RESEARCH ARTICLE • OPEN ACCESS

# Karakteristik Modul Endoprima Lemah

Dewi Ika Ainurrofiqoh

JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS

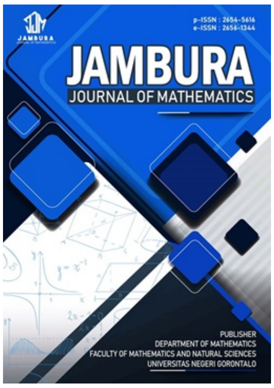
**Volume 6, Issue 2, Pages 220–225, August 2024**

*Diterima 5 Juni 2024, Direvisi 25 Juli 2024, Disetujui 28 Juli 2024, Diterbitkan 3 Agustus 2024*

**To Cite this Article :** D. I. Ainurrofiqoh,"Karakteristik Modul Endoprima Lemah", *Jambura J. Math*, vol. 6, no. 2, pp. 220–225, 2024, https://doi.org/10.37905/jjom.v6i2.26450



## JOURNAL INFO • JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS





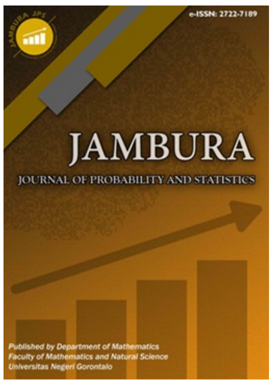

| | | |
|---|---|---|
| Homepage | : | http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/index |
| Journal Abbreviation | : | Jambura J. Math. |
| Frequency | : | Biannual (February and August) |
| Publication Language | : | English (preferable), Indonesia |
| DOI | : | https://doi.org/10.37905/jjom |
| Online ISSN | : | 2656-1344 |
| Editor-in-Chief | : | Hasan S. Panigoro |
| Publisher | : | Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo |
| Country | : | Indonesia |
| OAI Address | : | http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/oai |
| Google Scholar ID | : | iWLjgaUAAAAJ |
| Email | : | info.jjom@ung.ac.id |



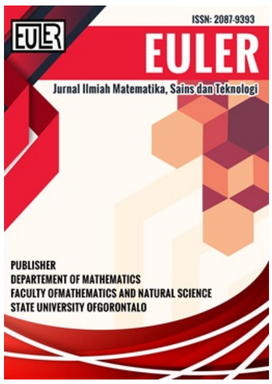
## JAMBURA JOURNAL • FIND OUR OTHER JOURNALS


Jambura Journal of Biomathematics


Jambura Journal of Mathematics Education




Jambura Journal of Probability and Statistics




EULER : Jurnal Ilmiah Matematika, Sains, dan Teknologi

**Jambura Journal of Mathematics**, Volume 6, Issue 2, Pages 220–225, August 2024 https://doi.org/10.37905/jjom.v6i2.26450

Research Article

Check for updates

# Karakteristik Modul Endoprima Lemah

**Dewi Ika Ainurrofiqoh**[1,*]

[1]*Jurusan Matematika, Universitas Jember, Jember, Indonesia*

**ARTICLE HISTORY**
Diterima 5 Juni 2024
Direvisi 25 Juli 2024
Disetujui 28 Juli 2024
Diterbitkan 3 Agustus 2024

**KATA KUNCI**
Modul Endoprima
Modul Endoprima Lemah
Submodul Invarian Penuh

**KEYWORDS**
Endoprime Modules
Weakly Endoprime Modules
Fully Invariant Submodule

**ABSTRAK.** *Dalam penelitian ini dipelajari modul endoprima lemah yang merupakan pengembangan dari modul prima lemah dengan meninjau submodul invarian penuhnya. Hal ini serupa dengan pengembangan modul endoprima dari modul prima. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan hubungan modul endoprima lemah dan modul endoprima serta mengkaji submodul invarian penuh dari modul endoprima lemah. Metode yang digunakan adalah mengkaji hubungan modul prima lemah dan modul prima, modul endoprima dan modul prima, serta modul endoprima lemah dan prima lemah. Hasil yang diperoleh adalah setiap modul endoprima merupakan modul endoprima lemah, akan tetapi untuk sebaliknya belum tentu terpenuhi. Selain itu, submodul invarian penuh dari modul endoprima lemah belum tentu merupakan modul endoprima lemah.*

**ABSTRACT.** *In this research, we studied weakly endoprime module, which is a development of weakly prime module by reviewing its fully invariant submodule. This is similar to the development of endoprime module from prime module. This primary objective of this research are to determine the relationship between weakly endoprime module and endoprime module and examine the fully invariant submodules of weakly endoprime module. The method employed in this research involves studying the relationship between weakly prime modules and prime modules, endoprime modules and prime modules, as well as weakly endoprime modules and weakly prime modules. The results obtained are that each endoprime module is a weakly endoprime module, but the converse is not necessarily true. Moreover, a fully invariant submodule of a weakly endoprime module is not necessarily a weakly endoprime module.*



## 1. Pendahuluan

Modul atas ring merupakan hasil perumuman dari ruang vektor atas lapangan [1]. Hal tersebut termotivasi dengan adanya suatu grup komutatif $G$ yang memenuhi semua aksioma perkalian skalar, akan tetapi himpunan skalar $F$ bukan merupakan lapangan, $F$ merupakan ring. Sehingga, struktur aljabar tersebut didefinisikan sebagai modul atas ring. Di lain sisi, misalkan $R$ suatu ring komutatif, maka jelas bahwa $R$ merupakan atas dirinya sendirinya, atau disebut sebagai modul reguler $R_R$ [2]. Oleh karena itu, dalam perkembangannya banyak ilmuwan yang mengembangkan teori modul dengan mengadaptasi teori yang ada pada ring. Sebagai contoh modul prima [3] yang dikembangkan dari definisi ring prima.

