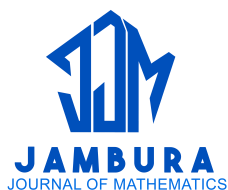


Pelabelan Prima pada Kelas Graf Hasil Operasi Perkalian Tensor

Suci Triwahyuniti dan Desi Rahmadani



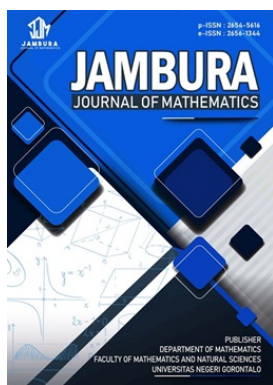
Volume 8, Issue 1, Pages 26–31, February 2026

Diterima 29 September 2025, Direvisi 9 November 2025, Disetujui 21 November 2025, Diterbitkan 7 Januari 2026

To Cite this Article : S. Triwahyuniti dan D. Rahmadani, "Pelabelan Prima pada Kelas Graf Hasil Operasi Perkalian Tensor", *Jambura J. Math*, vol. 8, no. 1, pp. 26–31, 2026, <https://doi.org/10.37905/jjom.v8i1.34596>

© 2026 by author(s)

JOURNAL INFO • JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS



	Homepage	:	http://ejournal.ung.ac.id/index.php/jjom/index
	Journal Abbreviation	:	Jambura J. Math.
	Frequency	:	Biannual (February and August)
	Publication Language	:	English (preferable), Indonesia
	DOI	:	https://doi.org/10.37905/jjom
	Online ISSN	:	2656-1344
	Editor-in-Chief	:	Hasan S. Panigoro
	Publisher	:	Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo
	Country	:	Indonesia
	OAI Address	:	http://ejournal.ung.ac.id/index.php/jjom/oai
	Google Scholar ID	:	iWLjgaUAAAAJ
	Email	:	info.jjom@ung.ac.id

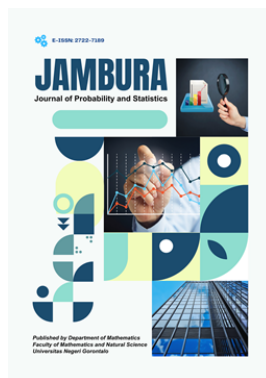
JAMBURA JOURNAL • FIND OUR OTHER JOURNALS



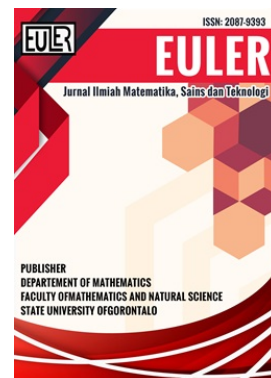
Jambura Journal of Biomathematics



Jambura Journal of Mathematics Education



Jambura Journal of Probability and Statistics



EULER : Jurnal Ilmiah Matematika, Sains, dan Teknologi

Pelabelan Prima pada Kelas Graf Hasil Operasi Perkalian Tensor

Suci Triwahyuniti¹, Desi Rahmadani^{1,*}¹Departemen Matematika, Universitas Negeri Malang, Malang 65145, Indonesia

ARTICLE HISTORY

Diterima 29 September 2025
 Direvisi 9 November 2025
 Disetujui 21 November 2025
 Diterbitkan 7 Januari 2026

