czerwik pada tahun 1993 [5], ruang metrik modular yang diperkenalkan oleh Chistyakov [6], dan ruang b-metrik modular yang diperkenalkan oleh Ege dan Alaca [7]. Pengembangan dari teorema titik tetap yang diberikan oleh Górnicki dikembangkan ke dalam ruang b-metrik modular menggunakan fungsi *subaddtive altering distance* oleh Haokip dan Goswami [8]. Selain itu, berbagai penelitian baik untuk yang ruang lebih umum dari ruang metrik maupun pemetaan yang lebih umum dari pemetaan kontraksi telah dilakukan sebelumnya seperti yang terdapat pada [9–13].

Pengembangan teorema titik tetap juga dilakukan oleh Hayati dkk. [14] ke dalam ruang b-metric modular. Namun, dalam pembuktian teorema titik tetap yang dilakukan, terdapat kesalahan pembuktian yang menyebabkan eksistensi titik tetap tidak terjamin. Oleh karena itu, dalam artikel ini, diberikan koreksi pada proses pembuktian tersebut dengan menambahkan syarat sifat konveks pada b-metrik modularnya.

2. Metode

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Penelitian dilakukan dengan mengoreksi kesalahan pada teorema titik tetap untuk pemetaan tipe Kannan yang diperumum di ruang b-metrik modular yang dikerjakan oleh Hayati dkk. [14]. Dalam proses pembuktian yang dilakukan, ditemukan kesalahan dimana salah satu pertidaksamaan yang dijabarkan dalam proses pembuktian seharusnya tidak berlaku. Diperlukan kondisi tambahan untuk b-metrik modular, yaitu sifat konveks pada b-metrik modular, agar eksistensi titik tetap dalam teorema tersebut tetap terjamin.

3. Hasil dan Pembahasan

Sebelum memberi perbaikan pembuktian, perlu diingat kembali definisi ruang b-metrik modular yang diberikan oleh Ege dan Alaca [7] sebagai berikut.

Definisi 1. Diketahui X himpunan tak kosong dan $s \in \mathbb{R}$ dengan $s \geq 1$. Pemetaan $\nu : (0, \infty) \times X \times X \to [0, \infty]$ disebut b-metrik modular jika untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi aksioma-aksioma berikut:

*Penulis Korespondensi.

Email : *afifahhayati.mail@gmail.com* (A. Hayati)
Homepage : http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/index / E-ISSN : 2656-1344

1. $\nu_\lambda(x,y) = 0$, untuk setiap $\lambda > 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $\nu_\lambda(x,y) = \nu_\lambda(x,y)$, untuk setiap $\lambda > 0$, dan
3. $\nu_{\lambda+\mu}(x,y) \le s\ [\nu_\lambda(x,z) + \nu_\lambda(z,y)]$, untuk setiap $\lambda,\mu > 0$.

Selanjutnya, pasangan (X,ν) disebut ruang b-metrik modular. Lebih lanjut, didefinisikan pula himpunan bagian $X_\nu^* = x \in X\ : \exists\lambda = \lambda(x) > 0$ sehingga $\nu_\lambda(x,x_0) < \infty$, untuk suatu $x_0 \in X$.

Selain itu, diberikan konsep barisan di dalam ruang b-metrik modular yang merujuk pada Ege dan Alaca[7]. Akan tetapi, pendefinisian barisan Cauchy di dalam ruang b-metrik modular yang diberikan oleh Ege dan Alaca [7] berbeda dengan pendefinisian barisan Cauchy di dalam artikel yang diberikan oleh Hayati dkk. [14]. Konsep barisan konvergen, barisan Cauchy, dan ruang b-metrik modular lengkap serupa dengan konsep barisan yang diberikan oleh Büyükkaya dan Öztürk [15].

Definisi 2. Diketahui (X,ν) ruang b-metrik modular.
1. Barisan x_n di dalam X_ν^* dikatakan konvergen-ν ke $x \in X_\nu^*$ jika untuk setiap $\lambda > 0$ berlaku $\nu_\lambda(x_n,x) \to 0$, untuk $n \to \infty$.
2. Barisan x_n di dalam X_ν^* disebut barisan Cauchy-ν ke $x \in X_\nu^*$ jika untuk setiap $\lambda > 0$ berlaku $\nu_\lambda(x_n,x_m) \to 0$, untuk $n,m \to \infty$.
3. Ruang b-metrik modular X_ν^* dikatakan lengkap-ν jika setiap barisan Cauchy-ν di dalam X_ν^* konvergen-ν dan limitnya di dalam X_ν^*.