Suatu ring $R$ dikatakan prima jika dan hanya jika *annihilator* (pemusnah) di $R$ dari setiap idealnya adalah nol ($ann_R(I) = r \in R| rm = 0, m \in I\}$, untuk setiap $I$ ideal dari $R$) [4]. Konsep tersebut diperumum ke sebarang modul $M$ atas ring $R$ oleh Feller dan Swokowski pada tahun 1965 dan secara terpisah oleh Dauns pada tahun 1978. Suatu modul $M$ atas ring $R$ disebut modul prima jika *annihilator* (pemusnah) di $R$ dari setiap submodul tak nolnya adalah unsur nol di $R$ dan elemen reguler di $R$ tidak memusnahkan unsur tak nol di modul [3]. Dengan demikian, suatu modul dikatakan sebagai modul prima jika *annihilator* (pemusnah) dari modul sama dengan *annihilator* (pemusnah) dari setiap submodulnya [5].

Pada teori ring, ideal merupakan bagian yang krusial dari ring, begitu halnya dengan submodul juga merupakan bagian yang krusial dari modul. Pada teori ring, kita telah mengenal istilah ideal prima. Adapun konsep pada ideal prima tersebut kemudian diaplikasikan ke submodul, sehingga terdapat definisi submodul prima [6] dan submodul prima lemah [7]. Keterkaitan antara submodul prima dan prima lemah dapat dilihat pada [8]. Dengan mempertimbangkan eksistensi submodul prima lemah dari suatu modul dan *annihilator* (pemusnah) sebagai ideal prima dari ring, maka Behboodi [9] memperkenalkan suatu jenis modul yang disebut dengan modul prima lemah. Behboodi [9] mendefinisikan modul prima lemah sebagai suatu modul yang *annihilator* (pemusnah) di ring dari sebarang submodul tak nolnya merupakan ideal prima.

Pendefinisian modul prima dan prima lemah seperti yang dijelaskan di atas hanya meninjau modul atas ring reguler. Dari sebarang ring reguler bisa dibentuk suatu struktur ring yang baru yaitu ring endomorfisma. Misalkan $R$ suatu ring maka $End_R(R)$ juga merupakan ring. Kemudian konsep tersebut diperumum untuk sebarang modul. Misalkan $M$ adalah modul atas ring $R$ maka $S = End_R(M)$ juga memenuhi struktur ring dan $M$ juga merupakan modul atas ring $S$. Sehingga $M$ merupakan bimodul atas ring $R$ dan $S$. Dalam perkembangannya banyak peneliti

*Penulis Korespondensi.

Email : *199406042024062001@mail.unej.ac.id* (D. I. Ainurrofiqoh)
Homepage : http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/index / E-ISSN : 2656-1344

yang mengembangkan definisi modul dengan meninjau ring endomorfismanya seperti modul endoprima [10], modul endo coprima [11], modul endoprima lemah [12], serta modul Baer dan dualnya [13].

Berdasarkan definisi, $R$ disebut ring prima jika dan hanya jika setiap ideal di $R$ mempunyai *annihilator* (pemusnah) nol [14]. Selanjutnya dengan memandang $R$ sebagai modul reguler $R_R$, maka sebarang submodul invarian penuh tak nol dari modul $R_R$ merupakan modul *faithful* atas ring endomorfismanya. Apabila konsep tersebut diperumum ke sebarang modul, diperoleh suatu struktur aljabar yang disebut modul endoprima. Haghany dan Vedadi [10] menyatakan bahwa suatu modul disebut modul endoprima jika untuk setiap submodul invarian penuh (misalkan $N$ submodul dan $f(N) \subseteq N$ untuk sebarang $f \in End_R(M)$ yang tidak nol merupakan modul *faithful* atas ring endomorfisma atau dengan kata lain *annihilator* (pemusnah) di ring endomorfisma dari setiap submodul yang tak nol adalah nol [10].

Selanjutnya, serupa dengan pengembangan modul prima lemah yang termotivasi dari eksistensi ideal prima dari suatu ring, maka dengan mempertimbangkan eksistensi ideal prima dari ring endomorfisma terbentuk modul endoprima lemah yang dibahas oleh Beyranvand dan Beiranvand [12]. Pendefinisian modul endoprima lemah analog dengan pendefinisian modul prima lemah. Selain itu, seperti halnya dalam pendefinisian modul endoprima, submodul invarian penuh mempunyai peranan penting dalam pendifinisian modul endoprima lemah. Modul endoprima lemah didefinisikan sebagai modul yang *annihilator* (pemusnah) di ring endomorfisma dari sebarang submodul invarian penuh tak nolnya merupakan ideal prima dari ring endomorfisma [12]. Pada perkembangannya, muncul istilah submodul endoprima lemah (endoprima) yang didefinisikan secara terpisah dari definisi modul endoprima lemah (endoprima). Sebarang submodul disebut submodul endoprima lemah (endoprima) tidak mengharuskan submodul tersebut dari modul endoprima lemah (endoprima) [15].