KATA KUNCI

Pelabelan Prima
 Perkalian Tensor
 Graf Lintasan
 Graf Sikel

KEYWORDS

Prime Labeling
 Tensor Product
 Cycle Graph
 Path Graph

ABSTRAK. Suatu graf G dengan himpunan simpul $V(G)$ dikatakan graf prima jika terdapat pemetaan bijektif $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$, dengan $|V(G)|$ menyatakan banyak simpul di G , sedemikian sehingga setiap dua simpul u dan v yang bertetangga di G memiliki $\gcd(f(u), f(v)) = 1$. Perkalian Tensor pada graf merupakan salah satu operasi untuk menggabungkan dua graf menjadi satu graf yang lebih besar dan kompleks. Operasi ini menghasilkan graf baru yang merefleksikan sifat keterhubungan dari kedua graf asalnya, namun dengan struktur yang lebih spesifik dan kompleks dibandingkan dengan operasi graf lainnya. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk menentukan keberadaan pelabelan prima pada graf hasil operasi Perkalian Tensor antara graf lintasan P_n dan graf sikel C_n . Penelitian ini menggunakan metode analitik dan eksploratif dengan strategi trial and error dalam menentukan pelabelan yang bersifat prima. Hasil penelitian menunjukkan bahwa dua kelas graf hasil operasi Perkalian Tensor, yaitu graf $P_2 \otimes C_n$ untuk $n \geq 3$ dan graf $P_2 \otimes P_n$ untuk $n \geq 2$, merupakan graf prima. Temuan ini memperluas hasil-hasil sebelumnya mengenai kelas graf yang memiliki pelabelan prima dan dapat menjadi dasar bagi penelitian lanjutan terkait pelabelan graf pada hasil operasi graf lainnya.

ABSTRACT. A graph G with vertex set $V(G)$ is said to be a prime graph if there exists a bijective mapping $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$, where $|V(G)|$ denotes the number of vertices in G , such that for any two adjacent vertices u and v in G satisfy $\gcd(f(u), f(v)) = 1$. The tensor product of graphs is an operation used to combine two graphs into a single graph that is larger and more complex. The resulting graph reflects the connectivity properties of the two original graphs in a specific manner that is more intricate than other graph operations. Therefore, this study aims to determine the existence of prime labeling in classes of graphs obtained from the tensor product of the path graph P_n and the cycle graph C_n . The research employs analytical and exploratory methods with a trial-and-error strategy to construct labelings that satisfy the prime property. The results demonstrate that two classes of tensor product graphs, namely $P_2 \otimes C_n$ for $n \geq 3$ and $P_2 \otimes P_n$ for $n \geq 2$, are prime graphs. This finding extends existing results on classes of graphs that admit prime labeling and provides a foundation for further research on graph labeling under other graph operations.



This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License. [Editorial of JJoM](#): Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo, Jln. Prof. Dr. Ing. B. J. Habibie, Bone Bolango 96554, Indonesia.

1. Pendahuluan

Graf G adalah pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ di mana $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dan $E(G)$ adalah himpunan sisi (mungkin kosong) dari pasangan-pasangan tak terurut anggota-anggota di $V(G)$ [1, 2]. Notasi $V(G)$ menyatakan himpunan simpul dari G sedangkan $E(G)$ menyatakan himpunan sisi dari G . Berdasarkan bentuknya, graf memiliki berbagai jenis di antaranya graf sikel (cycle graph) dan graf lintasan (path graph). Graf sikel C_n dengan n simpul adalah graf yang dibentuk dari sejumlah simpul berbeda yang saling terhubung sehingga membentuk lintasan tertutup. Jumlah simpul pada C_n sama dengan jumlah sisinya, dan setiap simpulnya berderajat dua [3]. Graf lintasan P_n dengan n simpul adalah graf dengan jumlah simpul $n \geq 2$ yang tersusun dari urutan simpul-simpul terhubung membentuk satu lintasan [4].

Fungsi f dari A ke B adalah aturan yang memetakan setiap anggota $a \in A$ ke anggota unik $b \in B$. Misalkan f adalah fungsi

dari A ke B , pernyataan ini dapat ditulis sebagai $f : A \rightarrow B$. Dengan kata lain, setiap anggota pada himpunan A memiliki tepat satu pasangan pada himpunan B melalui pemetaan f [5, 6]. Berikut merupakan teorema dari fungsi yang terkait dengan himpunan hingga, yang nantinya akan digunakan sebagai pembuktian pada bagian hasil dan pembahasan.

Teorema 1. [5] Misalkan A dan B merupakan himpunan hingga dengan $|A| = |B|$. Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ adalah injektif jika dan hanya jika f surjektif.

Perkalian Tensor (Tensor Product) dari dua graf G_1 dan G_2 adalah penggabungan dari dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan dengan $G_1 \otimes G_2$. Hasil operasi ini mempunyai himpunan simpul

$$V(G_1 \otimes G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$$

dan himpunan sisi

$$E(G_1 \otimes G_2) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) \mid u_1 u_2 \in E(G_1) \text{ dan } v_1 v_2 \in E(G_2)\}.$$

*Penulis Korespondensi.

