RESEARCH ARTICLE • OPEN ACCESS

Derivasi di *Pseudo BG*-aljabar

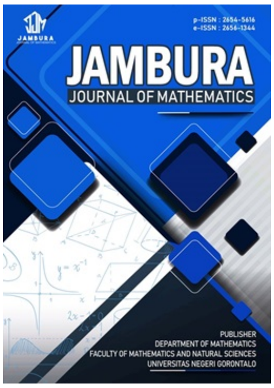
Ayuni Putri, Sri Gemawati, dan Syamsudhuha

Volume 7, Issue 1, Pages 34–39, February 2025

Diterima 12 November 2024, Direvisi 5 Januari 2025, Disetujui 10 Januari 2025, Diterbitkan 1 Februari 2025

To Cite this Article : A. Putri, S. Gemawati, dan S. Syamsudhuha,“Derivasi di *Pseudo BG*-aljabar”, *Jambura J. Math*, vol. 7, no. 1, pp. 34–39, 2025, *https://doi.org/10.37905/jjom.v7i1.28306*

JOURNAL INFO • JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS



Homepage	:	http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/index
Journal Abbreviation	:	Jambura J. Math.
Frequency	:	Biannual (February and August)
Publication Language	:	English (preferable), Indonesia
DOI	:	https://doi.org/10.37905/jjom
Online ISSN	:	2656-1344
Editor-in-Chief	:	Hasan S. Panigoro
Publisher	:	Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo
Country	:	Indonesia
OAI Address	:	http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/oai
Google Scholar ID	:	iWLjgaUAAAAJ
Email	:	info.jjom@ung.ac.id

Jambura Journal of Mathematics, Volume 7, Issue 1, Pages 34–39, February 2025 https://doi.org/10.37905/jjom.v7i1.28306

Research Article

Check for updates

Derivasi di *Pseudo BG*-aljabar

Ayuni Putri[1,*], **Sri Gemawati**[1], **dan Syamsudhuha**[1]

[1]*Jurusan Matematika, Universitas Riau, Pekanbaru, Indonesia*

ARTICLE HISTORY

Diterima 12 November 2024
Direvisi 5 Januari 2025
Disetujui 10 Januari 2025
Diterbitkan 1 Februari 2025

KATA KUNCI

Pseudo BG-aljabar
(l, r)-derivasi
(r, l)-derivasi
Derivasi kiri
Derivasi tipe 1
Derivasi tipe 2.

KEYWORDS

Pseudo BG-algebra
(l, r)-derivation
(r, l)-derivation
Left derivation
Type 1 derivation Type 2 derivation

ABSTRAK. *BG-aljabar $(P; *, 0)$ adalah suatu himpunan tak kosong P dengan operasi biner $*$ dan konstanta 0 yang memenuhi aksioma-aksioma berikut: (BG1) $p * p = 0$, (BG2) $p * 0 = p$, dan (BG3) $(p * q) * (0 * q) = p$ untuk setiap $p, q \in P$. Pseudo BG-aljabar yang merupakan generalisasi dari BG-aljabar adalah suatu aljabar $(R; *, \diamond, 0)$ yang memenuhi aksioma-aksioma berikut: (pBG1) $p * 0 = p \diamond 0 = p$, (pBG2) $p * p = p \diamond p = 0$, dan (pBG3) $(p * q) \diamond (0 * q) = (p \diamond q) * (0 \diamond q) = p$ untuk setiap $p, q \in R$. Pada BG-aljabar telah dikenal konsep (l, r)-derivasi, (r, l)-derivasi, dan derivasi kiri. Artikel ini bertujuan untuk membahas dan mengembangkan konsep derivasi pada pseudo BG-aljabar melalui pendefinisian dua operasi baru, yaitu $\circledast$ dan $\odot$, dalam struktur pseudo BG-aljabar $(R; *, \diamond, 0)$. Operasi tersebut didefinisikan sebagai $p \circledast q = q * (q \diamond p)$ dan $p \odot q = q \diamond (q * p)$ untuk setiap $p, q \in R$. Dalam penelitian ini, operasi $\wedge$ pada derivasi BG-aljabar diganti dengan operasi $\circledast$ dan $\odot$, serta diberikan syarat-syarat tertentu agar dapat menghasilkan tipe-tipe derivasi baru. Melalui pendekatan ini, diperoleh tiga jenis derivasi utama dalam pseudo BG-aljabar, yaitu (l, r)-derivasi, (r, l)-derivasi, dan derivasi kiri dengan tipe 1 dan tipe 2. Hasil analisis menunjukkan bahwa pendefinisian operasi baru ini menghasilkan beberapa sifat penting, termasuk formula untuk $\delta(p)$, peran elemen khusus 0, kereguleran dalam derivasi, serta hubungan antara derivasi reguler dan δ sebagai fungsi identitas.*