Berdasarkan pemaparan di atas, diketahui bahwa modul endoprima merupakan pengembangan dari modul prima dan modul endoprima lemah merupakan pengembangan dari modul prima lemah. Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Haghany dan Vedadi [10] telah diperoleh hubungan antara modul endoprima dan modul prima. Begitu pula dengan hasil penelitian Beyranvand dan Beiranvand [12] yang menjelaskan hubungan modul endoprima lemah dan modul prima lemah. Akan tetapi, belum ada kajian mengenai hubungan modul endoprima lemah dan modul endoprima. Pada paper ini dikaji keterkaitan antara modul endoprima lemah dan modul endoprima dengan terlebih dahulu mengkaji keterkaitan antara modul prima dan prima lemah. Selain itu, dikaji pula karakteristik submodul invarian penuh dari modul endoprima lemah dengan memeriksa apakah submodul invarian penuh dari modul endoprima lemah juga merupakan modul endoprima lemah atau bukan.

## 2. Metode

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur dengan melakukan kajian pustaka tentang modul prima, modul prima lemah, modul endoprima dan modul endoprima lemah. Setelah melakukan kajian pustaka, selanjutnya dikaji keterkaitan antara modul endoprima lemah dan modul endoprima dengan terlebih dahulu mengkaji keterkaitan antara modul prima lemah dan modul prima. Berikut ini disajikan beberapa landasan teori yang digunakan untuk mendukung penelitian ini.

### 2.1. *Modul Prima*

**Definisi 1.** [5] Misalkan $0 \neq M$ adalah modul atas ring $R$. Maka $M$ disebut modul prima jika $ann_R(M) = ann_R(N)$, untuk sebarang $0 \neq N$ submodul dari $M$.

**Contoh 1.** $\mathbb{Z}_p$ dengan $p$ bilangan prima sebagai modul atas $\mathbb{Z}$ merupakan modul prima karena untuk semua $N$ submodul dari $\mathbb{Z}_p$ berlaku $ann_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{\boldsymbol{p}}) = ann_{\mathbb{Z}}(N)$.

**Proposisi 1.** *[16] Misalkan $M$ modul kanan atas $R$ dan untuk sebarang submodul tak nol $N$ dari $M_R$ memenuhi $ann_R(M/N) \nsubseteq ann_R(M)$ dan $S = End_R(M)$. Jika $M_R$ modul prima maka ${}_SM$ modul prima.*

### 2.2. *Modul Prima Lemah*

**Definisi 2.** [9] Misalkan $0 \neq M$ adalah modul atas ring $R$. Maka $M$ disebut modul prima lemah jika $ann_R(N)$ adalah ideal prima dari $R$, untuk sebarang $0 \neq N$ submodul dari $M$.

**Contoh 2.** $\mathbb{Z}_6$ sebagai modul atas $\mathbb{Z}_6$ merupakan modul prima lemah. Submodul tak nol dari $\mathbb{Z}_6$ sebagai modul atas $\mathbb{Z}_6$ yaitu $N_1 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ dan $N_2 = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ dengan $ann_{\mathbb{Z}_6}(N_1) = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ dan $ann_{\mathbb{Z}_6}(N_2) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$. Sehingga $ann_{\mathbb{Z}_6}(N_1)$ dan $ann_{\mathbb{Z}_6}(N_2)$ adalah ideal prima dari $\mathbb{Z}_6$.

Modul prima lemah belum tentu modul prima, seperti ditunjukkan pada Contoh 2. $\mathbb{Z}_6$ sebagai modul atas $\mathbb{Z}_6$ merupakan modul prima lemah, tetapi bukan modul prima.

### 2.3. *Modul Endoprima*

**Definisi 3.** [10] Misalkan $0 \neq M$ modul kanan atas ring $R$ dan $S = End_R(M)$. Maka $M$ disebut modul endoprima jika $ann_S(N) = 0$, untuk sebarang $0 \neq N$ submodul invarian penuh dari $M$.

**Contoh 3.** $\mathbb{Z}$ sebagai modul atas $\mathbb{Z}$ merupakan modul endoprima. Misalkan $S = End_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$. Untuk setiap submodul invarian penuh tak nol dari $\mathbb{Z}$ yaitu $n\mathbb{Z}$ dengan $n \in \mathbb{Z}$, maka $ann_S(n\mathbb{Z}) = 0$.

Karena modul endoprima merupakan pengembangan dari modul prima, maka perlu ditinjau hubungan modul endoprima dan modul prima. Berikut ini proposisi yang menyatakan hubungan modul endoprima dan modul prima.

