RESEARCH ARTICLE • OPEN ACCESS

Penentuan Hiperstruktur Aljabar dan Karakteristiknya dalam Masalah Pewarisan Biologi

Alifa Raida Alamsyah, Edi Kurniadi, dan Anita Triska

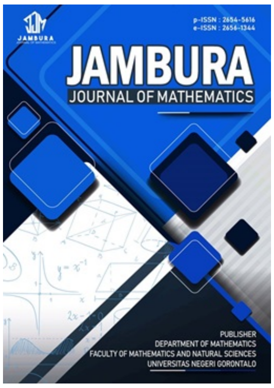
JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS

Volume 7, Issue 1, Pages 28–33, February 2025

Diterima 11 November 2024, Direvisi 14 Desember 2024, Disetujui 20 Desember 2024, Diterbitkan 1 Februari 2025

To Cite this Article : A. R. Alamsyah, E. Kurniadi, dan A. Triska,“Penentuan Hiperstruktur Aljabar dan Karakteristiknya dalam Masalah Pewarisan Biologi”, *Jambura J. Math*, vol. 7, no. 1, pp. 28–33, 2025, *https://doi.org/10.37905/jjom.v7i1.28270*

JOURNAL INFO • JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS



Homepage	:	http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/index
Journal Abbreviation	:	Jambura J. Math.
Frequency	:	Biannual (February and August)
Publication Language	:	English (preferable), Indonesia
DOI	:	https://doi.org/10.37905/jjom
Online ISSN	:	2656-1344
Editor-in-Chief	:	Hasan S. Panigoro
Publisher	:	Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo
Country	:	Indonesia
OAI Address	:	http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/oai
Google Scholar ID	:	iWLjgaUAAAAJ
Email	:	info.jjom@ung.ac.id

Jambura Journal of Mathematics, Volume 7, Issue 1, Pages 28–33, February 2025 https://doi.org/10.37905/jjom.v7i1.28270

Research Article

Check for updates

Penentuan Hiperstruktur Aljabar dan Karakteristiknya dalam Masalah Pewarisan Biologi

Alifa Raida Alamsyah[1], **Edi Kurniadi**[1,*], **dan Anita Triska**[1]

[1] *Departemen Matematika, Universitas Padjadjaran, Sumedang, Indonesia*

ARTICLE HISTORY
Diterima 11 November 2024
Direvisi 14 Desember 2024
Disetujui 20 Desember 2024
Diterbitkan 1 Februari 2025

KATA KUNCI
Hiperstruktur
Hipergrup
Semihipergrup
n-hibrida
Pewarisan

KEYWORDS
Hyperstructure
Hypergroup
Semihypergroup
n-hybrid
Inheritance

ABSTRAK. *Artikel ini membahas tentang penerapan matematika dalam masalah pewarisan biologi. Telah diketahui bahwa masalah pewarisan biologi erat kaitannya dengan kajian matematika. Salah satu cabang matematika yang dimaksud adalah hiperstruktur aljabar. Hiperstruktur aljabar tersebut antara lain adalah hipergrupoid, hipergrup, dan H_v-semigrup. Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan jenis-jenis hiperstruktur aljabar sebagai hasil persilangan dalam masalah pewarisan biologi. Hasil persilangan dinyatakan dalam suatu himpunan yang kemudian dikenakan dua hiperoperasi yang berbeda. Hasil penelitian menunjukkan bahwa terhadap hiperoperasi pertama menghasilkan hiperstruktur aljabar berupa hipergrup komutatif, hipergrup reguler, hipergrup siklik, dan H_v-semigrup dengan satu elemen idempoten, tiga elemen identitas, dan satu generator. Pada hiperoperasi kedua menghasilkan hiperstruktur aljabar berupa hipergrupoid, hipergrup komutatif, hipergrup reguler, hipergrup siklik dan H_v-semigrup tanpa elemen idempoten, tiga elemen identitas, dan tiga generator. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa hiperstruktur aljabar suatu himpunan bergantung pada hiperoperasinya.*

ABSTRACT. *This article discusses the application of mathematics in biological inheritance problems, which are closely linked to mathematical studies, particularly in algebraic hyperstructures, including hypergroupoids, hypergroups, and H_v-semigroups. The research aims to determine types of algebraic hyperstructures arising from genetic crossing in inheritance issues, with the crossing results represented in a set where two distinct hyperoperations are applied. Findings indicate that under the first hyperoperation, the algebraic hyperstructures formed include a commutative hypergroup, a regular hypergroup, a cyclic hypergroup, and an H_v-semigroup with one idempotent element, three identity elements, and one generator. Under the second hyperoperation the resulting algebraic hyperstructures include a commutative hypergroup, a regular hypergroup, a cyclic hypergroup, and an H_v-semigroup without idempotent elements, with three identity elements and three generators. Future research could develop various alternative hyperoperations on biological inheritance problems, generating a greater variety of algebraic hyperstructures. The results of this study indicate that the algebraic hyperstructure of a set depends on its hyperoperation.*

1. Pendahuluan

Teori hipergrup pertama kali diperkenalkan oleh Marty pada tahun 1947. Marty pertama kali memperkenalkan notasi hipergrup dan memberikan beberapa ilustrasi menarik terkait pengaplikasiannya dalam dalam teori grup, fungsi aljabar, dan pecahan relasional [1]. Teori hipergrup ini terus berkembang baik dari sudut pandang teoritis maupun penerapannya. Contoh penerapannya dapat dilihat dalam banyak bidang matematika murni dan terapan, seperti geometri, topologi, kriptografi dan teori kode, grafik dan hipergraf, teori probabilitas, relasi biner, teori himpunan fuzzy dan himpunan kasar, dan teori automata [2–4]. Selain itu, hipergrup juga mempunyai peranan dalam bidang kimia [5–10], bidang fisika [11–13], dan bidang biologi [4, 14].