ABSTRACT. *A BG-algebra $(P; *, 0)$ is defined as a non-empty set P that includes a constant 0 and a binary operation $*$ which adheres to the following axioms: (BG1) $p * p = 0$, (BG2) $p * 0 = p$, and (BG3) $(p * q) * r = p * (r * (0 * q))$ for all $p, q, r \in P$. Pseudo BG-algebra is a generalization of BG-algebra, which is an algebra $(R; *, \diamond, 0)$ that satisfies the following axioms: (pBG1) $p * 0 = p \diamond 0 = p$, (pBG2) $p * p = p \diamond p = 0$, and (pBG3) $(p * q) \diamond (0 * q) = (p \diamond q) * (0 \diamond q) = p$ for all $p, q \in R$. In BG-algebra introduced an (l, r)-derivation, an (r, l)-derivation, and left derivation. This article aims to discuss and develop the concept of derivations in pseudo BG-algebras by introducing two new operations, $\circledast$ and $\odot$, within the structure of pseudo BG-algebra $(R; *, \diamond, 0)$. These operations are defined as $p \circledast q = q * (q \diamond p)$ and $p \odot q = q \diamond (q * p)$ for each $p, q \in R$. In this research, the $\wedge$ operation in BG-algebra derivations replaced with the $\circledast$ and $\odot$ operations under certain conditions, leading to the formulation of new types of derivations. Through this approach, three main types of derivations in pseudo BG-algebras are identified: (l, r)-derivation, (r, l)-derivation, and left derivation of type 1 and type 2. The results reveal several significant properties, including a formula for $\delta(p)$, the role of the special element 0, regularity in derivations, and the relationship between regular derivations and δ as the identity function. This study contributes to advancing the theory of pseudo BG-algebras and its potential applications in other algebraic structures.*

1. Pendahuluan

B-aljabar telah menjadi landasan penting dalam studi logika dan aljabar abstrak. Dalam beberapa tahun terakhir, perhatian telah beralih pada generalisasi *B*-aljabar, yang dikenal sebagai *BG*-aljabar [1]. *BG*-aljabar memperluas aksioma di *B*-aljabar sehingga menghasilkan keragaman sifat yang dapat direpresentasikan. Kemudian, ditemukan konsep *Pseudo BG*-aljabar, yaitu suatu aljabar $(R; *, \diamond, 0)$ yang memenuhi aksioma-aksioma berikut: (*pBG1*) $p * 0 = p \diamond 0 = p$, (*pBG2*) $p * p = p \diamond p = 0$, dan (*pBG3*) $(p * q) \diamond (0 * q) = (p \diamond q) * (0 \diamond q) = p$ untuk setiap $p, q \in R$ [2]. Adapun *pseudo BG*-aljabar ini merupakan perluasan dari *BG*-aljabar yang memungkinkan adanya elemen-elemen yang tidak memenuhi semua aksioma dari *BG*-aljabar, namun tetap memenuhi beberapa aksioma lainnya. Selain *pseudo BG*-aljabar, para peneliti telah mengkaji konsep *pseudo* pada struktur aljabar lainnya, seperti pada *BCK*-aljabar, *BCI*-aljabar, dan *BE*-aljabar [3–5]. Kemudian, pada *pseudo BE*-aljabar telah dibahas beberapa konsep seperti yang dibahas dalam [6–8]. Penelitian tentang *Pseudo* juga telah dibahas pada *BF*-aljabar [9].

Pada konteks aljabar, derivasi adalah fungsi yang memenuhi aturan-aturan tertentu, mirip dengan konsep derivatif dalam kalkulus. Suatu derivasi di *BG*-aljabar didefinisikan sebagai fungsi yang memetakan elemen-elemen *BG*-aljabar ke dirinya sendiri, dengan memenuhi beberapa sifat tertentu. Ada beberapa jenis derivasi yang telah didefinisikan pada *BG*-aljabar, yaitu (*l*, *r*)-derivasi, (*r*, *l*)-derivasi, dan derivasi kiri. Pada *BG*-aljabar

*Penulis Korespondensi.

Email : *ayuni.putri6817@grad.unri.ac.id* (A. Putri)
Homepage : http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/index / E-ISSN : 2656-1344

$(P;\ *,\ 0)$, (*l*, *r*)-derivasi di P adalah suatu *self-map* δ di P yang memenuhi: $\delta(p * q) = (\delta(p) * q) \wedge (p * \delta(q))$ untuk setiap $p, q \in P$, dengan $p \wedge q = q * (q * p)$. Apabila δ memenuhi $\delta(p * q) = (p * \delta(q)) \wedge (\delta(p) * q)$, δ disebut (*r*, *l*)-derivasi di P. Apabila δ merupakan (*l*, *r*)-derivasi sekaligus (*r*, *l*)-derivasi, maka δ dikatakan derivasi di P. Suatu *self-map* δ disebut derivasi kiri di P jika memenuhi $\delta(p * q) = (p * \delta(q)) \wedge (q * \delta(p))$ untuk setiap $p, q \in P$ [10].