**Proposisi 2.** *[10] Misalkan $M$ adalah modul kanan atas ring $R$ dengan $S = End_R(M)$. Maka $M_R$ endoprima jika dan hanya jika ${}_SM$ prima.*

*Bukti.* **(⇒)** Misalkan $M_R$ modul endoprima. Ambil sebarang $N$ submodul tak nol dari ${}_SM$. Maka $N_R$ submodul invarian penuh tak nol dari $M_R$. Karena $M_R$ modul endoprima maka $ann_S(NR) = \mathbf{0}$. Perhatikan bahwa $ann_S(N) = ann_S(NR)$. Karena $M$ juga merupakan submodul invarian penuh tak nol dari $M_R$ maka $ann_S(M) = 0$. Dengan demikian

$$0 = ann_S(M) = ann_S(NR) = ann_S(N).$$

Jadi, ${}_SM$ modul prima.
(⇐) Misalkan ${}_SM$ prima. Ambil sebarang $N$ submodul invarian penuh tak nol dari $MR$ maka $N$ submodul tak nol dari ${}_SM$. Karena ${}_SM$ prima maka $ann_S(N) = ann_S(M) = 0$. Dengan demikian, $M_R$ modul endoprima. □

### 2.4. Modul Endoprima Lemah

**Definisi 4.** [12] Misalkan $0 \neq M$ modul kanan atas ring $R$. Maka $M$ disebut modul endoprima lemah jika untuk sebarang $0 \neq N$ submodul invarian penuh dari $M$, $ann_S(N)$ adalah ideal prima dari $S = End_R(M)$, maksudnya untuk sebarang $f, g \in S$ dan $fSgN = 0$ mengakibatkan $fN = 0$ atau $gN = 0$.

**Contoh 4.** $\mathbb{Z}_6$ sebagai modul atas $\mathbb{Z}_6$ merupakan modul endoprima lemah. Misalkan $S = End_{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_6)$. Submodul invarian penuh tak nol dari $\mathbb{Z}_6$ yaitu $N = \langle \overline{2} \rangle$ dan $ann_S(N) = f$ dengan $f(a) = \overline{3}a$ ideal prima di $S$.

Modul endoprima lemah belum tentu modul endoprima, seperti ditunjukkan pada Contoh 4. $\mathbb{Z}_6$ sebagai modul atas $\mathbb{Z}_6$ merupakan modul endoprima lemah, tetapi bukan modul endoprima. Selanjutnya, karena modul endoprima lemah merupakan pengembangan dari modul prima lemah, maka dikaji hubungan modul endoprima lemah dan modul prima lemah. Berikut ini disajikan proposisi yang menyatakan hubungan modul endoprima lemah dan modul prima lemah.

**Proposisi 3.** *[12] Misalkan $M$ adalah modul kanan atas ring $R$ dengan $S = End_R(M)$.Jika $M_R$ endoprima lemah dan retractable, maka $M_R$ prima lemah.*

*Bukti.* Andaikan $M_R$ bukan prima lemah tetapi $M_R$ *retractable*. Karena $M_R$ bukan prima lemah berarti terdapat $N$ submodul tak nol dari $M$ dan $I, J$ ideal dari $R$ sedemikian sehingga $NIJ = 0$ tetapi $NI \neq 0$ dan $NJ \neq 0$. Dengan demikian $SNI \neq 0$ dan $SNJ \neq 0$. Perhatikan bahwa $SNI$ dan $SNJ$ submodul tak nol dari $M_R$. Suatu modul dikatakan *retractable* jika untuk sebarang submodul tak nol $N$ dari $M$, $Hom_R(M, N) \neq 0$ [17]. Karena $M_R$ *retractable* maka terdapat $0 \neq f,$ g∈S sedemikian sehingga $fM \subseteq SNI$ dan $gM \subseteq SNJ$. Sehingga kita punyai,

$$fSgM \subseteq fS(SNJ) \subseteq f(SN)J \subseteq SNIJ = 0.$$

Karena M endoprima lemah, maka $fM = 0$ atau $gM = 0$. Dengan demikian, $f = 0$ atau $g = 0$. Kontradiksi. □

**Proposisi 4.** *[12] Misalkan $M$ adalah modul kanan atas ring $R$ dengan $S = End_R(M)$. Jika $M_R$ endoprima lemah dan $R$ komutatif, maka $M_R$ prima lemah.*

*Bukti.* Andaikan $M_R$ bukan prima lemah. Berarti terdapat $N$ submodul tak nol dari $M_R$ dan $a, b$ sebarang unsur di $R$ yang memenuhi $Nab = 0$, tetapi $Na \neq 0$ dan $Nb \neq 0$. Dengan demikian, $SNa \neq 0$ dan $SNb \neq 0$. Karena $R$ komutatif, definisikan $f, g \in End_R(M)$ sedemikian sehingga untuk sebarang $x \in M$, $f(x) = xa$ dan $g(x) = xb$. Oleh karena itu, untuk sebarang $h \in S$ berlaku $fhg(SN) = fh(SNb) \subseteq f(SN)b = SNab = 0$. Karena $SN$ submodul invarian penuh tak nol dari $M$ dan $M$ endoprima lemah, maka $0 = g(SN) = SNb$ atau $0 = f(SN) = SNa$. Kontradiksi. □

## 3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini, disajikan beberapa hasil penelitian yang menyatakan hubungan antara modul endoprima lemah dan modul endoprima. Selain itu, disajikan pula karakteristik submodul invarian penuh dari modul endoprima lemah.

### 3.1. Hubungan Modul Endoprima Lemah dan Modul Endoprima

Karena modul endoprima (endoprima lemah) dikembangkan dari modul prima (prima lemah), maka terlebih dahulu dikaji hubungan antara modul prima dan modul prima lemah. Berikut ini disajikan keterkaitan modul prima dan prima lemah.