Artinya simpul (u_1, v_1) bertetangga dengan simpul (u_2, v_2) di $G_1 \otimes G_2$ jika dan hanya jika u_1 bertetangga dengan u_2 di G_1 dan v_1 bertetangga dengan v_2 di G_2 [7]. Selain nilai teoritis, Perkalian Tensor juga memiliki aplikasi praktis yang luas. Contohnya, konsep perkalian tensor digunakan untuk mempresentasikan hubungan antara dua sistem yang beroperasi bersamaan, seperti jaringan kereta dan bus dalam sistem transportasi. Dengan demikian, hasil penelitian tentang pelabelan pada graf hasil operasi Perkalian Tensor tidak hanya memiliki nilai teoritis, tetapi juga dapat diterapkan pada permasalahan sehari-hari seperti penjadwalan, *encoding*, serta optimasi sistem yang melibatkan dua jaringan yang saling berinteraksi.

Pelabelan graf merupakan pemetaan simpul-simpul atau sisi-sisi atau keduanya ke himpunan bilangan bulat tertentu dengan aturan khusus [8, 9]. Salah satu jenis pelabelan yang masih terus dikembangkan sampai saat ini adalah pelabelan prima yang diperkenalkan oleh Entringer pada tahun 1980. Misalkan graf $G = (V(G), E(G))$ dengan $|V(G)|$ merupakan banyaknya simpul di G . Suatu fungsi bijektif $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$ disebut pelabelan prima jika untuk setiap dua simpul bertetangga $u, v \in V(G)$ berlaku $\gcd(f(u), f(v)) = 1$. Graf yang memiliki pelabelan prima disebut graf prima [9].

Teorema 2. *Greatest Common Divisor dari dua bilangan bulat a dan b , yang keduanya bukan nol, adalah bilangan bulat terbesar yang dapat membagi habis a dan b .*

Perhatikan juga bahwa dua bilangan bulat a dan b dikatakan relatif prima jika $\gcd(a, b) = 1$. Setiap pasangan bilangan bulat positif yang berurutan adalah relatif prima [10]. Salah satu cara yang tepat untuk memeriksa apakah dua bilangan a dan b relatif prima dapat menggunakan akibat berikut.

Akibat 1. *Bilangan bulat a dan b relatif prima jika dan hanya jika terdapat bilangan bulat c dan d sedemikian sehingga $ac + bd = 1$.*

Beberapa hasil penelitian sebelumnya terkait pelabelan prima telah banyak dilakukan pada berbagai kelas graf, di antaranya pelabelan prima pada graf modifikasi graf flower $Fl_2(n)$ dan $Fl_3(n)$ [11], graf modifikasi graf roda [12], graf simpul semi total dari graf sikat $R^1(B_n)$ dan $R^2(B_n)$ [13], pelabelan prima lingkungan pada graf sunflower SF_n dengan $n \geq 4$ [14], pelabelan prima pada graf cycle C_n [10], pelabelan prima ganjil pada graf tangga melingkar $SCL(n)$ [15], graf jaring tanpa pusat $W_0(2, n)$ [16], graf ular cycle seragam $C_{(k,q)}^m$ [17], graf ikan $C_n @ K_3$ [18], graf Franklin FR_G [19], serta pada graf bipartit [20].

Meskipun demikian, sebagian besar penelitian tersebut masih berfokus pada graf dasar atau graf hasil modifikasi sederhana, sementara kajian mengenai pelabelan prima pada graf hasil operasi produk graf, khususnya Perkalian Tensor, masih sangat terbatas. Secara khusus, hingga saat ini belum ditemukan hasil yang secara komprehensif membahas keberadaan pelabelan prima pada graf hasil operasi Perkalian Tensor antara graf lintasan dan graf sikel, yaitu $P_m \otimes C_n$, maupun antara dua graf lintasan, yaitu $P_m \otimes P_n$. Kondisi ini menunjukkan adanya celah penelitian yang signifikan dalam pengembangan teori pelabelan graf, khu-

susnya pada graf hasil operasi komposisi yang memiliki struktur lebih kompleks.

Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk mengisi celah tersebut dengan mengkaji keberadaan pelabelan prima pada kelas graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes C_n$ dan $P_2 \otimes P_n$. Kontribusi utama dari penelitian ini adalah pembuktian bahwa kedua kelas graf tersebut merupakan graf prima untuk kondisi tertentu, sehingga memperluas daftar kelas graf yang diketahui memiliki pelabelan prima serta memberikan landasan teoretis bagi penelitian lanjutan pada pelabelan graf hasil operasi graf lainnya.

2. Metode

Penelitian ini meneliti pelabelan prima pada graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes C_n$ dan graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes P_n$ menggunakan pendekatan metode eksploratif dan analitik. Metode eksploratif digunakan untuk mengeksplorasi kemungkinan adanya pelabelan prima pada graf dengan strategi *trial and error*. Penentuan dimulai pada beberapa graf tertentu, setelah diperoleh pola label kemudian hasil diperumum untuk kelas graf tak berhingga $P_2 \otimes C_n$ dan $P_2 \otimes P_n$. Sementara itu, metode analitik digunakan untuk melakukan pembuktian matematis berdasarkan teori dasar yang telah ada. Sumber data penelitian berupa studi literatur yang membahas konsep pelabelan prima, sifat-sifat graf sikel, graf lintasan, graf hasil Perkalian Tensor, serta konsep *greatest common divisor* (\gcd) yang menjadi landasan utama dalam analisis dan pembahasan hasil penelitian.

Tahapan penelitian dilakukan secara operasional sebagai berikut:

1. Melakukan studi literatur terkait teori dasar graf, konsep pelabelan prima, serta hasil-hasil penelitian sebelumnya mengenai operasi Perkalian Tensor.
2. Menentukan pelabelan prima pada graf $P_2 \otimes C_n$ dan $P_2 \otimes P_n$ untuk beberapa nilai n tertentu menggunakan strategi *trial and error* (eksploratif).
3. Melakukan analisis terhadap pola pelabelan yang ditemukan, kemudian merumuskan hipotesis mengenai pelabelan prima pada kelas graf $P_2 \otimes C_n$ untuk $n \geq 3$ dan graf $P_2 \otimes P_n$ untuk $n \geq 2$.
4. Validasi hasil dilakukan dengan metode analitik melalui pembuktian matematis untuk memastikan bahwa pelabelan yang diperoleh memenuhi syarat definisi pelabelan prima.

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan dibuktikan bahwa graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes C_n$ dan graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes P_n$ merupakan graf prima. Hasil penelitian disajikan dalam Teorema 3, Teorema 4, dan Teorema 5.

Teorema 3. *Graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes C_n$ dengan $n \geq 3$ dan n bilangan ganjil merupakan graf prima.*

Bukti. Misalkan graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes C_n$ adalah graf yang memiliki himpunan simpul

$$V(P_2 \otimes C_n) = \{v_i \mid i = 1, 2, 3, \dots, 2n\},$$

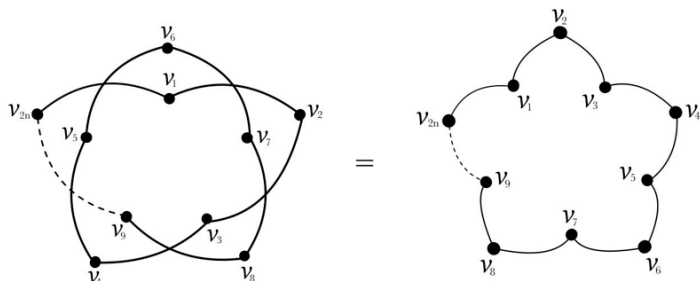
sehingga

$$|V(P_2 \otimes C_n)| = 2n.$$

Graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes C_n$ mempunyai himpunan sisi

$$E(P_2 \otimes C_n) = \{v_i v_{i+1} \mid i = 1, 2, 3, \dots, 2n - 1\} \cup \{v_1 v_{2n}\}.$$

Graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes C_n$ untuk $n \geq 3$ dengan n bilangan ganjil diberikan seperti pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes C_n$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa pelabelan simpul pada graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes C_n$ untuk $n \geq 3$ dan n bilangan ganjil berupa

$$f : V(P_2 \otimes C_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$$

merupakan fungsi bijektif. Didefinisikan pelabelan simpul pada graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes C_n$ sebagai berikut:

$$f(v_i) = i, \quad \text{untuk } i = 1, 2, 3, \dots, 2n.$$

Jika $v_i \neq v_j$, maka $f(v_i) \neq f(v_j)$. Dengan demikian terbukti bahwa fungsi

$$f : V(P_2 \otimes C_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$$

adalah fungsi injektif. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa fungsi tersebut juga surjektif. Karena

$$|V(P_2 \otimes C_n)| = |\{1, 2, 3, \dots, 2n\}|$$

dan f merupakan fungsi injektif, maka berdasarkan Teorema 1 diperoleh bahwa f juga merupakan fungsi surjektif. Oleh karena itu, fungsi f adalah fungsi bijektif.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa label dua simpul yang bertetangga pada graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes C_n$ adalah relatif prima. Misalkan dua simpul u dan v merupakan simpul yang bertetangga pada graf tersebut. Label simpul $f(u) = a$ dan $f(v) = b$ dikatakan relatif prima jika $\gcd(a, b) = 1$. Pandang dua kasus berikut.

Kasus 1. Pandang dua simpul bertetangga v_i dan v_{i+1} untuk $1 \leq i \leq 2n - 1$. Karena

$$f(v_i) = i \quad \text{dan} \quad f(v_{i+1}) = i + 1$$

merupakan dua bilangan yang berurutan dan setiap pasangan bilangan bulat positif yang berurutan adalah relatif prima [10], maka diperoleh

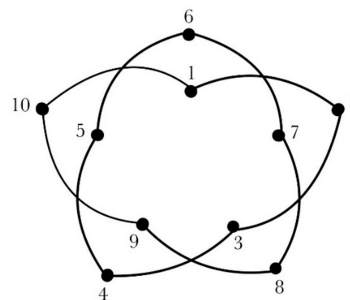
$$\gcd(f(v_i), f(v_{i+1})) = 1.$$

Kasus 2. Pandang dua simpul bertetangga v_1 dan v_{2n} . Karena $f(v_1) = 1$ dan setiap bilangan bulat positif relatif prima terhadap 1, maka diperoleh

$$\gcd(f(v_1), f(v_{2n})) = 1.$$

Dari kedua kasus tersebut, terbukti bahwa untuk setiap dua simpul bertetangga u dan v di graf $P_2 \otimes C_n$ berlaku $\gcd(f(u), f(v)) = 1$. Dengan demikian, graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes C_n$ untuk $n \geq 3$ dan n bilangan ganjil merupakan graf prima. \square

Selanjutnya, pelabelan prima pada graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes C_5$ ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Pelabelan prima graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes C_5$

Teorema 4. Graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes C_n$ dengan $n > 3$ dan n genap merupakan graf prima.

Bukti. Misalkan graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes C_n$ memiliki himpunan simpul

$$V(P_2 \otimes C_n) = \{v_i, w_i \mid i = 1, 2, 3, \dots, n\},$$

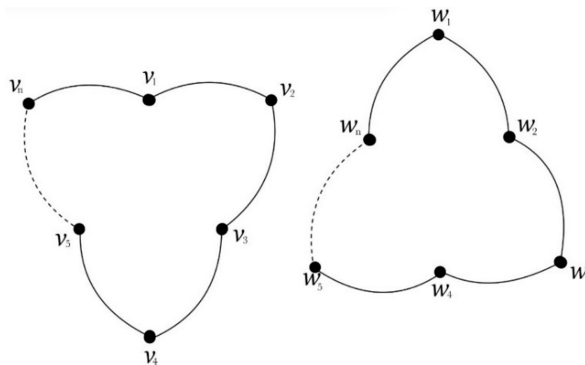
sehingga diperoleh

$$|V(P_2 \otimes C_n)| = 2n.$$

Himpunan sisi graf $P_2 \otimes C_n$ didefinisikan sebagai

$$E(P_2 \otimes C_n) = \{v_i v_{i+1} \mid i = 1, 2, 3, \dots, n - 1\} \cup \{w_i w_{i+1} \mid i = 1, 2, 3, \dots, n - 1\} \cup \{v_1 v_n\} \cup \{w_1 w_n\}.$$

Representasi graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes C_n$ untuk n genap ditunjukkan pada Gambar 3.