Salah satu sifat penting dari derivasi di *BG*-aljabar adalah kereguleran. Suatu derivasi dikatakan reguler jika mempertahankan sifat elemen identitas dalam operasi yang ada di *BG*-aljabar, namun hanya khusus untuk elemen 0. Dengan kata lain, suatu derivasi δ dari *BG*-aljabar $(P;\ *,\ 0)$ dikatakan reguler jika $\delta(0) = 0$ [10]. Selain itu, derivasi di *BG*-aljabar juga memiliki implikasi pada konsep-konsep lain dalam aljabar tersebut, seperti konsep *fixed set* dan *kernel*. *Fixed set* adalah himpunan elemen-elemen yang tidak berubah ketika dioperasikan oleh derivasi, sementara *kernel* adalah himpunan elemen-elemen yang hasil derivasinya adalah elemen 0 [10]. Dengan memahami konsep derivasi di *BG*-aljabar, dapat dikembangkan jenis derivasi baru, seperti pada [11] yang membahas tentang (*f*, *g*)-derivasi di *BG*-aljabar. Pembahasan tentang pengembangan konsep derivasi telah dikaji pada struktur aljabar lainnya, seperti *t*-derivasi di *BE*-aljabar [12] dan di *BP*-aljabar [13], *q*-derivasi di *BE*-aljabar [14], serta f_q-derivasi di *BM*-aljabar [15] dan di *BP*-aljabar [16]. Namun, hingga saat ini, penelitian-penelitian tersebut masih terbatas pada penggunaan operasi yang sudah ada di masing-masing struktur aljabar tanpa eksplorasi pengenalan operasi baru yang dapat memberikan perspektif atau jenis derivasi yang berbeda. Selain itu, konsep derivasi pada *pseudo BG*-aljabar dengan menggunakan operasi pengganti seperti $\circledast$ dan $\odot$ belum pernah dibahas secara mendalam, sehingga menjadi peluang untuk mengembangkan tipe derivasi baru di *pseudo BG*-aljabar dengan mendefinisikan operasi tambahan yang memenuhi syarat-syarat tertentu, sehingga memberikan kontribusi baru terhadap teori derivasi dalam struktur aljabar.

Pada artikel ini didefinisikan konsep (*l*, *r*)-derivasi, (*r*, *l*)-derivasi, dan derivasi kiri di *pseudo BG*-aljabar. Kemudian, dibahas implikasi dari derivasi tersebut pada sifat-sifat khusus pseudo *BG*-aljabar, seperti kereguleran dan hubungannya dengan elemen identitas. Melalui pendekatan tersebut, diharapkan penelitian ini dapat memberikan pemahaman yang lebih mendalam tentang derivasi pada *pseudo BG*-aljabar dan memberikan kontribusi yang berharga dalam pengembangan teori *BG*-aljabar yang lebih luas.

2. Dasar Teori

Pada bagian ini diberikan definisi dan sifat-sifat yang diperlukan dalam penelitian.

Definisi 1. [1] *BG*-aljabar $(P;\ *,\ 0)$ adalah suatu himpunan tak kosong P dengan operasi biner $*$ dan konstanta 0 yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:
(*BG1*) $p * p = 0$,
(*BG2*) $p * 0 = p$,
(*BG3*) $(p * q) * (0 * q) = p$,
untuk setiap $p, q, r \in P$.

Contoh 1. Misalkan $P = \{0, 1, 2, 3\}$ adalah suatu himpunan yang didefinisikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Tabel untuk $(P;\ *,\ 0)$

$*$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

Berdasarkan Tabel 1, diagonal utamanya bernilai 0, artinya setiap operasi suatu elemen dengan dirinya sendiri menghasilkan 0, maka Aksioma *BG1* terpenuhi. Kemudian, pada kolom kedua dapat dilihat bahwa hasil operasi suatu elemen dengan 0 adalah elemen itu sendiri, maka Aksioma *BG2* terpenuhi. Selanjutnya, pada Tabel 2 akan ditunjukkan bahwa $(P;\ *,\ 0)$ memenuhi Aksioma *BG3*.

Tabel 2. Tabel pembuktian Aksioma *BG3* pada $(P;\ *,\ 0)$

p	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
q	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
$p * q$	0	1	2	3	1	0	3	2	2	3	0	1	3	2	1	0
$0 * q$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
$(p*q)*(0*q)$	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3

Pada Tabel 2 dapat dilihat bahwa hasil operasi pada baris ke-5 sama dengan baris ke-1, artinya Aksioma *BG3* terpenuhi. Oleh karena itu, terbukti bahwa $(P;\ *,\ 0)$ adalah *BG*-aljabar.

Misalkan $(P;\ *,\ 0)$ adalah *BG*-aljabar. Didefinisikan $p \wedge q = q * (q * p)$ untuk setiap $p, q \in P$.

Definisi 2. [10] Misalkan $(P;\ *,\ 0)$ adalah *BG*-aljabar. Suatu pemetaan $\delta : P \to P$ dikatakan (*l*, *r*)-derivasi di P jika memenuhi $\delta(p * q) = (\delta(p) * q) \wedge (p * \delta(q))$ dan dikatakan (*r*, *l*)-derivasi di P jika memenuhi $\delta(p * q) = (p * \delta(q)) \wedge (\delta(p) * q)$ untuk setiap $p, q \in P$. Pemetaan δ disebut derivasi di P jika memenuhi keduanya, yaitu (*l*, *r*)-derivasi dan (*r*, *l*)-derivasi di P.

Definisi 3. [10] Misalkan $(P;\ *,\ 0)$ adalah *BG*-aljabar. Suatu pemetaan $\delta : P \to P$ dikatakan derivasi kiri dari P jika memenuhi $\delta(p * q) = (p * \delta(q)) \wedge (q * \delta(p))$ untuk setiap $p, q \in P$.

Definisi 4. [10] Misalkan $(P;\ *,\ 0)$ adalah *BG*-aljabar. Suatu pemetaan $\delta : P \to P$ dikatakan reguler jika memenuhi $\delta(0) = 0$.