Teorema titik tetap untuk pemetaan tipe Kannan yang diberikan oleh Hayati dkk. [14] menggunakan fungsi *subadditive altering distance* yang diberikan oleh Khan dkk. [16, 17].

Definisi 3. Fungsi $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ disebut fungsi *subadditive altering distance* jika
1. Fungsi ϕ kontinu,
2. Fungsi ϕ naik tegas,
3. $\phi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$, dan
4. $\phi(x+y) \le \phi(x) + \phi(y)$, untuk setiap $x,y \in [0,\infty)$.

Dalam pembuktian teorema titik tetap tersebut, digunakan dua sifat dari fungsi *subadditive* yang diberikan oleh Corazza [18] dan Hayati dkk. [14].

Sifat 1. [18] Jika $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *subaddtive*, maka untuk setiap bilangan bulat positif n dan $x \in [0,\infty)$ berlaku

$$\phi(nx) \le n\phi(x) \tag{1}$$

Bukti. Pembuktian dapat dilihat dalam artikel Hayati dkk. [14]. □

Sifat 2. [14] Diberikan $\lambda > 0$, b-metrik modular ν pada X, dan ruang b-metrik modular X_ν^*. Jika $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *subadditive*, maka untuk setiap $k \in (0,1)$ dan $x,y \in X_\nu^*$ dengan

$$\phi(\nu_\lambda(x,y)) \le k\,\phi(\nu_\lambda(a,b)), \text{ untuk suatu } a,b \in X_\nu^*, \tag{2}$$

berakibat

$$\nu_\lambda(x,y) \le k'\nu_\lambda(a,b), \text{ untuk suatu } k' \in (0,1). \tag{3}$$

Bukti. Pembuktian dapat dilihat dalam artikel Hayati dkk. [14]. □

Dalam proses pembuktian yang diberikan, Hayati dkk. [14] menuliskan bahwa untuk $x_0 \in X_\nu^*$ dan barisan x_n dengan

$$x_{n+1} = Tx_n,\ n = 0,1,2,\ldots$$

berakibat untuk setiap $m,n \in \mathbb{N}$ dengan $m > n$ berlaku

$$\begin{aligned}\nu_\lambda(x_n,x_m) \le s\,\nu_\lambda(x_n,x_{n+1}) + s^2\nu_\lambda(x_{n+1},x_{n+2}) + \ldots \\ + s^{m-n}\nu_\lambda(x_{m-1},x_m).\end{aligned} \tag{4}$$

Pertidaksamaan (4) seharunya tidak berlaku berdasarkan aksioma 3 pada Definisi 1. Agar teorema tetap tersebut berlaku, perlu ditambahkan sifat konveks pada suatu b-metrik modular. Chistyakov [6] memberikan definisi sifat konveks yang melekat pada suatu metrik modular. Berdasarkan hal tersebut, diberikan sifat konveks yang melekat pada suatu b-metrik modular.

Definisi 4. Diberikan ruang b-metrik modular (X,ν). Suatu b-metric modular ν dikatakan konveks-ν jika untuk setiap $x,y,z \in X$ dan $\lambda,\mu > 0$ berlaku

$$\nu_{\lambda+\mu}(x,y) \le s\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\nu_\lambda(x,z) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\nu_\mu(z,y)\right) \tag{5}$$

Lebih lanjut, secara khusus, untuk setiap $\lambda > 0$ dan $x,y,z \in X$ berlaku

$$\begin{aligned}\nu_\lambda(x,y) &= \nu_{\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{2}}(x,y) \\ &\le s\left(\frac{\frac{\lambda}{2}}{\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{2}}\nu_\lambda(x,z) + \frac{\frac{\lambda}{2}}{\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{2}}\nu_\mu(z,y)\right) \\ &\Leftrightarrow \nu_\lambda(x,y) \le s\left(\frac{\frac{\lambda}{2}}{\lambda}\nu_\lambda(x,z) + \frac{\frac{\lambda}{2}}{\lambda}\nu_\mu(z,y)\right) \\ &\Leftrightarrow \nu_\lambda(x,y) \le s\left(\frac{1}{2}\nu_\lambda(x,z) + \frac{1}{2}\nu_\mu(z,y)\right).\end{aligned} \tag{6}$$

Dengan demikian, terorema titik tetap untuk pemetaan tipe Kannan yang diperumum dalam ruang b-metrik modular adalah sebagai berikut.