Gambar 3. Graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes C_n$ untuk n genap

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa pelabelan simpul

$$f : V(P_2 \otimes C_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$$

merupakan fungsi bijektif. Pertama, didefinisikan pelabelan simpul sebagai berikut:

$$f(v_i) = i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

$$f(w_i) = n + i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Jelas bahwa untuk setiap $1 \leq i \leq n$ berlaku

$$\{f(v_i) \mid 1 \leq i \leq n\} = \{1, 2, 3, \dots, n\},$$

dan

$$\{f(w_i) \mid 1 \leq i \leq n\} = \{n + 1, n + 2, \dots, 2n\}.$$

Karena $f(v_i) \neq f(v_j)$ untuk $i \neq j$ dan $f(w_i) \neq f(w_j)$ untuk $i \neq j$, serta $f(v_i) \neq f(w_j)$ untuk setiap i dan j , maka fungsi f bersifat injektif. Selanjutnya, karena

$$|V(P_2 \otimes C_n)| = |\{1, 2, 3, \dots, 2n\}| = 2n,$$

dan f telah terbukti injektif, maka berdasarkan Teorema 1 fungsi f juga bersifat surjektif. Dengan demikian, fungsi f merupakan fungsi bijektif.

Pada tahap berikutnya akan ditunjukkan bahwa setiap pasangan simpul yang bertetangga pada graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes C_n$ memiliki label yang relatif prima. Misalkan dua simpul bertetangga u dan v memiliki label $a = f(u)$ dan $b = f(v)$.

Kasus 1. Untuk dua simpul bertetangga v_i dan v_{i+1} dengan $1 \leq i \leq n - 1$, diperoleh

$$f(v_i) = i \quad \text{dan} \quad f(v_{i+1}) = i + 1.$$

Karena i dan $i + 1$ merupakan dua bilangan bulat positif yang berurutan, maka

$$\gcd(f(v_i), f(v_{i+1})) = 1.$$

Kasus 2. Untuk dua simpul bertetangga v_1 dan v_n , diperoleh

$$f(v_1) = 1.$$

Karena 1 relatif prima terhadap setiap bilangan bulat positif, maka

$$\gcd(f(v_1), f(v_n)) = 1.$$

Kasus 3. Untuk dua simpul bertetangga w_i dan w_{i+1} dengan $1 \leq i \leq n - 1$, diperoleh

$$f(w_i) = n + i \quad \text{dan} \quad f(w_{i+1}) = n + i + 1.$$

Kedua label tersebut merupakan bilangan bulat positif yang berurutan, sehingga

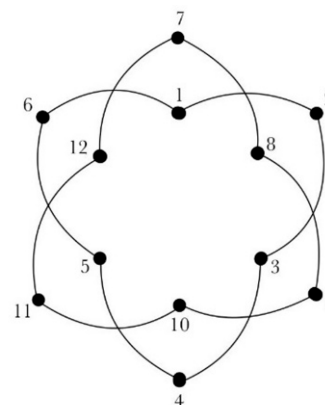
$$\gcd(f(w_i), f(w_{i+1})) = 1.$$

Kasus 4. Untuk dua simpul bertetangga w_1 dan w_n , karena $f(w_1) = 1$, maka

$$\gcd(f(w_1), f(w_n)) = 1.$$

Dari keempat kasus tersebut dapat disimpulkan bahwa untuk setiap dua simpul bertetangga u dan v pada graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes C_n$ berlaku $\gcd(f(u), f(v)) = 1$. Oleh karena itu, graf $P_2 \otimes C_n$ dengan $n > 3$ dan n genap memiliki pelabelan prima, sehingga graf tersebut merupakan graf prima. \square

Selanjutnya, Gambar 4 menunjukkan contoh pelabelan prima pada graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes C_n$ dengan $n > 3$ dan n genap.



Gambar 4. Pelabelan prima graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes C_6$

Teorema 5. Graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes P_n$ dengan $n \geq 2$ merupakan graf prima.