Hiperstruktur memiliki relevansi dalam bidang Kimia, khususnya pada reaksi kimia. Dalam penelitian sebelumnya, terdapat banyak pengaplikasian hiperstruktur dalam bidang tersebut [5–8]. Davvaz pada [6] memberikan contoh hiperstruktur yang berkaitan dengan reaksi berantai. Kemudian, Davvaz pada [9] memberikan contoh hiperstruktur lemah yang berkaitan dengan reaksi dismutasi. Beberapa tahun setelahnya, Davvaz pada [10] meneliti contoh hiperstruktur dan hiperstruktur lemah yang berkaitan dengan reaksi redoks.

Penelitian-penelitian yang dilakukan oleh Al Tahan dan Davvaz [14] tentang pewarisan genetik tersebut ternyata mengikuti bentuk hiperstruktur aljabar sehingga menarik untuk dipelajari secara teoritis. Penelitian tersebut mempertimbangkan contoh spesifik pewarisan sederhana serta menghubungkannya dengan hiperstruktur dan mempelajari kasus monohibrid dan dihibrid serta pewarisan sederhana untuk kasus n-hibrida dengan $n \geq 1$. Oleh karena itu, contoh-contoh yang terdapat dalam [14] dapat dianggap sebagai kasus khusus. Seperti pada [14], Al tahan dan Davvaz memberikan contoh persilangan antara anjing dengan warna bulu putih dan coklat sehingga hasil persilangan pada generasi keduanya adalah putih (A_1), hitam (A_2), dan coklat

*Penulis Korespondensi.

Email : *edi.kurniadi@unpad.ac.id* (E. Kurniadi)
Homepage : http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/index / E-ISSN : 2656-1344

(A_3). Kemudian, Davvaz menyelidiki hiperstruktur aljabar dari himpunan $H = \{A_1, A_2, A_3\}$ dan diperoleh hiperstruktur aljabar berupa hipergrup komutatif, hipergrup reguler, hipergrup siklik, dan H_v-semigrup dengan satu elemen idempoten, tiga elemen identitas, dan satu generator. Namun, hiperstruktur aljabar pada suatu himpunan bergantung terhadap pendefinisian hiperoperasi yang diberikan.

Untuk itu, penelitian ini menyelidiki hiperstruktur aljabar dari suatu himpunan terhadap dua buah hiperoperasi yang berbeda. Pembahasan difokuskan pada kasus epistasis gen dominan dalam warna bulu anjing. Epistasis adalah efek fenotipe yang berasal dari interaksi antar alel di beberapa lokus [15]. Hiperstruktur aljabar yang telah diberikan pada [14] terhadap kasus epistasis gen dominan dalam warna bulu anjing tidak menyajikan bukti lengkap. Oleh karena itu, selain melengkapi bukti hiperstruktur aljabar yang telah diberikan pada [14] terhadap hiperoperasinya, penelitian ini juga mengkonstruksi suatu hiperoperasi lain sebagai pembanding hiperstruktur aljabar terhadap himpunan yang sama.

2. Metode

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kualitatif berupa studi literatur dengan artikel utama hasil penelitian [14]. Selain itu, dilakukan juga studi eksperimental dengan mendefinisikan hiperoperasi lain. Adapun tahapan untuk menyelesaikan penelitian ini dilakukan dengan beberapa langkah.

Langkah pertama diberikan persilangan antara anjing dengan warna bulu putih dan coklat [14]. Hasil keturunan pada generasi keduanya adalah Putih (A_1), hitam (A_2), dan coklat (A_3). Langkah kedua, hasil persilangan tersebut dinyatakan dalam suatu himpunan $H = \{A_1, A_2, A_3\}$ dan diberikan dua hiperoperasi pada H. Terakhir diselidiki hiperstruktur aljabar terhadap tiap hiperoperasi tersebut dengan memberikan bukti.

Berikut adalah beberapa tinjauan materi yang digunakan dalam penelitian ini.

Definisi 1. [2] *Misalkan H himpunan tak kosong. Pemetaan* $\circ : H \times H \to \rho(H)^*$ *dengan* $\rho(H)^* = \{A \subseteq H | A \neq \emptyset\}$ *disebut hiperoperasi pada* H *jika* $\circ$ *suatu pemetaan.*

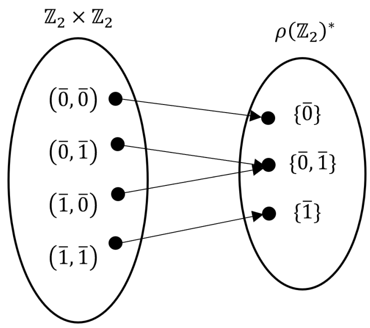
Contoh 1. Misalkan $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Dari himpunan $\mathbb{Z}_2$, dapat dikonstruksi:

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \left\{ \left(\bar{0}, \bar{0}\right), \left(\bar{0}, \bar{1}\right), \left(\bar{1}, \bar{0}\right), \left(\bar{1}, \bar{1}\right) \right\}.$$

Misalkan $\rho(\mathbb{Z}_2)^* = \{\{\bar{0}\}, \{\bar{1}\}, \{\bar{0}, \bar{1}\}\}$. Selanjutnya, dibuat pengaitan $\circ$ dari $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ke $\rho(\mathbb{Z}_2)^*$ seperti berikut:

$$\circ : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \rho(\mathbb{Z}_2)^*$$

dengan visualisasi pemetaan disajikan pada Gambar 1. Karena pengaitan $\circ$ merupakan pemetaan, maka $\circ$ merupakan hiperoperasi.



Gambar 1. Diagram pemetaan pada $\mathbb{Z}_2$.