Teorema 1. *Diberikan $\lambda > 0$, b-metrik modular ν pada X yang konveks-ν, dan X_ν^* lengkap-ν dengan koefisien $s \ge 1$. Jika $T : X_\nu^* \to X_\nu^*$ pemetaan tipe Kannan-ν_λ yang diperumum, yaitu* *terdapat $p \in \left(0, \frac{1}{2s+1}\right)$ dan fungsi subadditive altering distance ϕ yang memenuhi*

$$\phi\left(\nu_\lambda\left(Tx, Ty\right)\right) \leq p\left\{\phi\left(\nu_\lambda\left(x, y\right)\right) + \phi\left(\nu_\lambda\left(x, Tx\right)\right) + \phi\left(\nu_\lambda(y, Ty)\right)\right\} \tag{7}$$

untuk setiap $x, y \in X_\nu^*$, maka T mempunyai titik tetap $z \in X$ dan untuk setiap $x \in X_\nu^*$, barisan $T^n x$ konvergen-ν ke z dan untuk $q = \frac{2p}{1-p} < 1$,

$$\nu_\lambda\left(T^{n+1}x, T^n x\right) \leq q^n\, \nu_\lambda\left(x, Tx\right), \ n = 0, 1, 2, \dots \tag{8}$$

Bukti. Proses pembuktian dibagi menjadi tiga bagian, yaitu akan ditunjukkan bahwa:

1. T mempunyai titik tetap z,
2. z Tunggal, dan
3. untuk setiap $x \in X_\nu^*$, barisan $T^n x$ konverge-ν ke z dan untuk $q = \frac{2p}{1-p} < 1$ berlaku

$$\nu_\lambda\left(T^{n+1}x, T^n x\right) \leq q^n\, \nu_\lambda\left(x, Tx\right), \ n = 0, 1, 2, \dots$$

Kesalahan terjadi dalam proses pembuktian poin 1. Sedangkan pembuktian poin 2 dan 3 sudah tepat. Berikut ini perbaikan dalam pembuktian poin 1.

Akan ditunjukkan bahwa T mempunyai titik tetap z. Diambil sebarang $x \in X_\nu^*$ dan diambil $u = Tx$. Telah dibuktikan bahwa

$$\phi\left(\nu_\lambda\left(u, Tu\right)\right) \leq \frac{2p}{1-p}\, \phi\left(\nu_\lambda\left(x, Tx\right)\right). \tag{9}$$

Selanjutnya, untuk $q = \frac{2p}{1-p}$, diperoleh

$$\phi\left(\nu_\lambda\left(u, Tu\right)\right) \leq q\, \phi\left(\nu_\lambda\left(x, Tx\right)\right) \text{ dengan } q < 1, \tag{10}$$

sehingga menurut Sifat 2, berakibat

$$\nu_\lambda\left(u, Tu\right) \leq q' \nu_\lambda\left(x, Tx\right), \text{ untuk suatu } q' < 1. \tag{11}$$

Tanpa mengurangi arti, diasumsikan bahwa $q' = q$.

Selanjutnya, diambil sebarang $x_0 \in X$. Dibentuk barisan x_n dengan

$$x_{n+1} = Tx_n, \ n = 0, 1, 2, \dots.$$

Dapat dibuktikan bahwa untuk setiap $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dengan $m > n$ berlaku

$$\nu_\lambda\left(x_n, x_m\right) \leq \frac{s}{2}\nu_\lambda\left(x_n, x_{n+1}\right) + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \nu_\lambda\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right) + \dots + \left(\frac{s}{2}\right)^{m-n} \nu_\lambda\left(x_{m-1}, x_m\right). \tag{12}$$

Perlu diingat bahwa ν konveks-ν. Jika $m - n = 1$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}\nu_\lambda\left(x_n, x_{n+1}\right) &\leq \frac{s}{2}\left[\nu_\lambda\left(x_n, x_n\right) + \nu_\lambda\left(x_n, x_{n+1}\right)\right] \\ &= \frac{s}{2}\, \nu_\lambda\left(x_n, x_{n+1}\right).\end{aligned}$$