Bukti. Misalkan graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes P_n$ memiliki himpunan simpul

$$V(P_2 \otimes P_n) = \{v_i, w_i \mid i = 1, 2, 3, \dots, n\},$$

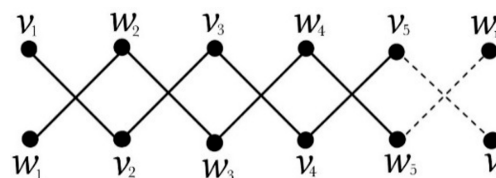
sehingga diperoleh

$$|V(P_2 \otimes P_n)| = 2n.$$

Himpunan sisi graf $P_2 \otimes P_n$ didefinisikan sebagai

$$E(P_2 \otimes P_n) = \{v_i v_{i+1} \mid i = 1, 2, 3, \dots, n - 1\} \cup \{w_i w_{i+1} \mid i = 1, 2, 3, \dots, n - 1\}.$$

Graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes P_n$ ditunjukkan pada Gambar 5.



Gambar 5. Graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes P_n$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa pelabelan simpul

$$f : V(P_2 \otimes P_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$$

merupakan fungsi bijektif. Pertama, didefinisikan pelabelan simpul pada graf $P_2 \otimes P_n$ sebagai berikut:

$$f(v_i) = i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

$$f(w_i) = n + i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Jelas bahwa untuk setiap $1 \leq i \leq n$ berlaku

$$\{f(v_i) \mid 1 \leq i \leq n\} = \{1, 2, 3, \dots, n\},$$

dan

$$\{f(w_i) \mid 1 \leq i \leq n\} = \{n+1, n+2, \dots, 2n\}.$$

Karena $f(v_i) \neq f(v_j)$ untuk $i \neq j$, $f(w_i) \neq f(w_j)$ untuk $i \neq j$, serta $f(v_i) \neq f(w_j)$ untuk setiap i dan j , maka fungsi f bersifat injektif. Selanjutnya, karena

$$|V(P_2 \otimes P_n)| = |\{1, 2, 3, \dots, 2n\}| = 2n,$$

dan fungsi f telah terbukti injektif, maka berdasarkan **Teorema 1** fungsi f juga bersifat surjektif. Dengan demikian, fungsi f merupakan fungsi bijektif.

Pada tahap berikutnya akan dibuktikan bahwa setiap pasangan simpul yang bertetangga pada graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes P_n$ memiliki label yang relatif prima. Misalkan dua simpul bertetangga u dan v memiliki label $a = f(u)$ dan $b = f(v)$.

Kasus 1. Untuk dua simpul bertetangga v_i dan v_{i+1} dengan $1 \leq i \leq n-1$, diperoleh

$$f(v_i) = i \quad \text{dan} \quad f(v_{i+1}) = i + 1.$$

Karena i dan $i+1$ merupakan dua bilangan bulat positif yang berurutan, maka

$$\gcd(f(v_i), f(v_{i+1})) = 1.$$

Kasus 2. Untuk dua simpul bertetangga w_i dan w_{i+1} dengan $1 \leq i \leq n-1$, diperoleh

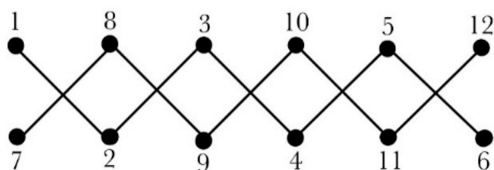
$$f(w_i) = n+i \quad \text{dan} \quad f(w_{i+1}) = n+i+1.$$

Kedua label tersebut merupakan bilangan bulat positif yang berurutan, sehingga

$$\gcd(f(w_i), f(w_{i+1})) = 1.$$

Berdasarkan kedua kasus tersebut, untuk setiap dua simpul bertetangga u dan v pada graf $P_2 \otimes P_n$ berlaku $\gcd(f(u), f(v)) = 1$. Dengan demikian, graf $P_2 \otimes P_n$ untuk $n \geq 2$ memiliki pelabelan prima, sehingga graf tersebut merupakan graf prima. \square

Selanjutnya, **Gambar 6** menunjukkan contoh pelabelan prima pada graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes P_n$ dengan $n \geq 2$.