**Lemma 1.** *Misalkan $M$ modul kanan atas ring komutatif $R$ dan $ann_R(M)$ ideal maksimal di $R$. Maka $M_R$ modul prima jika dan hanya jika $M_R$ modul prima lemah.*

*Bukti.* (⇒) Misalkan $M_R$ modul prima dan $ann_R(M)$ ideal maksimal di $R$. Ambil sebarang $N$ submodul tak nol dari $M$. Karena $M_R$ modul prima maka $ann_R(M) = ann_R(N)$. Karena $ann_R(M)$ ideal maksimal di $R$ maka $ann_R(M)$ ideal prima di $R$. Akibatnya, $ann_R(N)$ juga ideal prima di $R$. Dengan demikian, berdasarkan Definisi 2, $M_R$ modul prima lemah.
(⇐) Misalkan $M_R$ adalah modul prima lemah. Ambil sebarang $N$ submodul tak nol dari $M$. Karena $0 \neq N \subseteq M$ maka $ann_R(M) \subseteq ann_R(N) \subseteq R$. Karena $ann_R(M)$ ideal maksimal di $R$ maka $ann_R(N) = R$ atau $ann_R(M) = ann_R(N)$. Berdasarkan Definisi 2, karena $M_R$ modul prima lemah maka $ann_R(M)$ merupakan ideal maksimal di $R$, sehingga $ann_R(M) = ann_R(N)$.Dengan demikian, berdasarkan Definisi 1, $M_R$ modul prima. □

Hubungan modul endoprima dan modul prima yang dinyatakan dalam Teorema 1.

**Teorema 1.** *Misalkan $M$ modul kanan atas ring komutatif $R$ dan untuk sebarang submodul tak nol $N$ dari $M_R$ memenuhi $ann_R\,(M/N) \nsubseteq\ ann_R\,(M)$ maka pernyataan berikut ekuivalen:*

*i. $M_R$ modul endoprima,*

*ii. $M_R$ modul prima.*

*Bukti.* (i→ii) Misalkan $M_R$ modul prima dan untuk sebarang submodul tak nol $N$ dari $M_R$ berlaku $ann_R(M/N) \nsubseteq\ ann_R\,(M)$. Maka berdasarkan Proposisi 1, ${}_SM$ modul prima. Karena ${}_SM$ modul prima maka berdasarkan Proposisi 2, $M_R$ modul endoprima. (ii→i) Ambil sebarang $N$ submodul tak nol dari $M_R$. Selanjutnya ditunjukkan $ann_R\,(N) =\ ann_R(M)$. Karena $N \subseteq M$ maka jelas bahwa $ann_R(M) \subseteq ann_R(N)$. Sebaliknya, misalkan $r \in ann_R(N)$. Karena $R$ komutatif, definisikan $f_r(M) := Mr$ untuk suatu $f_r \in End_R(M)$. Karena $N$ submodul tak nol dari $M_R$ maka $SN$ submodul invarian penuh tak nol dari $M_R$. Karena $r \in ann_R(N)$ maka

$$f_r(SN) = SNr = 0$$

Dengan demikian, $f_r \in ann_S(SN)$. Karena $M_R$ endoprima maka $f_r = 0$. Oleh karena itu

$$0 = f_r(M) = Mr$$

Dengan demikian, $r \in ann_R(M)$. Sehingga, $ann_R(N) \subseteq ann_R(M)$. Jadi, $ann_R(M) = ann_R(N)$. Sehingga, berdasarkan Definisi 1, $M_R$ modul prima. □

Selanjutnya, dikaji hubungan modul endoprima dan endoprima lemah. Berikut ini adalah implikasi yang menyatakan hubungan modul endoprima dan endoprima lemah.

**Lemma 2.** *Misalkan $M$ modul kanan atas ring $R$, jika $M_R$ modul endoprima maka $M_R$ modul endoprima lemah.*

*Bukti.* Misalkan $M$ adalah modul endoprima atas ring $R$ dan $S = End_R(M)$. Ambil sebarang submodul invarian penuh tak nol $N$ dari $M$ dan sebarang $f,\ g \in S$ sedemikian sehingga $fSgN = 0$ Dengan demikian, $fSg \in ann_S(N)$. Berdasarkan Definisi 3, karena $M_R$ modul endoprima maka $ann_S(N) = 0$ sehingga $fSg = 0$ dan $S$ ring prima. Akibatnya $f = 0$ atau $g = 0$. Sehingga $fN = 0$ atau $gN = 0$. Dengan demikian berdasrkan Definisi 4, $M_R$ modul endoprima lemah. □

Konvers dari Lemma 2 tidak berlaku karena modul endoprima lemah belum tentu modul endoprima. Sebagai contoh penyangkal, $\mathbb{Z}_6$ sebagai modul atas $\mathbb{Z}_6$ merupakan modul endoprima lemah tetapi bukan modul endoprima.