Jika $m - n = 2$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}\nu_\lambda\left(x_n, x_{n+2}\right) &\leq \frac{s}{2}\left[\nu_\lambda\left(x_n, x_{n+1}\right) + \nu_\lambda\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right)\right] \\ &\leq \frac{s}{2}\left[\nu_\lambda\left(x_n, x_{n+1}\right) + \frac{s}{2}\left[\nu_\lambda\left(x_{n+1}, x_{n+1}\right) + \nu_\lambda\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right)\right]\right] \\ &= \frac{s}{2}\, \nu_\lambda\left(x_n, x_{n+1}\right) + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \nu_\lambda\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right).\end{aligned}$$

Jika $m - n = 3$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}\nu_\lambda\left(x_n, x_{n+3}\right) &\leq \frac{s}{2}\left[\nu_\lambda\left(x_n, x_{n+1}\right) + \nu_\lambda\left(x_{n+1}, x_{n+3}\right)\right] \\ &\leq \frac{s}{2}\left[\nu_\lambda\left(x_n, x_{n+1}\right) + \frac{s}{2}\left[\nu_\lambda\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right) + \nu_\lambda\left(x_{n+2}, x_{n+3}\right)\right]\right] \\ &= \frac{s}{2}\, \nu_\lambda\left(x_n, x_{n+1}\right) + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \nu_\lambda\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right) \\ &\quad + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \nu_\lambda\left(x_{n+2}, x_{n+3}\right) \\ &\leq \frac{s}{2}\, \nu_\lambda\left(x_n, x_{n+1}\right) + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \nu_\lambda\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right) \\ &\quad + \left(\frac{s}{2}\right)^3 \left[\nu_\lambda\left(x_{n+2}, x_{n+2}\right) + \nu_\lambda\left(x_{n+2}, x_{n+3}\right)\right] \\ &= \frac{s}{2}\, \nu_\lambda\left(x_n, x_{n+1}\right) + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \nu_\lambda\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right) \\ &\quad + \left(\frac{s}{2}\right)^3 \nu_\lambda\left(x_{n+2}, x_{n+3}\right).\end{aligned}$$

Jika proses dilanjutkan, maka untuk setiap $m, n \in \mathbb{N} \cup 0$ dengan $m > n$, berlaku

$$\nu_\lambda\left(x_n, x_m\right) \leq \frac{s}{2}\, \nu_\lambda\left(x_n, x_{n+1}\right) + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \nu_\lambda\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right) + \dots + \left(\frac{s}{2}\right)^{m-n} \nu_\lambda\left(x_{m-1}, x_m\right).$$

Selanjutnya, diperhatikan bahwa untuk $n = 0, 1, 2, \dots$ berlaku $x_{n+1} = Tx_n$. Dalam pembuktian yang diberikan oleh Hayati dkk. [14], telah ditunjukkan bahwa untuk $n = 0, 1, 2, \dots$ berlaku

$$\nu_\lambda\left(x_n, x_{n+1}\right) \leq q^n\, \nu_\lambda\left(x_0, Tx_0\right). \tag{13}$$

Berdasarkan Pertidaksamaan (12) dan (13), diperoleh untuk setiap $m, n \in \mathbb{N} \cup 0$ dengan $m > n$ berlaku

$$\begin{aligned}\nu_\lambda\left(x_n, x_m\right) &\leq \frac{s}{2}\, \nu_\lambda\left(x_n, x_{n+1}\right) + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \nu_\lambda\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{s}{2}\right)^{m-n} \nu_\lambda\left(x_{m-1}, x_m\right) \\ &\leq \frac{s}{2} q^n\, \nu_\lambda\left(x_0, Tx_0\right) + \left(\frac{s}{2}\right)^2 q^{n+1}\, \nu_\lambda\left(x_0, Tx_0\right) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{s}{2}\right)^{m-n} q^{m-1} \nu_\lambda\left(x_0, Tx_0\right) \\ &= q^{n-1}\, \nu_\lambda\left(x_0, Tx_0\right) \frac{sq}{2} + q^{n-1}\, \nu_\lambda\left(x_0, Tx_0\right) \left(\frac{sq}{2}\right)^2 + \dots \\ &\quad + q^{n-1} \nu_\lambda\left(x_0, Tx_0\right) \left(\frac{sq}{2}\right)^{m-n} \\ &= q^{n-1}\, \nu_\lambda\left(x_0, Tx_0\right) \left(\frac{sq}{2} + \left(\frac{sq}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{sq}{2}\right)^{m-n}\right) \\ &\leq q^{n-1} \nu_\lambda\left(x_0, Tx_0\right) \\ &\quad \left(\frac{sq}{2} + \left(\frac{sq}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{sq}{2}\right)^{m-n} + \left(\frac{sq}{2}\right)^{m-n+1} + \dots + \left(\frac{sq}{2}\right)^{m}\right) \\ &= q^{n-1}\, \nu_\lambda\left(x_0, Tx_0\right) \left(\frac{sq}{2} + \left(\frac{sq}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{sq}{2}\right)^{m}\right).\end{aligned}$$