Definisi 2. [2] *Misalkan* H *himpunan tak kosong dengan pemetaan* $\circ : H \times H \to \rho(H)^*$ *merupakan hiperoperasi pada* H*. Pasangan* $(H, \circ)$ *disebut hipergrupoid. Image dari pasangan* $(x, y) \in H^2$ *dinotasikan dengan* $x \circ y$ *dan disebut hiperproduk dari x dan y.*

Definisi 3. [2] *Jika* A *dan* B *dua himpunan bagian tak kosong dari* H *dan* $x \in H$*, maka didefinisikan:*

$$A \circ B = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} a \circ b \tag{1}$$

$$x \circ A = \{x\} \circ A = \bigcup_{a \in A} x \circ a \tag{2}$$

$$A \circ x = A \circ \{x\} = \bigcup_{a \in A} a \circ x \tag{3}$$

Definisi 4. [2] *Hipergroupoid* $(H, \circ)$ *disebut* H_v*-semigrup jika*

$$(x \circ (y \circ z)) \cap ((x \circ y) \circ z) \neq \emptyset \tag{4}$$

untuk setiap $x, y, z \in H$.

Definisi 5. [14] *Elemen* $x \in H$ *disebut idempotent jika*

$$x^2 = x \circ x = x. \tag{5}$$

Definisi 6. [2] *Elemen* $e \in H$ *disebut identitas dari* $(H, \circ)$ *jika*

$$x \in x \circ e \cap e \circ x. \tag{6}$$

untuk setiap $x \in H$.

Definisi 7. [14] *Elemen $e \in H$ disebut identitas skalar dari $(H, \circ)$ jika*

$$x \circ e = e \circ x = x \tag{7}$$

untuk setiap $x \in H$. Jika e adalah identitas skalar dari $(H, \circ)$, maka e disebut identitas unik dari $(H, \circ)$.

Definisi 8. [14] *Hipergroupoid $(H, \circ)$ disebut komutatif jika memenuhi*

$$x \circ y = y \circ x \tag{8}$$

untuk setiap $x, y \in H$.

Definisi 9. [2] *Misalkan $\circ$ suatu hiperoperasi pada himpunan tak kosong H.*

1. *Hipergrupoid $(H, \circ)$ disebut semihipergrup jika untuk setiap $x, y, z \in H$, berlaku:*

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z. \tag{9}$$

2. *Hipergrupoid $(H, \circ)$ disebut kuasihipergrup jika untuk setiap $x \in H$, berlaku*

$$x \circ H = H = H \circ x. \tag{10}$$

Pers. (10) ini disebut aksioma reproduksi.

3. *Hipergrupoid $(H, \circ)$ disebut hipergrup jika merupakan semihipergrup dan kuasihipergrup.*

Definisi 10. [2] *Misalkan hipergrup $(H, \circ)$ dilengkapi dengan setidaknya satu identitas. Elemen $x^{-1} \in H$ disebut invers dari $x \in H$ jika terdapat sebuah identitas $e \in H$ sehingga berlaku*

$$e \in x \circ x^{-1} \cap x^{-1} \circ x. \tag{11}$$

Definisi 11. [14] *Hipergrup $(H, \circ)$ disebut hipergrup reguler jika memuat setidaknya satu identitas dan semua elemennya memiliki invers.*

Definisi 12. [16] *Semigrup komutatif $(H, \circ)$ disebut hipergrup kanonik jika berlaku:*

1. *Terdapat $\imath \in H$ sedemikian sehingga $\imath \circ x = x \circ \imath = x$, untuk setiap $x \in H$,*
2. *Untuk setiap $x \in H$, invers dari x bersifat tunggal,*
3. *$z \in x \circ y$ mengakibatkan $y \in x^{-1} \circ z$ dan $x \in z \circ y^{-1}$, untuk setiap $x, y, z \in H$. Dengan kata lain, $(H, \circ)$ reversible.*

Definisi 13. [17] *Hipergrup $(H, \circ)$ disebut siklik derajat hingga jika terdapat $h \in H$ dan $s \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga*

$$H = h \cup h^2 \cup \cdots \cup h^s, \tag{12}$$

dan

$$h \cup h^2 \cup \cdots \cup h^{m-1} \subseteq h^m, \tag{13}$$

untuk setiap $m \in \mathbb{N}$. Dalam kasus ini, h disebut generator dari H. Selain itu, jika terdapat $s > 1$ yang hingga dan memenuhi $H = h^s$ maka H disebut siklik dengan derajat tunggal $r = min\{s > 1 : H = h^s\}$.

3. Hasil dan Pembahasan

Epistasis merupakan efek fenotipe dari interaksi antar alel pada beberapa lokus. Akan dibahas epistasis dari gen dominan pada warna bulu anjing. Terdapat dua pasangan alelomorfik yang dinamai Aa dan Bb, dengan A dan B masing-masing dominan atas a dan b. Alelomorfik tersebut dipasangkan sebagai berikut: $AxBy$ dan $Axbb$ memiliki fenotipe bulu berwarna putih, $aaBy$ memiliki fenotipe bulu berwarna hitam, dan $aabb$ memiliki fenotipe bulu berwarna coklat. Pada kasus ini, $x = A$ atau a dan $y = B$ atau b. Dengan induk (P) anjing dengan bulu berwarna putih dan dengan bulu berwarna coklat, maka hasil persilangannya adalah sebagai berikut:

$$P : AABB \otimes aabb$$

$$F_1 : AaBb$$

dan

$$F_1 \otimes F_1 = AaBb \otimes AaBb$$

Jadi, hasil persilangan untuk generasi pertama disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Hasil persilangan pada generasi pertama

F_2	AB	Ab	aB	ab
AB	AABB	AABb	AaBB	AaBb
Ab	AABb	AAbb	AaBb	Aabb
aB	AaBB	AaBb	aaBB	aaBb
ab	AaBb	Aabb	aaBb	aabb

Berdasarkan Tabel 1, diperoleh F_2 : Putih, Hitam, Coklat. Untuk putih dinotasikan dengan A_1, hitam dengan A_2, dan coklat dengan A_3. Warna-warna ini kemudian dihimpun dalam suatu himpunan $H = \{A_1, A_2, A_3\}$. Sebagaimana telah disebutkan di atas, untuk memperoleh hiperstruktur pada H didefinisikan dua hiperoperasi.