Definisi 5. [2] Suatu aljabar $(R;\ *, \diamond,\ 0)$ dikatakan *pseudo BG*-aljabar jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:
(*PBG1*) $p * p = p \diamond p = 0$,
(*PBG2*) $p * p = p \diamond p = 0$,
(*PBG3*) $(p * q) \diamond (0 * q) = (p \diamond q) * (0 \diamond q) = p$,
untuk setiap $p, q \in R$.

Contoh 2. Misalkan $A = \{0,\ 1,\ 2\}$ adalah suatu himpunan dengan operasi biner $*$ dan $\diamond$ yang didefinisikan sebagai berikut: $a * b = |a-b|\left(\sqrt{2}\right)^{ab|a-b||b-2|}$ dan $a \diamond b = |a-b|\,|3-b|^{\left(\frac{ab|a-b|}{3-b}\right)}$ untuk setiap $a, b \in A$. Akan ditunjukkan bahwa $(A;\ *, \diamond,\ 0)$ adalah *pseudo BG*-aljabar.

i Untuk setiap $p \in A$ diperoleh $p * p = |p-p|\left(\sqrt{2}\right)^{pp|p-p||p-2|} = 0$ dan $p \diamond p = |p-p|\,|3-p|^{\left(\frac{pp|p-p|}{3-p}\right)} = 0$, artinya Aksioma *PBG1* terpenuhi.

ii Untuk setiap $p \in A$ diperoleh $p * 0 = |p-0|\left(\sqrt{2}\right)^{p0|p-0||p-2|} = p$ dan $p \diamond 0 = |p-0|\,|3-0|^{\left(\frac{p0|p-0|}{3-0}\right)} = p$, artinya Aksioma *PBG2* terpenuhi.

iii Pada Tabel 3 ditunjukkan bahwa untuk setiap $p, q \in A$ Aksioma *PBG3* terpenuhi.

Tabel 3. Tabel pembuktian Aksioma *PBG3* pada $(A;\ *, \diamond,\ 0)$

p	0	0	0	1	1	1	2	2	2
q	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$p * q$	0	1	2	1	0	1	2	2	0
$0 * q$	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$(p * q) \diamond (0 * q)$	0	0	0	1	1	1	2	2	2
$p \diamond q$	0	1	2	1	0	1	2	2	0
$0 \diamond q$	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$(p \diamond q) * (0 \diamond q)$	0	0	0	1	1	1	2	2	2

Oleh karena itu, terbukti bahwa $(A;\ *, \diamond,\ 0)$ adalah *Pseudo BG*-aljabar.

Teorema 1. *[2] Misalkan $(R;\ *, \diamond,\ 0)$ adalah pseudo BG-aljabar, maka untuk setiap $p, q, r \in R$ berlaku:*

Jika $p * q = p \diamond q = 0$, maka $p = q$,
(ii) Jika $(q * q) \diamond (0 * q) = (q \diamond q) * (0 \diamond q)$, maka $0 \diamond q = 0 * q$,
(iii) Jika $p * q = r \diamond q$, maka $p = r$,
(iv) $0 * (0 * p) = 0 \diamond (0 \diamond p) = p$,
(v) Jika $0 * p = 0 \diamond q$, maka $p = q$,
(vi) $(p * (0 * p)) \diamond p = p$.

Bukti. Pembuktian Teorema 1 dapat dilihat pada [2]. □

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini diberikan hasil utama penelitian, yaitu definisi dari beberapa konsep derivasi tipe 1 dan tipe 2 di *pseudo BG*-aljabar yang dalam pendefinisiannya mengacu pada Definisi 2 dan Definisi 3, lalu dibahas sifat-sifatnya.

Misalkan $(R; *,\ \diamond,\ 0)$ adalah *pseudo BG*-aljabar. Didefinisikan operasi $\circledast$ dan $\odot$ di R dengan $p \circledast q = q * (q \diamond p)$ dan $p \odot q = q \diamond (q * p)$ untuk setiap $p, q \in R$. Berdasarkan operasi-operasi tersebut didefinisikan (*l*, *r*)-derivasi, (*r*, *l*)-derivasi, dan derivasi kiri tipe 1 dan tipe 2.

Definisi 6. Misalkan $(R;\ *,\ \diamond,\ 0)$ adalah *pseudo BG*-aljabar. Suatu pemetaan $\delta : R \to R$ dikatakan (*l*, *r*)-derivasi tipe 1 di R jika memenuhi $\delta(p * q) = (\delta(p) * q) \circledast (p * \delta(q))$ dan dikatakan (*r*, *l*)-derivasi tipe 1 di R jika memenuhi $\delta(p * q) = (p * \delta(q)) \circledast (\delta(p) * q)$ untuk setiap $p, q \in R$. Pemetaan δ disebut derivasi tipe 1 di R jika merupakan (*l*, *r*)-derivasi tipe 1 sekaligus (*r*, *l*)-derivasi tipe 1.