Diperhatikan bahwa $p < \frac{1}{2s+1} \Leftrightarrow 2sp+p < 1 \Leftrightarrow 2sp < 1-p \Leftrightarrow \frac{2sp}{1-p} < 1$ dan $q = \frac{2p}{1-p} < 1$, maka $0 < \frac{sq}{2} < sq = \frac{2sp}{1-p} < 1$. Akibatnya, karena $0 < \frac{sq}{2} < 1$, maka untuk $m \to \infty$, diperoleh

$$\frac{sq}{2} + \left(\frac{sq}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{sq}{2}\right)^m \to \frac{\frac{sq}{2}}{1-\frac{sq}{2}} = \frac{sq}{2-sq}$$

sehingga untuk $m \to \infty$ diperoleh

$$\begin{aligned}\nu_\lambda\left(x_n, x_m\right) &\leq q^{n-1}\, \nu_\lambda\left(x_0, Tx_0\right)\left(\frac{sq}{2} + \left(\frac{sq}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{sq}{2}\right)^m\right)\\ &\to q^{n-1}\, \nu_\lambda\left(x_0, Tx_0\right)\frac{sq}{2-sq}\\ &= \frac{s\, q^n}{2-sq}\, \nu_\lambda\left(x_0, Tx_0\right).\end{aligned}$$

Lebih lanjut, karena $0 < q < 1$, maka untuk $n \to \infty$ berlaku $q^n \to 0$. Akibatnya, untuk $n, m \to \infty$ berlaku

$$\nu_\lambda\left(x_n, x_m\right) \to 0.$$

Dengan kata lain, barisan x_n merupakan barisan Cauchy-ν di dalam X_ν^*. Karena X_ν^* lengkap-ν, maka terdapat $x \in X_\nu^*$ sehingga untuk $n \to \infty$ berlaku

$$\nu_\lambda\left(x_n, z\right) \to 0.$$

Selanjutnya, diperhatikan bahwa untuk setiap $n \in N$ berlaku

$$\begin{aligned}\nu_\lambda\left(Tz, z\right) &\leq \frac{s}{2}\left[\nu_\lambda\left(Tz, Tx_n\right) + \nu_\lambda\left(Tx_n, z\right)\right]\\ &\leq \frac{s}{2}\left[\nu_\lambda\left(Tz, Tx_n\right) + \frac{s}{2}\left[\nu_\lambda\left(Tx_n, x_n\right) + \nu_\lambda\left(x_n, z\right)\right]\right]\\ &= \frac{s}{2}\,\nu_\lambda\left(Tz, Tx_n\right) + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \nu_\lambda\left(Tx_n, x_n\right)\\ &\quad + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \nu_\lambda\left(x_n, z\right).\end{aligned}$$

Tanpa mengurangi arti, diambil $s \geq 2$ dan $\frac{s}{2}$ bilangan asli sehingga menurut Sifat 1, diperoleh

$$\begin{aligned}\phi\left(\nu_\lambda\left(Tz, z\right)\right) &\leq \phi\left(\frac{s}{2}\,\nu_\lambda\left(Tz, Tx_n\right) + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \nu_\lambda\left(Tx_n, x_n\right)\right.\\ &\qquad\left. + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \nu_\lambda\left(x_n, z\right)\right)\\ &\leq \phi\left(\frac{s}{2}\,\nu_\lambda\left(Tz, Tx_n\right)\right) + \phi\left(\left(\frac{s}{2}\right)^2 \nu_\lambda\left(Tx_n, x_n\right)\right)\\ &\quad + \phi\left(\left(\frac{s}{2}\right)^2 \nu_\lambda\left(x_n, z\right)\right)\\ &\leq \frac{s}{2}\,\phi\left(\nu_\lambda\left(Tz, Tx_n\right)\right) + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \phi\left(\nu_\lambda\left(Tx_n, x_n\right)\right)\\ &\quad + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \phi\left(\nu_\lambda\left(x_n, z\right)\right).\end{aligned}$$