3.1. Hiperoperasi I

Didefinisikan hiperoperasi pada H [14] yang dinyatakan dalam Tabel 2.

Hiperstruktur aljabar dari hiperoperasi I diberikan pada Proposisi 1.

Proposisi 1. *Misalkan $H = \{A_1, A_2, A_3\}$ himpunan semua warna hasil persilangan warna bulu anjing seperti dalam Tabel 1.*

Tabel 2. Hiperoperasi I pada H

$\otimes$	A_1	A_2	A_3
A_1	H	H	H
A_2	H	$\{A_2, A_3\}$	$\{A_2, A_3\}$
A_3	H	$\{A_2, A_3\}$	$\{A_3\}$

> *Dengan mendefinisikan hiperoperasi $\otimes$ seperti dalam Tabel 2 maka H mempunyai hiperstruktur aljabar berupa: (1) hipergrup komutatif, (2) hipergrup reguler, (3) H_v-semigrup dengan elemen idempoten A_3, elemen identitas $A_1, A_2,\ A_3$, dan (4) hipergrup siklik berorder dua dengan generatornya A_1.*

1. *Bukti.* Berdasarkan Definisi 1, dapat dilihat pada Tabel 2 bahwa $\otimes$ merupakan pemetaan sehingga $\otimes$ merupakan hiperoperasi. Akibatnya, $(H, \otimes)$ merupakan hipergrupoid berdasarkan pada Definisi 2. Selanjutnya, dapat dilihat juga bahwa perkalian elemennya bersifat komutatif sehingga $(H, \otimes)$ merupakan hipergrupoid yang bersifat komutatif yang bersesuaian dengan Definisi 8. Tabel 2 juga menunjukkan bahwa $(H, \otimes)$ memenuhi aksioma reproduksi, karena di setiap baris dan kolom terdapat H. Artinya $(H, \otimes)$ merupakan kuasihipergrup sesuai dengan Definisi 9.

Selanjutnya, akan diperiksa apakah $(H, \otimes)$ bersifat asosiatif dengan menggunakan Tabel 3.

Tabel 3. Sifat asosiatif hiperoperasi pada H

x	y	z	$x \otimes y$	$y \otimes z$	$(x \otimes y) \otimes z$	$x \otimes (y \otimes z)$
A_1	A_1	A_1	H	H	H	H
A_1	A_1	A_2	H	H	H	H
A_1	A_1	A_3	H	H	H	H
A_1	A_2	A_1	H	H	H	H
A_1	A_2	A_2	H	$\{A_2, A_3\}$	H	H
A_1	A_2	A_3	H	$\{A_2, A_3\}$	H	H
A_1	A_3	A_1	H	H	H	H
A_1	A_3	A_2	H	$\{A_2, A_3\}$	H	H
A_1	A_3	A_3	H	$\{A_3\}$	H	H
A_2	A_1	A_1	H	H	H	H
A_2	A_1	A_2	H	H	H	H
A_2	A_1	A_3	H	H	H	H
A_2	A_2	A_1	$\{A_2, A_3\}$	H	H	H
A_2	A_2	A_2	$\{A_2, A_3\}$	$\{A_2, A_3\}$	$\{A_2, A_3\}$	$\{A_2, A_3\}$
A_2	A_2	A_3	$\{A_2, A_3\}$	$\{A_2, A_3\}$	$\{A_2, A_3\}$	$\{A_2, A_3\}$
A_2	A_3	A_1	$\{A_2, A_3\}$	H	H	H
A_2	A_3	A_2	$\{A_2, A_3\}$	$\{A_2, A_3\}$	$\{A_2, A_3\}$	$\{A_2, A_3\}$
A_2	A_3	A_3	$\{A_2, A_3\}$	$\{A_3\}$	$\{A_2, A_3\}$	$\{A_2, A_3\}$
A_3	A_1	A_1	H	H	H	H
A_3	A_1	A_2	H	H	H	H
A_3	A_1	A_3	H	H	H	H
A_3	A_2	A_1	$\{A_2, A_3\}$	H	H	H
A_3	A_2	A_2	$\{A_2, A_3\}$	$\{A_2, A_3\}$	$\{A_2, A_3\}$	$\{A_2, A_3\}$
A_3	A_2	A_3	$\{A_2, A_3\}$	$\{A_2, A_3\}$	$\{A_2, A_3\}$	$\{A_2, A_3\}$
A_3	A_3	A_1	$\{A_3\}$	H	H	H
A_3	A_3	A_2	$\{A_3\}$	$\{A_2, A_3\}$	$\{A_2, A_3\}$	$\{A_2, A_3\}$
A_3	A_3	A_3	$\{A_3\}$	$\{A_3\}$	$\{A_3\}$	$\{A_3\}$

Berdasarkan Tabel 3, $(H, \otimes)$ bersifat asosiatif karena memenuhi pers. (9). Artinya, himpunan $(H, \otimes)$ merupakan suatu semihipergrup sebagaimana disebutkan pada Definisi 9. Hal ini mengakibatkan $(H, \otimes)$ juga H_v-semigrup, karena$(H, \otimes)$ memenuhi pers. (4) pada Definisi 4. Jadi, berdasarkan Definisi 9, karena $(H, \otimes)$ kuasihipergrup sekaligus semihipergrup dengan sifat komutatif, maka $(H, \otimes)$ merupakan hipergrup komutatif.

Berikutnya, akan diperiksa elemen idempotent dan identitas dari $(H, \otimes)$. Dapat dilihat dari Tabel 2 bahwa A_3 merupakan satu-satunya elemen idempotent dari $(H, \otimes)$, karena hanya A_3 yang memenuhi $A_3^2 = A_3 \otimes A_3 = A_3$ dengan merujuk pada Definisi 5. Di sisi lain, identitas dari $(H, \otimes)$ dapat diperiksa dengan cara menunjukkan apakah terdapat $e \in H$ yang memenuhi pers. (6) pada Definisi 6.