Definisi 7. Misalkan $(R;\ *,\ \diamond,\ 0)$ adalah *pseudo BG*-aljabar. Suatu pemetaan $\delta : R \to R$ dikatakan (*l*, *r*)-derivasi tipe 2 di R jika memenuhi $\delta(p \diamond q) = (\delta(p) \diamond q) \odot (p \diamond \delta(q))$ dan dikatakan (*r*, *l*)-derivasi tipe 2 di R jika memenuhi $\delta(p \diamond q) = (p \diamond \delta(q)) \odot (\delta(p) \diamond q)$ untuk setiap $p, q \in R$. Pemetaan δ disebut derivasi tipe 2 di R jika merupakan (*l*, *r*)-derivasi tipe 2 sekaligus (*r*, *l*)-derivasi tipe 2.

Definisi 8. Misalkan $(R;\ *,\ \diamond,\ 0)$ adalah *pseudo BG*-aljabar. Suatu pemetaan $\delta : R \to R$ dikatakan derivasi kiri tipe 1 di R jika memenuhi $\delta(p * q) = (p * \delta(q)) \circledast (q * \delta(p))$ dan dikatakan derivasi kiri tipe 2 di R jika memenuhi $\delta(p \diamond q) = (p \diamond \delta(q)) \odot (q \diamond \delta(p))$ untuk setiap $p, q \in R$.

Selanjutnya, diberikan definisi dari konsep reguler di *pseudo BG*-aljabar yang mengacu pada definisi konsep reguler di *BG*-aljabar pada Definisi 4.

Definisi 9. Misalkan $(R;\ *,\ \diamond,\ 0)$ adalah *pseudo BG*-aljabar. Suatu pemetaan $\delta : R \to R$ dikatakan reguler jika memenuhi $\delta(0) = 0$.

Contoh 3. Misalkan $R = \{0, 1\}$. Didefinisikan operasi $*$ dan $\diamond$ sebagai $p * q = p + q - 2pq$ dan $p \diamond q = |p - q|$ untuk setiap $p, q \in R$, maka dapat dibuktikan bahwa $(R;\ *,\ \diamond,\ 0)$ adalah *pseudo BG*-aljabar. Jika didefinisikan suatu pemetaan δ dari R ke dirinya sendiri sebagai

$$\delta(p) = \begin{cases} 1 & \text{jika } p = 0, \\ 0 & \text{jika } p = 1. \end{cases}$$

maka δ merupakan derivasi dan derivasi kiri tipe 1 sekaligus derivasi dan derivasi kiri tipe 2 di R.

Berikut ini diberikan sifat-sifat yang diperoleh dari pendefinisian (*l*, *r*)-derivasi, (*r*, *l*)-derivasi, dan derivasi kiri tipe 1 pada *pseudo BG*-aljabar.

Teorema 2. *Misalkan $(R;\ *,\ \diamond,\ 0)$ adalah pseudo BG-aljabar. Jika δ adalah (l, r)-derivasi tipe 1 di R dan δ reguler, maka $\delta\left(p\right) = \delta\left(p\right) \circledast p$ untuk setiap $p \in R$.*

Bukti. Misalkan $(R;\ *,\ \diamond,\ 0)$ adalah *pseudo BG*-aljabar. Karena δ adalah (*l*, *r*)-derivasi tipe 1 di R dan δ reguler, maka berdasarkan Definisi 6 dan dengan menggunakan aksioma *PBG1*, diperoleh

$$\begin{aligned}\delta\left(p\right) &= \delta(p * 0)\\ &= \left(\delta\left(p\right) * 0\right) \circledast \left(p * \delta\left(0\right)\right)\\ &= \delta\left(p\right) \circledast \left(p * 0\right)\\ &= \delta\left(p\right) \circledast p.\end{aligned}$$

Jadi, jika δ adalah (*l*, *r*)-derivasi tipe 1 di R dan δ reguler, maka terbukti bahwa $\delta\left(p\right) = \delta\left(p\right) \circledast p$ untuk setiap $p \in R$. □

Teorema 3. *Misalkan $(R;\ *,\ \diamond,\ 0)$ adalah pseudo BG-aljabar. Jika δ adalah (r, l)-derivasi tipe 1 di R dan δ reguler, maka $\delta\left(p\right) = p \circledast \delta\left(p\right)$ untuk setiap $p \in R$.*

Bukti. Misalkan $(R;\ *,\ \diamond,\ 0)$ adalah *pseudo BG*-aljabar. Karena δ adalah (*r*, *l*)-derivasi tipe 1 di R dan δ reguler, maka berdasarkan Definisi 6 dan dengan menggunakan aksioma *PBG1* diperoleh

$$\begin{aligned}\delta\left(p\right) &= \delta(p * 0)\\ &= \left(p * \delta\left(0\right)\right) \circledast \left(\delta\left(p\right) * 0\right)\\ &= \left(p * 0\right) \circledast \delta\left(p\right)\\ &= p \circledast \delta\left(p\right).\end{aligned}$$

Jadi, jika δ adalah (*r*, *l*)-derivasi tipe 1 di R dan δ reguler, maka terbukti bahwa $\delta\left(p\right) = p \circledast \delta\left(p\right)$ untuk setiap $p \in R$. □

Teorema 4. *Misalkan $(R;\ *,\ \diamond,\ 0)$ adalah pseudo BG-aljabar. Jika δ adalah derivasi kiri tipe 1 di R, maka $\delta\left(0\right) = p * \delta\left(p\right)$ untuk setiap $p \in R$.*