Karena T pemetaan tipe Kannan-ν_λ yang diperumum, maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\begin{aligned}\phi\left(\nu_\lambda\left(Tz, z\right)\right) &\leq \frac{s}{2}\,\phi\left(\nu_\lambda\left(Tz, Tx_n\right)\right) + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \phi\left(\nu_\lambda\left(Tx_n, x_n\right)\right)\\ &\quad + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \phi\left(\nu_\lambda\left(x_n, z\right)\right)\\ &\leq \frac{sp}{2}\,\left\{\phi\left(\nu_\lambda\left(z, x_n\right)\right) + \phi\left(\nu_\lambda\left(z, Tz\right)\right)\right.\\ &\quad\left. + \phi\left(\nu_\lambda\left(x_n, Tx_n\right)\right)\right\}\\ &\quad + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \phi\left(\nu_\lambda\left(Tx_n, x_n\right)\right) + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \phi\left(\nu_\lambda\left(x_n, z\right)\right).\end{aligned}$$

sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\begin{aligned}\phi\left(\nu_\lambda\left(Tz, z\right)\right) - \frac{sp}{2}\,\phi\left(\nu_\lambda\left(Tz, z\right)\right) &\leq \left(\frac{sp}{2} + \left(\frac{s}{2}\right)^2\right)\phi\left(\nu_\lambda\left(z, x_n\right)\right)\\ &\quad + \left(\frac{sp}{2} + \left(\frac{s}{2}\right)^2\right)\phi\left(\nu_\lambda\left(x_n, Tx_n\right)\right)\\ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{sp}{2}\right)\phi\left(\nu_\lambda\left(Tz, z\right)\right) &\leq \left(\frac{sp}{2} + \left(\frac{s}{2}\right)^2\right)\left(\phi\left(\nu_\lambda\left(z, x_n\right)\right)\right.\\ &\quad\left. + \phi\left(\nu_\lambda\left(x_n, Tx_n\right)\right)\right)\\ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{sp}{2}\right)\phi\left(\nu_\lambda\left(Tz, z\right)\right) &\leq \left(\frac{sp}{2} + \left(\frac{s}{2}\right)^2\right)\left(\phi\left(\nu_\lambda\left(z, x_n\right)\right)\right.\\ &\quad\left. + \phi\left(q^n\, \nu_\lambda(Tx_0, x_0)\right)\right).\end{aligned}$$

Diperhatikan bahwa untuk $n \to \infty$ berlaku $\nu_\lambda\left(z, x_n\right) \to 0$ serta ϕ kontinu dan $\phi\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow t = 0$, maka untuk $n \to \infty$ berlaku

$$\phi\left(\nu_\lambda\left(z, x_n\right)\right) \to 0.$$

Karena $0 < q < 1$, ϕ kontinu, dan $\phi\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow t = 0$, maka untuk

$$\phi\left(q^n\, \nu_\lambda\left(Tx_0, x_0\right)\right) \to 0.$$

Akibatnya, untuk $n \to \infty$ berlaku

$$\left(1 - \frac{sp}{2}\right)\phi\left(\nu_\lambda\left(Tz, z\right)\right) \to 0.$$

Dengan demikian, diperoleh $\left(1 - \frac{sp}{2}\right)\phi\left(\nu_\lambda\left(Tz, z\right)\right) = 0$. Selanjutnya, diperhatikan bahwa $p < \frac{1}{2s+1} < \frac{1}{2s}$. Karena $p < \frac{1}{2s}$, maka $sp < \frac{1}{2}$ sehingga $\frac{sp}{2} < \frac{1}{4} < 1$. Karena $1 - \frac{sp}{2} \neq 0$, maka $\phi\left(\nu_\lambda\left(Tz, z\right)\right) = 0$. Lebih lanjut, karena $\phi\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow t = 0$, maka $\nu_\lambda\left(Tz, z\right) = 0$. Jadi, diperoleh $Tz = z$. □

Beberapa akibat dari perbaikan Teorema 1 adalah sebagai berikut.

Akibat 1. *Diberikan $\lambda > 0$, b-metrik modular ν pada X yang konveks-ν, dan ruang b-metrik modular lengkap X_ν^* dengan koefisien $s \geq 1$. Jika $T : X_\nu^* \to X_\nu^*$ pemetaan yang memenuhi*

$$\nu_\lambda\left(Tx, Ty\right) \leq p\left\{\nu_\lambda\left(x, y\right) + \nu_\lambda\left(x, Tx\right) + \nu_\lambda\left(y, Ty\right)\right\}$$

untuk setiap $x, y \in X_\nu^*$ dengan $p < \frac{1}{2s+1}$, maka T mempunyai titik tetap tunggal $z \in X_\nu^*$ dan untuk setiap $x_0 \in X_\nu^*$, barisan $T^n x_0$ konvergen ke z.