- Pilih $e = A_1$.
  1. Untuk $x = A_1,\ A_1 \otimes A_1 = H$ sehingga $A_1 \in H$.
  2. Untuk $x = A_2,\ A_2 \otimes A_1 = H$ dan $A_1 \otimes A_2 = H$ sehingga $A_2 \in H \cap H$.
  3. Untuk $x = A_3,\ A_3 \otimes A_1 = H$ dan $A_1 \otimes A_3 = H$ sehingga $A_3 \in H \cap H$.
- Pilih $e = A_2$.
  1. Untuk $x = A_1,\ A_1 \otimes A_2 = H$ dan $A_2 \otimes A_1 = H$ sehingga $A_1 \in H \cap H$.
  2. Untuk $x = A_2,\ A_2 \otimes A_2 = \{A_2, A_3\}$ sehingga $A_2 \in \{A_2, A_3\}$.
  3. Untuk $x = A_3,\ A_3 \otimes A_2 = \{A_2, A_3\}$ dan $A_2 \otimes A_3 = \{A_2, A_3\}$ sehingga $A_3 \in \{A_2, A_3\} \cap \{A_2, A_3\}$.
- Pilih $e = A_3$.
  1. Untuk $x = A_1,\ A_1 \otimes A_3 = H$ dan $A_3 \otimes A_1 = H$ sehingga $A_1 \in H \cap H$.
  2. Untuk $x = A_2,\ A_2 \otimes A_3 = \{A_2, A_3\}$ dan $A_3 \otimes A_2 = \{A_2, A_3\}$ sehingga $A_2 \in \{A_2, A_3\} \cap \{A_2, A_3\}$.
  3. Untuk $x = A_3,\ A_3 \otimes A_3 = \{A_3\}$ sehingga $A_3 \in \{A_3\} \cap \{A_3\}$.

Dengan demikian, elemen identitas dari $(H, \otimes)$ adalah A_1, A_2, dan A_3.

Selanjutnya, akan diperiksa apakah $(H, \otimes)$ merupakan hipergrup reguler. Telah diperoleh identitas dari $(H, \otimes)$ adalah A_1, A_2, dan A_3. Kemudian, akan diperiksa apakah setiap elemen di $(H, \otimes)$ memiliki setidaknya satu invers. Artinya, akan dicari apakah untuk setiap $x \in H$ terdapat x^{-1} yang memenuhi pers. (11) pada Definisi 10.

- Untuk $x = A_1$.
  1. Pilih $x^{-1} = A_1, A_1 \otimes A_1 = H$ sehingga $A_1, A_2, A_3 \in H$.
  2. Pilih $x^{-1} = A_2,\ A_1 \otimes A_2 = H$ dan $A_2 \otimes A_1 = H$ sehingga $A_1, A_2, A_3 \in H \cap H$.
  3. Pilih $x^{-1} = A_3,\ A_1 \otimes A_3 = H$ dan $A_3 \otimes A_1 = H$ sehingga $A_1, A_2, A_3 \in H \cap H$.
- Untuk $x = A_2$.
  1. Pilih $x^{-1} = A_1,\ A_2 \otimes A_1 = H$ dan $A_1 \otimes A_2 = H$ sehingga $A_1, A_2, A_3 \in H \cap H$.
  2. Pilih $x^{-1} = A_2,\ A_2 \otimes A_2 = \{A_2, A_3\}$ sehingga $A_2, A_3 \in \{A_2, A_3\}$.
  3. Pilih $x^{-1} = A_3,\ A_2 \otimes A_3 = \{A_2, A_3\}$ dan $A_3 \otimes A_2 = \{A_2, A_3\}$ sehingga $A_2, A_3 \in \{A_2, A_3\} \cap \{A_2, A_3\}$.
- Untuk $x = A_3$.
  1. Pilih $x^{-1} = A_1,\ A_3 \otimes A_1 = H$ dan $A_1 \otimes A_3 = H$ sehingga $A_1, A_2, A_3 \in H \cap H$.
  2. Pilih $x^{-1} = A_2,\ A_3 \otimes A_2 = \{A_2, A_3\}$ dan $A_2 \otimes A_3 = \{A_2, A_3\}$ sehingga $A_2, A_3 \in \{A_2, A_3\} \cap \{A_2, A_3\}$.
  3. Pilih $x^{-1} = A_3,\ A_3 \otimes A_3 = \{A_3\}$ sehingga $A_3 \in \{A_3\}$.

Maka, diperoleh $A_1^{-1} = A_2^{-1} = A_3^{-1} = A_1, A_2, A_3$. Karena $(H, \otimes)$ memiliki setidaknya satu identitas dan setiap elemen di $(H, \otimes)$ memiliki setidaknya satu invers, maka $(H, \otimes)$ hipergrup reguler, sesuai dengan Definisi 11.

Berikutnya, akan diperiksa apakah terdapat identitas skalar di $(H, \otimes)$. Artinya, akan diperiksa apakah terdapat $e \in H$ sehingga berlaku pers. (7) pada Definisi 7. Terlihat dari Tabel 2 bahwa tidak ada anggota H yang memenuhi sehingga $(H, \otimes)$ tidak memiliki identitas skalar. Akibatnya, $(H, \otimes)$ tidak memiliki identitas unik. Berdasarkan Definisi 12, karena $(H, \otimes)$ tidak memiliki identitas unik, $(H, \otimes)$ bukan hipergrup kanonik.