Bukti. Misalkan $(R;\ *,\ \diamond,\ 0)$ adalah *pseudo BG*-aljabar. Karena δ adalah derivasi kiri tipe 1 di R, maka berdasarkan Definisi 8 dan dengan menggunakan aksioma *PBG1* dan *PBG2* diperoleh

$$\begin{aligned}\delta\left(0\right) &= \delta(p * p)\\ &= \left(p * \delta\left(p\right)\right) \circledast \left(p * \delta\left(p\right)\right)\\ &= \left(p * \delta\left(p\right)\right) * \left(\left(p * \delta\left(p\right)\right) \diamond \left(p * \delta(p)\right)\right)\\ &= \left(p * \delta\left(p\right)\right) * 0\\ &= p * \delta\left(p\right).\end{aligned}$$

Jadi, jika δ adalah derivasi kiri tipe 1 di R, terbukti bahwa $\delta\left(0\right) = p * \delta\left(p\right)$ untuk setiap $p \in R$. □

Lemma 1. *Misalkan $(R;\ *,\ \diamond,\ 0)$ adalah pseudo BG-aljabar. Jika δ adalah derivasi kiri tipe 1 di R dan δ reguler, maka $\delta\left(p\right) = p \circledast \left(0 * \delta\left(p\right)\right)$ untuk setiap $p \in R$.*

Bukti. Misalkan $(R;\ *,\ \diamond,\ 0)$ adalah *pseudo BG*-aljabar. Karena δ adalah derivasi kiri tipe 1 di R dan δ reguler, maka berdasarkan Definisi 8 dan dengan menggunakan aksioma *PBG1* diperoleh

$$\begin{aligned}\delta\left(p\right) &= \delta(p * 0)\\ &= \left(p * \delta\left(0\right)\right) \circledast \left(0 * \delta\left(p\right)\right)\\ &= \left(p * 0\right) \circledast \left(0 * \delta\left(p\right)\right)\\ &= p \circledast \left(0 * \delta\left(p\right)\right).\end{aligned}$$

Jadi, jika δ adalah derivasi kiri tipe 1 di R dan δ reguler, maka terbukti bahwa $\delta\left(p\right) = p \circledast \left(0 * \delta\left(p\right)\right)$ untuk setiap $p \in R$. □

Teorema 5. *Misalkan $(R;\ *,\ \diamond,\ 0)$ adalah pseudo BG-aljabar. Jika δ adalah derivasi kiri tipe 1 di R dan δ reguler, maka δ adalah fungsi identitas.*

Bukti. Misalkan $(R;\ *,\ \diamond,\ 0)$ adalah *pseudo BG*-aljabar. Karena δ adalah derivasi kiri tipe 1 di R dan δ reguler, maka berdasarkan Definisi 8 dan dengan menggunakan Teorema 4 dan Teorema 1 (iii) untuk setiap $p \in R$, diperoleh

$$\begin{aligned}\delta\left(0\right) &= p * \delta\left(p\right)\\ 0 &= p * \delta\left(p\right)\\ \delta\left(p\right) \diamond \delta\left(p\right) &= p * \delta\left(p\right)\\ \delta\left(p\right) &= p.\end{aligned}$$

Jadi, jika δ adalah derivasi kiri tipe 1 di R dan δ reguler, maka terbukti bahwa δ adalah fungsi identitas. □

Selanjutnya, dibahas sifat-sifat yang diperoleh dari pendefinisian (*l*, *r*)-derivasi, (*r*, *l*)-derivasi, dan derivasi kiri tipe 2 pada *pseudo BG*-aljabar.

Teorema 6. *Misalkan $(R;\ *,\ \diamond,\ 0)$ adalah pseudo BG-aljabar. Jika δ adalah (l, r)-derivasi tipe 2 di R dan δ reguler, maka $\delta\left(p\right) = \delta\left(p\right) \odot p$ untuk setiap $p \in R$.*

Bukti. Misalkan $(R;\ *,\ \diamond,\ 0)$ adalah *pseudo BG*-aljabar. Karena δ adalah (*l*, *r*)-derivasi tipe 2 di R dan δ reguler, maka berdasarkan Definisi 7 dan dengan menggunakan aksioma *PBG1*, diperoleh

$$\begin{aligned}\delta\left(p\right) &= \delta(p \diamond 0)\\ &= \left(\delta\left(p\right) \diamond 0\right) \odot \left(p \diamond \delta\left(0\right)\right)\\ &= \delta\left(p\right) \odot \left(p \diamond 0\right)\\ &= \delta\left(p\right) \odot p.\end{aligned}$$

Jadi, jika δ adalah (*l*, *r*)-derivasi tipe 2 di R dan δ reguler, maka terbukti bahwa $\delta\left(p\right) = \delta\left(p\right) \odot p$ untuk setiap $p \in R$. □

Teorema 7. *Misalkan* $(R;\ *,\ \diamond,\ 0)$ *adalah pseudo BG-aljabar. Jika* δ *adalah (r, l)-derivasi tipe 2 di* R *dan* δ *reguler, maka* $\delta\left(p\right) = p \odot \delta\left(p\right)$ *untuk setiap* $p \in R$.