Bukti. Pembuktian sama dengan pembuktian yang diberikan oleh Hayati dkk. [14]. □

Akibat 2. *Diberikan $\lambda > 0$, b-metrik modular ν pada X yang konveks-ν, dan ruang b-metrik modular lengkap X_ν^* dengan koefisien $s \geq 1$. Jika $T : X_\nu^* \to X_\nu^*$ pemetaan kontinu yang memenuhi sifat terdapat fungsi subadditive altering distance ϕ dan $p < \frac{1}{2s+1}$ sehingga untuk setiap $x, y \in X_\nu^*$ dan untuk suatu $k \in N$ berlaku*

$$\phi\left(\nu_\lambda\left(T^k x, T^k y\right)\right) \leq p\left\{\phi\left(\nu_\lambda(x,y)\right) + \phi\left(\nu_\lambda\left(x, T^k x\right)\right) + \phi\left(\nu_\lambda\left(y, T^k y\right)\right)\right\}$$

dan $T^k x = x$, maka T mempunyai titik tetap tunggal.

Bukti. Pembuktian sama dengan pembuktian yang diberikan oleh Hayati dkk. [14]. □

Akibat 3. *Diberikan $\lambda > 0$, b-metrik modular ν pada X yang konveks-ν, dan ruang b-metrik modular lengkap X_ν^* dengan koefisien $s \geq 1$. Jika $T : X_\nu^* \to X_\nu^*$ suatu pemetaan yang memenuhi terdapat $p < \frac{1}{2s+1}$ sehingga untuk setiap $x, y \in X_\nu^*$ berlaku*

$$\{1 + \nu_\lambda(Tx, Ty)\}^{\frac{1}{p}} < (1 + \nu_\lambda(x,y))(1 + \nu_\lambda(x, Tx))(1 + \nu_\lambda(y, Ty)),$$

maka T mempunyai titik tetap tunggal $z \in X_\nu^*$ dan untuk setiap $x \in X_\nu^*$, barisan $T^n x$ konvergen ke z serta untuk $q = \frac{2p}{1-p}$ berlaku

$$\nu_\lambda\left(T^{n+1}x, T^n x\right) \leq q^n\, \nu_\lambda(x, Tx),\ n = 1, 2, \ldots.$$

Bukti. Pembuktian sama dengan pembuktian yang diberikan oleh Hayati dkk. [14]. □

4. Kesimpulan

Kesalahan pada pembuktian teorema titik tetap untuk pemetaan tipe Kannan yang diperumum di ruang b-metrik modular telah dikoreksi. Teorema berlaku dengan menambahkan syarat sifat konveks yang dipenuhi oleh b-metrik modularnya. Syarat tersebut juga perlu ditambahkan untuk akibat-akibat dari teorema titik tetap tersebut agar akibat-akibat tersebut tetap berlaku. Oleh karena itu, dalam penelitian selanjutnya mengenai pengembangan teorema titik tetap untuk pemetaan tipe Kannan menggunakan fungsi *subadditive altering distance* di ruang b-metrik modular maupun ruang yang lebih umum perlu mempertimbangkan sifat konveks untuk menjamin eksistensi titik tetapnya.

Kontribusi Penulis. **Afifah Hayati:** Konseptualisasi, metodologi, analisis formal, penulisan — persiapan draf awal. **Noor Sofiyati:** Penulisan — tinjauan dan penyuntingan, visualisasi, supervisi. Semua penulis telah membaca dan menyetujui versi manuskrip yang diterbitkan.

Ucapan Terima Kasih. Para penulis menyampaikan terima kasih kepada editor dan reviewer atas pembacaan yang cermat, kritik yang mendalam, dan rekomendasi yang praktis untuk meningkatkan kualitas tulisan ini.

Pembiayaan. Penelitian ini tidak menerima pembiayaan eksternal.

Konflik Kepentingan. Para penulis menyatakan tidak ada konflik kepentingan yang terkait dengan artikel ini.

Referensi

[1] S. Banach, "Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales," *Fundamenta mathematicae*, vol. 3, no. 1, pp. 133–181, 1922. [Online]. Available: http://eudml.org/doc/213289.