Kemudian, akan diperiksa apakah $(H, \otimes)$ merupakan hipergrup siklik yang merujuk pada Definisi 13. Pertama, akan diperiksa apakah terdapat $h \in H$ sedemikian sehingga berlaku pers. (11) untuk suatu $s \in \mathbb{N}$. Pilih $h = A_1$, maka $A_1^2 = A_1 \otimes A_1 = H$ sehingga $H = A_1^2$. Jadi, untuk $h = A_1$ dan $s = 2, H = A_1^2$. Kedua, akan diperiksa apakah berlaku pers. (13) untuk setiap $m \in \mathbb{N}$ menggunakan induksi matematika.

- Langkah basis (untuk $m = 2$), $A_1 \subseteq A_1^2 = H$ bernilai benar.
- Asumsikan benar untuk $m = k$. $A_1 \cup A_1^2 \cup A_1^3 \cup \cdots \cup A_1^{k-1} \subseteq A_1^k$ bernilai benar.
- Akan dibuktikan benar untuk $m = k + 1$.

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_1^2 \cup A_1^3 \cup \cdots \cup A_1^{k-1} &\subseteq A_1^k \\ A_1 \cup A_1^2 \cup A_1^3 \cup \cdots \cup A_1^{k-1} \cup A_1^{k-1} &\subseteq A_1^k \\ A_1 \cup A_1^2 \cup A_1^3 \cup \cdots \cup A_1^{k-1} \cup A_1^{k-1} \otimes A_1 &\subseteq A_1^k \otimes A_1 \\ A_1 \cup A_1^2 \cup A_1^3 \cup \cdots \cup A_1^{k-1} \cup A_1^k &\subseteq A_1^{k+1}. \end{aligned}$$

Untuk $m = k+1$, terbukti $A_1 \cup A_1^2 \cup A_1^3 \cup \cdots \cup A_1^{k-1} \cup A_1^k \subseteq A_1^{k+1}$ bernilai benar.

Berdasarkan induksi matematika, untuk $h = A_1$, berlaku pers. (13). Jadi, $(H, \otimes)$ merupakan hipergrup siklik dengan derajat 2 dan generator A_1. $\square$

Pada bagian selanjutnya dibahas hiperoperasi lain yang berbeda dari hiperoperasi sebelumnya dan diselidiki hiperstruktur aljabarnya.

3.2. Hiperoperasi II

Didefinisikan hiperoperasi pada H yang disajikan pada Tabel 4.

Tabel 4. Hiperoperasi II pada H

$\otimes$	A_1	A_2	A_3
A_1	H	H	H
A_2	H	H	H
A_3	H	H	H

Hasil selanjutnya dinyatakan dalam Proposisi 2.

Proposisi 2. *Misalkan $H = \{A_1, A_2, A_3\}$ himpunan semua warna hasil persilangan warna bulu anjing seperti dalam Tabel 1. Dengan mendefinisikan hiperoperasi $\otimes$ seperti dalam Tabel 4 maka H mempunyai hiperstruktur aljabar berupa: (1) hipergrup komutatif, (2) hipergrup reguler, (3) H_v-semigrup tanpa elemen idempoten, elemen identitas $A_1, A_2,\ A_3$, dan (4) hipergrup siklik berorder dua dengan generatornya $A_1, A_2,\ A_3$.*

Bukti. Berdasarkan Definisi 1 dan dengan mengamati Tabel 4, $\otimes$ merupakan pemetaan sehingga $\otimes$ merupakan hiperoperasi. Akibatnya, $(H, \otimes)$ merupakan hipergrupoid yang komutatif, mengacu pada Definisi 2 dan Definisi 8. Selanjutnya, $(H, \otimes)$ merupakan H_v-semigrup karena untuk setiap $x, y, z \in H$ berlaku $x \otimes (y \otimes z) \cap (x \otimes y) \otimes z = H \neq \emptyset$ sesuai dengan Definisi 4. Untuk menunjukkan bahwa $(H, \otimes)$ hipergrup, perhatikan bahwa $(H, \otimes)$ suatu semihipergrup karena untuk setiap elemen di H, hasil persilangannya menghasilkan himpunan H. Dengan kata lain, untuk setiap $x, y, z \in H$ berlaku $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z = H$. Di sisi lain, untuk setiap $x \in H$ juga berlaku $x \otimes H = H \otimes x = H$. Akibatnya $(H, \otimes)$ suatu kuasihipergrup. Karena $(H, \otimes)$ semihipergrup dan kuasihipergrup, maka $(H, \otimes)$ hipergrup, sebagaimana dijelaskan pada Definisi 9.

Eksistensi elemen idempoten dan identitas dari $(H, \otimes)$ dapat ditunjukkan sebagai berikut. Berdasarkan Definisi 5, untuk setiap $x \in H$, $x^2 = x \otimes x = H \neq x$, maka $(H, \otimes)$ tidak memiliki elemen idempotent. Namun demikian, identitas dari $(H, \otimes)$ dapat dihitung dengan cara yang sama dengan Proposisi 1, yaitu dengan menggunakan pers. (6) pada Definisi 6.

- Pilih $e = A_1$.
  1. Untuk $x = A_1,\ A_1 \otimes A_1 = H$ sehingga $A_1 \in H$.
  2. Untuk $x = A_2,\ A_2 \otimes A_1 = H$ dan $A_1 \otimes A_2 = H$ sehingga $A_2 \in H \cap H$.
  3. Untuk $x = A_3,\ A_3 \otimes A_1 = H$ dan $A_1 \otimes A_3 = H$ sehingga $A_3 \in H \cap H$.
- Pilih $e = A_2$.
  1. Untuk $x = A_1,\ A_1 \otimes A_2 = H$ dan $A_2 \otimes A_1 = H$ sehingga $A_1 \in H \cap H$.
  2. Untuk $x = A_2,\ A_2 \otimes A_2 = H$ sehingga $A_2 \in H$.
  3. Untuk $x = A_3,\ A_3 \otimes A_2 = H$ dan $A_2 \otimes A_3 = H$ sehingga $A_3 \in H \cap H$.
- Pilih $e = A_3$.
  1. Untuk $x = A_1,\ A_1 \otimes A_3 = H$ dan $A_3 \otimes A_1 = H$ sehingga $A_1 \in H \cap H$.
  2. Untuk $x = A_2,\ A_2 \otimes A_3 = H$ dan $A_3 \otimes A_2 = H$ sehingga $A_2 \in H \cap H$
  3. Untuk $x = A_3,\ A_3 \otimes A_3 = H$ sehingga $A_3 \in H$.