**Teorema 2.** *Misalkan $M$ adalah modul kanan atas ring komutatif $R$ dan $ann_R(M)$ ideal maksimal di $R$ serta untuk setiap $0 \neq N$ submodul dari $M$ berlaku $ann_R\,(M/N) \nsubseteq\ ann_R\,(M)$, jika $M_R$ modul endoprima lemah maka $M_R$ modul endoprima.*

*Bukti.* Misalkan $M_R$ endoprima lemah dan $R$ komutatif maka berdasarkan Proposisi 4, $M_R$ modul prima lemah. Karena $M_R$ modul prima lemah dan $R$ komutatif serta $ann_R(M)$ ideal maksimal di $R$ maka berdasarkan Lemma 1, $M_R$ modul prima. Karena $M_R$ modul prima dan setiap $0 \neq N$ submodul dari $M$ berlaku $ann_R\,(M/N) \nsubseteq\ ann_R\,(M)$) maka berdasarkan Teorema 1, $M_R$ modul endoprima. □

Selain itu, karena modul endoprima lemah merupakan perumuman dari modul prima lemah, berikut ini disajikan keterkaitan modul prima lemah dan modul endoprima lemah. Pada Proposisi 3 telah diketahui bahwa suatu modul endoprima lemah yang *retractable* merupakan modul prima lemah. Pada bagian ini, disajikan syarat agar modul prima lemah juga merupakan modul endoprima lemah.

**Teorema 3.** *Misalkan $M$ adalah modul kanan atas ring komutatif $R$ dan $ann_R(M)$ ideal maksimal di $R$ serta untuk setiap $0 \neq N$ submodul dari $M$ berlaku $ann_R\,(M/N) \nsubseteq\ ann_R\,(M)$, jika $M_R$ modul prima lemah maka $M_R$ modul endoprima lemah.*

*Bukti.* Misalkan $M_R$ modul prima lemah dan $R$ komutatif serta $ann_R(M)$ ideal maksimal di $R$ maka berdasarkan Teorema 1, $M_R$ modul prima. Karena $M_R$ modul prima dan untuk setiap $0 \neq N$ berlaku $ann_R\,(M/N) \nsubseteq\ ann_R\,(M)$ maka $M_R$ modul endoprima dan berdasarkan Lemma 2, setiap modul endoprima merupakan modul endoprima lemah. Jadi, $M_R$ modul endoprima lemah. □

### 3.2. Submodul Invarian Penuh dari Modul Endoprima Lemah

Pendefinisian modul endoprima lemah ditinjau dari submodul invarian penuhnya. Oleh karena itu, pada bagian ini ditinjau sifat-sifat submodul invarian penuh dari modul endoprima lemah.

**Lemma 3.** *[10] Misalkan $N$ submodul invarian penuh tak nol dari $M_R$. Maka pemetaan $\psi : End_R\,(M) \rightarrow End_R(N)$ yang dibatasi di $N$ adalah homomorfisma ring yang surjektif jika $M_R$ quasi injektif.*

*Bukti.* Misalkan $N$ adalah submodul invarian penuh tak nol dari $M_R$ dan konstruksi

$$\begin{aligned} \psi :\ End_R\,(M) &\rightarrow End_R\,(N)\,, \\ f\ &\mapsto f\,|_N. \end{aligned}$$

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\psi$ surjektif. Ambil sebarang $f\,|_N \in End_R(N)$, $f\,|_N\,(N) \subseteq N \subseteq M$. Dengan demikian, $f\,|_N \in Hom_R(N,\ M)$. Karena $M_R$ modul quasi injektif maka $f\,|_N$ dapat diperluas ke suatu endomorfisma dari $M$ [18], sehingga terdapat $f \in End_R(M)$ sedemikian sehingga $f\,|_N = \psi(f)$. Jadi, $\psi$ surjektif. □

**Proposisi 5.** *[12] Misalkan $M_R$ modul endoprima lemah quasi injektif. Maka sebarang submodul invarian penuh tak nol $N_R$ merupakan modul endoprima lemah.*

*Bukti.* Misalkan $M_R$ modul endoprima lemah quasi injektif dan $N_R$ submodul invarian penuh tak nol dari $M_R$. Ambil sebarang $K$ submodul invarian penuh tak nol dari $N_R$. Tulis $S = End_R(N)$ dan $\overline{S} = End_R(M)$. Misalkan $fSgK = 0$ untuk suatu $f, g \in S$. Karena $M_R$ quasi injektif maka berdasarkan Lemma 3 homomorfisma ring $\psi : \bar{S} \to S$ surjektif, sehingga terdapat $\bar{f}, \bar{g} \in \bar{S}$ sedemikian sehingga $\bar{f}|_N = f$ dan $\bar{g}|_N = g$. Karena $K$ submodul invarian penuh tak nol dari $N$ dan $M$ maka

$$\bar{f}\bar{S}\bar{g}K = \bar{f}\bar{S}gK \ = \bar{f}SgK = fSgK = 0.$$

Karena $M_R$ modul endoprima lemah maka $\bar{f}K = 0$ atau $\bar{g}K = 0$. Dengan demikian, $fK = \bar{f}|_N K = 0$ atau $gK = \bar{g}|_N K = 0$. Oleh karena itu, $N_R$ endoprima lemah. □

**Lemma 4.** *Jika $M_R$ endoprima lemah quasi-injektif dan $N$ submodul invarian penuh tak nol dari $M_R$ maka $S' = End_R(N)$ ring prima.*