Bukti. Misalkan $(R;\ *,\ \diamond,\ 0)$ adalah *pseudo BG*-aljabar. Karena δ adalah (*r*, *l*)-derivasi tipe 2 di R dan δ reguler, maka berdasarkan Definisi 7 dan dengan menggunakan aksioma *PBG1,* diperoleh

$$\begin{aligned}\delta\left(p\right) &= \delta(p \diamond 0)\\ &= \left(p \diamond \delta\left(0\right)\right) \odot \left(\delta\left(p\right) \diamond 0\right)\\ &= \left(p \diamond 0\right) \odot \delta\left(p\right)\\ &= p \odot \delta\left(p\right).\end{aligned}$$

Jadi, jika δ adalah (*r*, *l*)-derivasi tipe 2 di R dan δ reguler, maka terbukti bahwa $\delta\left(p\right) = p \odot \delta\left(p\right)$ untuk setiap $p \in R$. □

Teorema 8. *Misalkan* $(R;\ *,\ \diamond,\ 0)$ *adalah pseudo BG-aljabar. Jika* δ *adalah derivasi kiri tipe 2 di* R, *maka* $\delta\left(0\right) = p \diamond \delta\left(p\right)$ *untuk setiap* $p \in R$.

Bukti. Misalkan $(R;\ *,\ \diamond,\ 0)$ adalah *pseudo BG*-aljabar. Karena δ adalah derivasi kiri tipe 2 di R, maka berdasarkan Definisi 8 dan dengan menggunakan aksioma *PBG1* dan *PBG2,* diperoleh

$$\begin{aligned}\delta\left(0\right) &= \delta(p \diamond p)\\ &= \left(p \diamond \delta\left(p\right)\right) \odot \left(p \diamond \delta\left(p\right)\right)\\ &= \left(p \diamond \delta\left(p\right)\right) \diamond \left(\left(p \diamond \delta\left(p\right)\right) * \left(p \diamond \delta(p)\right)\right)\\ &= \left(p \diamond \delta\left(p\right)\right) \diamond 0\\ &= p \diamond \delta\left(p\right).\end{aligned}$$

Jadi, jika δ adalah derivasi kiri tipe 2 di R, terbukti bahwa $\delta\left(0\right) = p \diamond \delta\left(p\right)$ untuk setiap $p \in R$. □

Lemma 2. *Misalkan* $(R;\ *,\ \diamond,\ 0)$ *adalah pseudo BG-aljabar. Jika* δ *adalah derivasi kiri tipe 2 di* R *dan* δ *reguler, maka* $\delta\left(p\right) = p \odot \left(0 \diamond \delta\left(p\right)\right)$ *untuk setiap* $p \in R$.

Bukti. Misalkan $(R;\ *,\ \diamond,\ 0)$ adalah *pseudo BG*-aljabar. Karena δ adalah derivasi kiri tipe 2 di R dan δ reguler, maka berdasarkan Definisi 8 dan dengan menggunakan aksioma *PBG1,* diperoleh

$$\begin{aligned}\delta\left(p\right) &= \delta(p \diamond 0)\\ &= \left(p \diamond \delta\left(0\right)\right) \odot \left(0 \diamond \delta\left(p\right)\right)\\ &= \left(p \diamond 0\right) \odot \left(0 \diamond \delta\left(p\right)\right)\\ &= p \odot \left(0 \diamond \delta\left(p\right)\right).\end{aligned}$$

Jadi, jika δ adalah derivasi kiri tipe 2 di R dan δ reguler, maka terbukti bahwa $\delta\left(p\right) = p \odot \left(0 \diamond \delta\left(p\right)\right)$ untuk setiap $p \in R$. □

Teorema 9. *Misalkan* $(R;\ *,\ \diamond,\ 0)$ *adalah pseudo BG-aljabar. Jika* δ *adalah derivasi kiri tipe 2 di* R *dan* δ *reguler, maka* δ *adalah fungsi identitas.*

Bukti. Misalkan $(R;\ *,\ \diamond,\ 0)$ adalah *pseudo BG*-aljabar. Karena δ adalah derivasi kiri tipe 2 di R dan δ reguler, maka bersarkan Definisi 8 dan dengan menggunakan Teorema 4 dan Teorema 1 (iii) untuk setiap $p \in R$, diperoleh

$$\begin{aligned}\delta\left(0\right) &= p \diamond \delta\left(p\right)\\ 0 &= p \diamond \delta\left(p\right)\\ \delta\left(p\right) * \delta\left(p\right) &= p \diamond \delta\left(p\right)\\ \delta\left(p\right) &= p.\end{aligned}$$

Jadi, jika δ adalah derivasi kiri tipe 2 di R dan δ reguler, maka terbukti bahwa δ adalah fungsi identitas. □

4. Kesimpulan

Penelitian ini menghasilkan tiga jenis derivasi utama dalam *pseudo BG*-aljabar, yaitu (*l*, *r*)-derivasi, (*r*, *l*)-derivasi, dan derivasi kiri tipe 1 dan tipe 2. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa derivasi kiri tipe 1 dan tipe 2 memiliki sifat unik, terutama dalam hubungannya dengan kereguleran dan fungsi identitas. Selain itu, pendefinisian dua operasi baru, yaitu $\circledast$ dan $\odot$, memberikan kontribusi signifikan terhadap pengembangan konsep derivasi dalam *pseudo BG*-aljabar, menghasilkan formula baru untuk $\delta(p)$, serta menunjukkan peran elemen khusus 0 dalam struktur ini. Penelitian ini memperluas wawasan tentang derivasi pada struktur aljabar dan membuka potensi pengembangan lebih lanjut dalam studi *pseudo BG*-aljabar.