Jadi, identitas dari $(H, \otimes)$ adalah A_1, A_2, dan A_3.

Berikutnya, akan diperiksa apakah $(H, \otimes)$ merupakan hipergrup reguler. Telah diperoleh identitas dari $(H, \otimes)$ adalah A_1, A_2, dan A_3. Kemudian akan dicari invers dari setiap elemen pada $(H, \otimes)$. Artinya, akan dicari apakah untuk setiap $x \in H$ terdapat x^{-1} yang memenuhi pers. (11) pada definisi 10.

- Untuk $x = A_1$.
  1. Pilih $x^{-1} = A_1, A_1 \otimes A_1 = H$ sehingga $A_1, A_2, A_3 \in H$.
  2. Pilih $x^{-1} = A_2,\ A_1 \otimes A_2 = H$ dan $A_2 \otimes A_1 = H$ sehingga $A_1, A_2, A_3 \in H \cap H$.
  3. Pilih $x^{-1} = A_3,\ A_1 \otimes A_3 = H$ dan $A_3 \otimes A_1 = H$ sehingga $A_1, A_2, A_3 \in H \cap H$.
- Untuk $x = A_2$.
  1. Pilih $x^{-1} = A_1,\ A_2 \otimes A_1 = H$ dan $A_1 \otimes A_2 = H$ sehingga $A_1, A_2, A_3 \in H \cap H$.
  2. Pilih $x^{-1} = A_2,\ A_2 \otimes A_2 = H$ sehingga $A_1, A_2, A_3 \in H$

3. Pilih $x^{-1} = A_3,\ A_2 \otimes A_3 = H$ dan $A_3 \otimes A_2 = H$ sehingga $A_1, A_2, A_3 \in H \cap H$.

- Untuk $x = A_3$.
  1. Pilih $x^{-1} = A_1,\ A_3 \otimes A_1 = H$ dan $A_1 \otimes A_3 = H$ sehingga $A_1, A_2, A_3 \in H \cap H$.
  2. Pilih $x^{-1} = A_2,\ A_3 \otimes A_2 = H$ dan $A_2 \otimes A_3 = H$ sehingga $A_1, A_2, A_3 \in H \cap H$.
  3. Pilih $x^{-1} = A_3,\ A_3 \otimes A_3 = H$ sehingga $A_1, A_2, A_3 \in H$.

Maka, diperoleh $A_1^{-1} = A_2^{-1} = A_3^{-1} = A_1, A_2, A_3$. Karena $(H, \otimes)$ memiliki setidaknya satu identitas dan setiap elemen di $(H, \otimes)$ memiliki setidaknya satu invers, maka $(H, \otimes)$ hipergrup reguler, berdasarkan Definisi 11.

Identitas skalar dari $(H, \otimes)$ tidak ada karena setiap hiperoperasi menghasilkan himpunan H, yaitu tidak ada $e \in H$ yang memenuhi pers. (7) pada Definisi 7. Berdasarkan Definisi 12, hal ini mengakibatkan $(H, \otimes)$ bukan hipergrup kanonik.

Kemudian akan dibuktikan bahwa himpunan $(H, \otimes)$ suatu hipergrup siklik yang merujuk pada Definisi 13. Pertama, akan diperiksa apakah terdapat $h \in H$ yang memenuhi pers. (11) untuk suatu $s \in \mathbb{N}$. Pilih $h = A_1$, maka $= A_1^2 = A_1 \otimes A_1 = H$. Dengan demikian, $H = A_1^2$. Jadi, untuk $h = A_1$ dan $s = 2,\ H = A_1^2$. Hal ini juga berlaku untuk A_2 dan A_3. Kedua, akan diperiksa apakah berlaku pers. (13) untuk setiap $m \in \mathbb{N}$ menggunakan induksi matematika.

1. Langkah basis (untuk $m = 2$), $A_1 \subseteq A_1^2 = H$ bernilai benar.
2. Asumsikan benar untuk $m = k$. $A_1 \cup A_1^2 \cup A_1^3 \cup \cdots \cup A_1^{k-1} \subseteq A_1^k$ bernilai benar.
3. Akan dibuktikan benar untuk $m = k + 1$.

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_1^2 \cup A_1^3 \cup \cdots \cup A_1^{k-1} &\subseteq A_1^k \\ A_1 \cup A_1^2 \cup A_1^3 \cup \cdots \cup A_1^{k-1} \cup A_1^{k-1} &\subseteq A_1^k \\ A_1 \cup A_1^2 \cup A_1^3 \cup \cdots \cup A_1^{k-1} \cup A_1^{k-1} \otimes A_1 &\subseteq A_1^k \otimes A_1 \\ A_1 \cup A_1^2 \cup A_1^3 \cup \cdots \cup A_1^{k-1} \cup A_1^k &\subseteq A_1^{k+1}. \end{aligned}$$

Untuk $m = k+1$, terbukti $A_1 \cup A_1^2 \cup A_1^3 \cup \cdots \cup A_1^{k-1} \cup A_1^k \subseteq A_1^{k+1}$ bernilai benar.