*Bukti.* Misalkan $M_R$ endoprima lemah quasi-injektif dan $N$ submodul invarian penuh tak nol dari $M_R$, maka berdasarkan Proposisi 5, $N_R$ merupakan modul endoprima lemah. Karena $N_R$ adalah modul endoprima lemah maka untuk sebarang submodul invarian penuh tak nol $N'$ dari $N$, $ann_{S'}(N')$ ideal prima dari $S'$, artinya untuk sebarang $f, g \in S'$ jika $fS'gN' = 0$ maka $fN' = 0$ atau $gN' = 0$. Pilih $N' = N$, maka $fN = 0$ atau $gN = 0$. Karena $M \neq 0$ maka $f = 0$ atau $g = 0$. Dengan demikian, $S'$ ring prima. □

**Akibat 1.** *Jika $M_R$ endoprima lemah quasi-injektif dan $N$ submodul invarian penuh tak nol dari $M_R$ dan misalkan $S' = End_R(N)$ maka ${}_{S'}S'$ modul endoprima lemah.*

*Bukti.* Misalkan $M_R$ endoprima lemah quasi-injektif dan $N$ submodul invarian penuh tak nol dari $M_R$ dan misalkan $S' = End_R(N)$. Berdasarkan Proposisi 5, karena $M_R$ endoprima lemah quasi-injektif maka $N_R$ modul endoprima lemah. Berdasarkan Lemma 4, karena $N_R$ modul endoprima lemah maka $S' = End_R(N)$ ring prima. Dengan demikian, jelas bahwa ${}_{S'}S'$ modul endoprima. Berdasarkan Lemma 2, jelas bahwa ${}_{S'}S'$ modul endoprima. □

Berdasarkan Proposisi 5, telah terbukti bahwa jika $M_R$ modul endoprima lemah quasi injektif dan $N$ submodul invarian penuh tak nol maka $N_R$ modul endoprima. Selanjutnya timbul pertanyaan, jika $N$ submodul invarian penuh tak nol dari $M_R$ dan $N_R$ modul endoprima lemah, apakah $M_R$ juga merupakan modul endoprima lemah atau bukan. Jika $M_R$ bukan modul endoprima lemah, maka ditentukan syarat agar $M_R$ menjadi modul endoprima lemah. Hasil penelitian Beyranvand dan Beiranvand [12] menyatakan sebagai berikut.

**Proposisi 6.** *Misalkan $M_R$ nonsingular dan semua submodul sejati dari $M_R$ merupakan submodul esensial. Jika untuk setiap $0 \neq N_R$ submodul invarian penuh dari $M_R$ merupakan modul endoprima lemah maka $M_R$ modul endoprima lemah.*

*Bukti.* Misalkan $N_R$ modul endoprima lemah. Ambil sebarang $K$ submodul invarian penuh tak nol dari $M$ dan $f,\ g \in End_R(M)$ sedemikian sehingga $fSgK = 0$. Karena semua submodul dari $M_R$ merupakan submodul esensial maka $N$ dan $K$ submodul esensial dari $M_R$ sehingga $N \cap K \neq 0$ [18]. Perhatikan bahwa $N \cap K \subseteq N$ merupakan submodul invarian penuh dari $N_R$. Karena $fSgK = 0$ maka $fSg(N \cap K) = 0$ sehingga
$f|_N S^0 g|_N (N \cap K) = 0$, dengan $S^0 = End_R(N)$.
Karena $N_R$ modul endoprima lemah maka
$f|_N\ (N \cap K) = 0$ atau $g|_N\ (N \cap K) = 0$
$f|_{N \cap K}(N \cap K) = 0$ atau $g|_{N \cap K}\ (N \cap K) = 0$
Dengan demikian $f|_{N \cap K} = 0$ atau $g|_{N \cap K} = 0$. Karena $N$ dan $K$ submodul esensial maka $N \cap K$ juga submodul esensial dari $M_R$ [19]. Berdasarkan [10], karena $M_R$ nonsingular dan $N \cap K$ submodul esensial maka homomorfisma ring $\psi : End_R(M) \to End_R(N \cap K)$ injektif. Akibatnya, $f = 0$ atau $g = 0$, sehingga $fK = 0$ atau $gK = 0$. Jadi, $M_R$ modul endoprima lemah. □

Berdasarkan Proposisi 5 dan Proposisi 6, diperoleh suatu teorema yang menyatakan syarat perlu dan cukup suatu submodul invarian penuh dari modul endoprima lemah juga merupakan modul endoprima lemah.

**Teorema 4.** *Misalkan $M_R$ modul quasi injektif nonsingular dan semua submodul sejati dari $M_R$ merupakan submodul esensial. Jika $N_R$ submodul invarian penuh tak nol dari $M_R$ maka pernyataan berikut ekuivalen*
*i. $M_R$ endoprima lemah,*
*ii. $N_R$ endoprima lemah.*

*Bukti.* (i→ii) bersadarkan Proposisi 5 dan (ii→i) berdasarkan Proposisi 6. □

## 4. Kesimpulan

Sebarang modul endoprima merupakan modul endoprima lemah, tetapi untuk sebaliknya belum tentu berlaku. Secara umum, modul endoprima lemah belum tentu modul endoprima. $M_R$ modul endoprima lemah merupakan modul endoprima jika $R$ komutatif dan $ann_R(M)$ ideal maksimal di $R$ serta untuk setiap $0 \neq N$ submodul dari $M$ berlaku $ann_R(M/N) \nsubseteq ann_R(M)$. Selain itu, jika $M_R$ modul endoprima lemah quasi injektif maka submodul invarian penuh tak nol $N_R$ dari modul endoprima lemah $M_R$ juga merupakan modul endoprima lemah. Sebaliknya, jika $M_R$ nonsingular dan semua submodul sejati dari $M_R$ merupakan submodul esensial serta untuk setiap $0 \neq N_R$ submodul invarian penuh dari $M_R$ merupakan modul endoprima lemah maka $M_R$ modul endoprima lemah.