[2] R. P. Agarwal, M. Mehan, and D. O'Regan, *Fixed Point Theory and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[3] R. Kannan, "Some Results on Fixed Points-II," *The American Mathematical Monthly*, vol. 76, no. 4, pp. 405–408, 1969. [Online]. Available: http://www.jstor.org/stable/2316437.

[4] J. Górnicki, "Fixed point theorems for Kannan type mappings," *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, vol. 19, pp. 2145–2152, 2017, doi: 10.1007/s11784-017-0402-8.

[5] S. Czerwik, "Contraction Mappings in b-metric Spaces," *Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis*, vol. 1, no. 1, pp. 5–11, 1993.[Online]. Available: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/120469.

[6] V. V. Chistyakov, "Modular metric spaces, I: Basic concepts," *Nonlinier Analysis*, vol. 72, pp. 1–14, 2010, doi: 10.1016/j.na.2009.04.057.

[7] M.E. Ege and C. Alaca, "Some Results for Modular b-Metric Spaces and an Application to System of Linear Equations," *Azerbaijan Journal of Mathematics*, vol. 8, no. 1, pp. 3–14, 2018. [Online]. Available: https://azjm.org/volumes/0801/0801-1.pdf.

[8] N. Haokip and N. Goswami, "Some fixed point theorems for generalized Kannan type mappings in b-metric spaces," *Proyeccioness, Journal of Mathematics*, vol. 38, no. 4, pp. 763–782, 2019, doi: 10.22199/issn.0717-6279-2019-04-0050.

[9] A. Hayati, L. Harini, A. Winarni, and N. Muhassanah, "Teori Titik Tetap untuk Pemetaan $(\psi, \varphi)_\Omega$-Kontraksi pada Ruang p-Metrik Modular Berorder," *Pythagoras: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, vol. 17, no. 2, 2022, doi: 10.21831/pythagoras.v17i2.52985.

[10] L. Harini, "Teorema Titik Tetap untuk Pemetaan Kannan Pada Ruang Metrik Modular Teritlak," *Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika (JMP)*, vol. 11, no. 2, pp. 11–18, 2019, doi: 10.20884/1.jmp.2019.11.2.2269.

[11] L. Harini, H. P. Lestari, and Caturiyati, "Some fixed point theorems in generalized modular metric space," in *AIP Conference Proceedings*, American Institute of Physics Inc., 2022. doi: 10.1063/5.0107775.

[12] M. Oztürk, F. Golkarmanesh, A. Büyükkaya, and V. Parvaneh, "Generalized Almost Simulative $\hat{Z}^{\Theta}_{\Psi^*}$ −Contraction Mappings in Modular b−Metric Spaces," *Journal of Mathematical Extension*, vol. 17, no. 2, pp. 1–37, 2024, doi: 10.30495/JME.2023.2424.

[13] P. Tyagi, S. S. Chauhan, N. Mani, and R. Shukla, "F−Modular b−Metric Spaces and Some Analogies of Classical Fixed Point Theorems," *International Journal of Analysis and Applications*, vol. 22, 2024, doi: 10.28924/2291-8639-22-2024-66.

[14] A. Hayati, N. Sofiyati, and D. L. Kartika, "Teori Titik Tetap untuk Tipe Kannan yang Diperumum dalam Ruang b-Metrik Modular Lengkap," *Jambura Journal of Mathematics*, vol. 5, no. 2, 2023, doi: 10.34312/jjom.v5i2.20571.

[15] A. Büyükkaya and M. Öztürk, "Some Common Fixed Point Results for ZE−Contractions in Modular b−Metric Spaces," *Topological Algebra and its Applications*, vol. 10, no. 1, pp. 195–2015, 2022, doi: 10.1515/taa-2022-0127.

[16] M. S. Khan, M. Swaleh, and S. Sessa, "Fixed point theorems by altering distances between the points," *Bull Aust Math Soc*, vol. 30, pp. 1–9, 1984, doi: 10.1017/S0004972700001659.

[17] H. Faraji and K. Nourouzi, "A Generalization of Kannan and Chatterjea Fixed Point Theorems on Complete b-Metric Spaces," *Sahand Communications in Mathematical Analysis*, vol. 6, no. 1, pp. 77–86, 2017, doi: 10.22130/scma.2017.23831.

[18] P. Corazza, "Introduction to Metric-Preserving Functions," *The American Mathematical Monthly*, vol. 106, no. 4, pp. 309–323, 1999, doi: 10.2307/2589554.