Berdasarkan induksi matematika, untuk $h = A_1$, berlaku pers. (13). Perhitungan di atas juga berlaku untuk $h = A_2$ dan $h = A_3$ karena setiap hiperoperasi menghasilkan H. Jadi, $(H, \otimes)$ merupakan hipergrup siklik dengan derajat 2 dan generator A_1, A_2, A_3. □

4. Kesimpulan

Pada penelitian ini dibahas hiperstruktur aljabar dari himpunan yang merupakan hasil persilangan epistasis gen dominan dalam warna bulu anjing dengan warna bulu putih dan coklat, yaitu putih (A_1), hitam (A_2), dan coklat (A_3). Hiperoperasi pertama terhadap himpunan $H = \{A_1, A_2, A_3\}$ mempunyai hiperstruktur aljabar berupa hipergrup komutatif, hipergrup reguler, hipergrup siklik, dan H_v-semigrup dengan satu elemen idempoten, tiga elemen identitas, dan satu generator. Namun, untuk hiperoperasi kedua mempunyai hiperstruktur aljabar berupa hipergrupoid, hipergrup komutatif, hipergrup reguler, hipergrup siklik dan H_v-semigrup tanpa elemen idempoten, tiga elemen identitas, dan tiga generator. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa hiperstruktur aljabar pada himpunan $(H, \otimes)$ oleh hiperoperasi I berbeda dengan hiperstruktur aljabar oleh hiperoperasi II. Perbedaan ini antara lain pada elemen idempoten di $(H, \otimes)$ dan juga generator pada hipergrup sikliknya. Dengan demikian, hiperstruktur aljabar ditentukan berdasarkan hiperoperasi yang diberikan pada suatu himpunan. Untuk penelitian selanjutnya dapat dikembangkan berbagai alternatif hiperoperasi dari masalah pewarisan biologi sehingga menghasilkan hiperstruktur aljabar yang bervariasi.

Kontribusi Penulis. **Alifa Raida Alamsyah:** Konseptualisasi, metodologi, analisis formal, penulisan—persiapan draf asli. **Edi Kurniadi:** Konseptualisasi, validasi, penulisan—tinjauan dan penyuntingan, supervisi. **Anita Triska:** Konseptualisasi, validasi, penulisan—tinjauan dan penyuntingan, supervisi. Semua penulis telah membaca dan menyetujui versi manuskrip yang diterbitkan.

Ucapan Terima Kasih. Para penulis menyampaikan terima kasih kepada editor dan reviewer atas pembacaan yang cermat, kritik yang mendalam, dan rekomendasi yang praktis untuk meningkatkan kualitas tulisan ini.

Pembiayaan. Penelitian ini tidak menerima pembiayaan eksternal.

Konflik Kepentingan. Para penulis menyatakan tidak ada konflik kepentingan yang terkait dengan artikel ini.

Referensi

[1] F. Marty, "Sur une generalization de la notion de groups," in 8th congress Math. Scandinaves, Stockholm, (1934), 1934.
[2] P. Corsini and V. Leoreanu, *Applications of Hyperstructure Theory*. Boston, MA: Springer US, 2003. doi: 10.1007/978-1-4757-3714-1.
[3] B. Davvaz, *Polygroup Theory and Related Systems*. WORLD SCIENTIFIC, 2012. doi: 10.1142/8593.
[4] B. Davvaz, A. Dehghan Nezhad, and M. M. Heidari, "Inheritance examples of algebraic hyperstructures," *Inf. Sci. (N. Y.)*, vol. 224, pp. 180–187, Mar. 2013, doi: 10.1016/j.ins.2012.10.023.
[5] B. Davvaz, *Hyperring Theory and Applications*. 2007. [Online]. Available: https://books.google.co.id/books?id=iPT9jwEACAAJ.
[6] B. Davvaz and A. Nezhad, "Chemical Examples in Hypergroups," *Ratio Mathematica*, vol. 14, Aug. 2010.
[7] B. Davvaz, A. Nezhad, and A. Benvidi, "Chain Reactions as Experimental Examples of Ternary Algebraic Hyperstructures," *Match*, vol. 65, Jan. 2011.
[8] B. Davvaz and A. Nezhad, "Dismutation reactions as experimental verifications of ternary algebraic hyperstructures," *Match*, vol. 68, pp. 551–559, Jan. 2012.
[9] B. Davvaz, A. Nezhad, and A. Benvidi, "Chemical Hyperalgebra: Dismutation Reactions," *Match*, vol. 67, Jan. 2012.
[10] B. Davvaz, A. Nezhad, and M. Mazloum-Ardakani, "Chemical Hyperalgebra: Redox Reactions," *Match*, vol. 71, pp. 323–331, Jan. 2014.
[11] Š. Hošková, J. Chvalina, and P. Racková, "Transposition hypergroups of Fredholm integral operators and related hyperstructures. Part I," *Journal of Basic Science*, vol. 4, no. 1, pp. 43–54, 2008.
[12] Š. Hošková, J. Chvalina, and P. Racková, "Transposition hypergroups of Fredholm integral operators and related hyperstructures. Part II," *Journal of Basic Science*, vol. 4, no. 1, pp. 43–54, 2008.
[13] A. Dehghan Nezhad, S. M. Moosavi Nejad, M. Nadjafikhah, and B. Davvaz, "A physical example of algebraic hyperstructures: Leptons," *Indian Journal of Physics*, vol. 86, no. 11, pp. 1027–1032, Nov. 2012, doi: 10.1007/s12648-012-0151-x.
[14] M. Al Tahan and B. Davvaz, "Algebraic hyperstructures associated to biological inheritance," *Math. Biosci.*, vol. 285, pp. 112–118, Mar. 2017, doi: 10.1016/j.mbs.2017.01.002.
[15] J. M. Álvarez-Castro, "Genetic Architecture," in *Encyclopedia of Evolutionary Biology*, Elsevier, 2016, pp. 127–135. doi: 10.1016/B978-0-12-800049-6.00316-4.
[16] J. Mittas, "Hypergroups canoniques," *Math. Balkanica*, vol. 2, pp. 165–179, 1972.
[17] T. Vougiouklis, *Hyperstructures and Their Representations*. in Hadronic Press Monographs. Hadronic Press, 1994. [Online]. Available: https://books.google.co.id/books?id=J_NUAAAAYAAJ