**Ucapan Terima Kasih.** Penulis menyampaikan terima kasih kepada Prof. Dr. Irawati, M.S. selaku pembimbing selama penyelesaian studi S2 Matematika ITB yang telah membantu memberikan masukan dan dukungan dalam pelaksanaan penelitian. Penulis juga menyampaikan terima kasih kepada editor dan reviewer atas pembacaan yang cermat, kritik yang

mendalam, dan rekomendasi yang praktis untuk meningkatkan kualitas tulisan ini.

**Pembiayaan.** Penelitian ini tidak menerima pembiayaan eksternal.

**Konflik Kepentingan.** Penulis menyatakan tidak ada konflik kepentingan yang terkait dengan artikel ini.

## Referensi

[1] N. A. Loehr, *Advanced linear algebra*. CRC Press, 2024, doi: 10.1201/9781003484561.

[2] A. Facchini, "Basic Concepts on Rings and Modules," In *Semilocal Categories and Modules with Semilocal Endomorphism Rings, Progress in Mathematics*, vol 331, Cham: Birkhäuser, 2019, doi: 10.1007/978-3-030-23284-9_2.

[3] E. H. Feller and E. W. Swokowski, "Prime Modules," *Can. J. Math.*, vol. 17, pp. 1041–1052, 1965, doi: 10.4153/cjm-1965-099-5.

[4] O. A. E. Safi, N. Mahdou, and M. Yousif, "Rings with divisibility on ascending chains of ideals," *Int. Electron. J. Algebr.*, vol. 35, no. 35, pp. 82–89, 2024, doi: 10.24330/ieja.1299720.

[5] J. Dauns, "Prime modules," *J. fur die Reine und Angew. Math.*, vol. 1978, no. 298, pp. 156–181, 1978, doi: 10.1515/crll.1978.298.156.

[6] H. A. Shahad and N. S. Al-Muthafar, "On essential-prime sub-modules," *J. Discret. Math. Sci. Cryptogr.*, vol. 24, no. 7, pp. 1973–1977, 2021, doi: 10.1080/09720529.2021.1968572.

[7] M. Jamali and R. Jahani-Nezhad, "On classical weakly prime submodules," *Facta Univ. Ser. Math. Informatics*, pp. 17–30, 2022.

[8] P. N. Afifah and I. Irawati, "Characterization of Weakly Prime Submodule," *J. Fundam. Math. Appl.*, vol. 4, no. 2, pp. 180–184, 2021, doi: 10.14710/jfma.v4i2.12189.

[9] M. Behboodi, "Weakly Prime Modules," *Vietnam J. Math.*, vol. 32, no. 2, pp. 185–195, 2004.

[10] A. Haghany and M. R. Vedadi, "Endoprime modules," *Acta Math. Hungarica*, vol. 106, no. 1–2, pp. 89–99, 2005, doi: 10.1007/s10474-005-0008-2.

[11] H. Mostafanasab and A. Y. Darani, "On endo-prime and endo-coprime modules," *arxiv: Mathematics, Rings and Algebras*, pp. 1–12, 2015, doi: 10.48550/arXiv.1503.00324.

[12] R. Beyranvand and P. K. Beiranvand, "Weakly endo-prime modules," *Int. Math. Forum.*, vol. 11, no. 4, pp. 155–161, 2016, doi: 10.12988/imf.2016.51185.

[13] N. Ghaedan and M. R. Vedadi, "Notes on Baer modules and their dual," *Acta Math. Univ. Comenianae*, vol. 91, no. 4, pp. 325–334, 2022. [Online]. Available: http://www.iam.fmph.uniba.sk/amuc/ojs/index.php/amuc/article/view/1695.

[14] A. W. Goldie, "The structure of prime rings under ascending chain conditions," in *Proc. London Math. Soc.*, vol. 3, no. 4, 1958, pp. 589–608, doi: 10.1112/plms/s3-8.4.589.

[15] S. A. Hussin and H. K. Mohammadali, "WE-Prime Submodules and WE-Semi-Prime Submodules," *Ibn AL-Haitham Journal For Pure and Applied Sciences*, vol. 31, no. 3, pp. 109–117, 2018, doi: 10.30526/31.3.2000.

[16] R. Wisbauer, Modules and algebras: bimodule structure on group actions and algebras. Harlow: Longman, 1996. [Online]. Available: https://cir.nii.ac.jp/crid/1130000794101924736.bib?lang=en.

[17] H. A. Jumaa and M. M. Abed, "A new view of retractable modules," in *AIP Conference Proceedings*, AIP Publishing, 2023, doi: 10.1063/5.0182111.

[18] T. Y. Lam, *Lectures on modules and rings*. New York: Springer Science & Business Media, 2012, doi: 10.1007/978-1-4612-0525-8.

[19] F. W. Anderson and K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1992, doi: 10.1007/978-1-4684-9913-1.