Kontribusi Penulis. **Ayuni Putri:** Konseptualisasi, metode penelitian, analisis formal, penulisan—penyusunan draf awal. **Sri Gemawati:** Konseptualisasi, analisis formal, supervisi, penulisan—tinjauan dan penyuntingan. **Syamsudhuha:** Konseptualisasi, analisis formal, supervisi, penulisan—tinjauan dan penyuntingan. Semua penulis telah membaca dan menyetujui versi manuskrip yang diterbitkan.

Ucapan Terima Kasih. Para penulis menyampaikan terima kasih kepada editor dan reviewer atas pembacaan yang cermat, kritik yang mendalam, dan rekomendasi yang praktis untuk meningkatkan kualitas tulisan ini.

Pembiayaan. Penelitian ini tidak menerima pembiayaan eksternal.

Konflik Kepentingan. Para penulis menyatakan tidak ada konflik kepentingan yang terkait dengan artikel ini.

Referensi

[1] C. B. Kim and H. S. Kim, "On BG-algebras," *Demonstratio Mathematica*, vol. 41, no. 3, pp. 497–505, 2008. [Online]. Available: https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/dema-2008-0303/html.

[2] S. A. Bajalan, R. R. M. Amin, and A. K. Bajalan, "Structures of Pseudo - BG Algebra and Sime pseudo – BG - Algebra," *Tikrit Journal of Pure Science*, vol. 27, no. 3, pp. 73–77, 2022, doi: 10.25130/tjps.v27i3.48.

[3] A. Rezaei, "Pseudo BCK-algebras Derived from Directoids," *Kragujevac Journal of Mathematics*, vol. 46, no. 1, pp. 125–137, 2022.

[4] X. Wu and X. Zhang, "The structure theorems of Pseudo-BCI algebras in which every element is quasi-maximal," *Symmetry (Basel)*, vol. 10, no. 10, p. 465, 2018, doi: 10.3390/sym10100465.

[5] R. Ameri, A. B. Saeid, R. Borzooei, A. Radfar, and A. Rezaei, "On pseudo BE-algebras," *Discussiones Mathematicae - General Algebra and Applications*, vol. 33, no. 1, pp. 95–108, 2013, doi: 10.7151/dmgaa.1193.

[6] S. S. Ahn, Y. J. Seo, and Y. B. Jun, "Pseudo subalgebras and pseudo filters in pseudo BE-algebras," *AIMS Mathematics*, vol. 8, no. 2, pp. 4964–4972, 2023, doi: 10.3934/math.2023248.

[7] L. C. Ciungu, A. B. Saeid, and A. Rezaei, "Modal operators on pseudo-BE algebras," *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, vol. 17, no. 6, pp. 175–191, 2020, 10.22111/ijfs.2020.5610.

[8] L. C. Ciungu, "Commutative Pseudo BE-algebras," *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, vol. 13, no. 1, pp. 131–144, 2016.

[9] H. M. Al-Malki and D. S. Al-Kadi, "The structure of pseudo-BF/BF*-algebra," *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 13, no. 3, pp. 498–512, Jul. 2020, doi: 10.29020/nybg.ejpam.v13i3.3735.

[10] K. Kamaludin, S. Gemawati, and K. Kartini, "Derivations in BG-algebras," *International Journal of Algebra*, vol. 13, no. 5, pp. 249–257, 2019, doi: 10.12988/ija.2019.9620.

[11] W. Aziz, S. Gemawati, and L. Deswita, "On (f,g)-Derivations in BG-algebras," *IOSR Journal of Mathematics*, vol. 16, no. 4, pp. 14–20, 2020, doi: 10.9790/5728-1604031420.

[12] W. Anhari, S. Gemawati, and I. Hasbiyati, "On t-Derivations of BE-algebras," *International Journal of Mathematics and Computer Research*, vol. 10, no. 06, pp. 2722–2725, Jun. 2022, doi: 10.47191/ijmcr/v10i6.04.

[13] T. F. Siswanti, S. Gemawati, and S. Syamsudhuha, "t-Derivations in BP-Algebras," *Science, Technology, and Communication Journal*, vol. 1, no. 3, pp. 97–103, Jun. 2021. [Online]. Available: https://sintechcomjournal.com/index.php/stc/index.

[14] W. Anhari, S. Gemawati, and I. Hasbiyati, "On Q-Derivations of BE-Algebras," *International Journal of Mathematics and Computer Research*, vol. 10, no. 08, pp. 2847–2851, Aug. 2022, doi: 10.47191/ijmcr/v10i8.04.

[15] E. Yattaqi, S. Gemawati, and I. Hasbiyati, "fq-derivasi di BM-aljabar," *Jambura Journal of Mathematics*, vol. 3, no. 2, pp. 155–166, Jun. 2021, doi: 10.34312/jjom.v3i2.10379.

[16] S. Gemawati, M. Mashadi, M. Musraini, and E. Fitria, "fq-Derivation of BP-algebras," *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, vol. 29, no. 2, pp. 235–244, 2023, doi: 10.22342/jims.29.2.1448.