Gambar 6. Pelabelan prima graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes P_6$

4. Kesimpulan

Hasil penelitian menunjukkan bahwa graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_2 \otimes C_n$ untuk $n \geq 3$, dan $P_2 \otimes P_n$ untuk $n \geq 2$ merupakan graf prima. Dengan demikian, tujuan penelitian untuk menentukan keberadaan pelabelan prima pada kelas graf hasil operasi Perkalian Tensor telah tercapai. Selain itu, diduga bahwa secara umum graf hasil operasi *Tensor Product* $P_m \otimes C_n$ dan $P_m \otimes P_n$ untuk setiap $m \geq 3$ juga memiliki pelabelan prima. Akan tetapi, untuk setiap nilai m yang berbeda terdapat pola label yang berbeda sehingga bergantung pada nilai m . Oleh karena itu, diperlukan langkah pembuktian yang lebih kompleks untuk menentukan pola pelabelan prima pada graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_m \otimes C_n$ dan $P_m \otimes P_n$ secara umum. Diperlukan penelitian lanjutan untuk mengkaji apakah graf hasil operasi Perkalian Tensor $P_m \otimes C_n$ dan $P_m \otimes P_n$ untuk setiap $m \geq 3$ juga memiliki pelabelan prima.

Kontribusi Penulis. Suci Triwahyuniti: Konseptualisasi, metodologi, analisis formal, investigasi, kurasi data, penulisan–persiapan draf asli. Desi Rahmadani: Supervisi, administrasi proyek, penulisan–tinjauan dan penyuntingan, validasi. Kedua penulis telah membaca dan menyetujui versi akhir naskah yang diterbitkan.

Ucapan Terima Kasih. Para penulis mengucapkan terima kasih kepada Universitas Negeri Malang atas dukungan pendanaan melalui hibah penelitian skripsi. Ucapan terima kasih juga disampaikan kepada seluruh pihak yang telah memberikan dukungan dan bantuan sehingga penelitian ini dapat diselesaikan dengan baik. Selain itu, para penulis menghargai masukan dan saran dari editor serta para reviewer yang telah berkontribusi dalam penyempurnaan naskah ini.

Pembiayaan. Penelitian ini didanai oleh Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat (LPPM) Universitas Negeri Malang melalui Hibah Internal Universitas Negeri Malang (UM) Skema Bantuan Penelitian Skripsi.

Konflik Kepentingan. Para penulis menyatakan tidak ada konflik kepentingan yang terkait dengan artikel ini.

Ketersediaan Data. Tidak tersedia.

Referensi

- [1] B. Acciaio and B. A. Neumann, "Characterization of transport optimizers via graphs and applications to Stackelberg–Cournot–Nash equilibria," *Math Finan Econ*, vol. 19, no. 1, pp. 67–99, 2025, doi: [10.1007/s11579-024-00375-x](https://doi.org/10.1007/s11579-024-00375-x).
- [2] L. Wan, "The Genus of a Graph: A Survey," *Symmetry*, vol. 15, no. 2, p. 322, Jan. 2023, doi: [10.3390/sym15020322](https://doi.org/10.3390/sym15020322).
- [3] E. M. El-Kholy and H. Ahmed, "Perfect folding of graphs," *Delta Journal of Science*, vol. 40, no. 1, pp. 30–35, Jun. 2019, doi: [10.21608/djs.2019.139192](https://doi.org/10.21608/djs.2019.139192).
- [4] L. F. Casinillo, "A Closer Look at a Path Domination Number in Grid Graphs," *JFMA*, vol. 6, no. 1, pp. 18–26, Jul. 2023, doi: [10.14710/jfma.v6i1.16608](https://doi.org/10.14710/jfma.v6i1.16608).
- [5] T. Koshy, *Discrete Mathematics with Applications*, 1st ed. San Diego: Elsevier Science & Technology, 2004.
- [6] R. Uscanga, K. Melhuish, and J. P. Cook, "Students Techniques for Approaching Defining Properties of Functions," *Educ Stud Math*, vol. 117, no. 3, pp. 457–484, 2024, doi: [10.1007/s10649-024-10344-2](https://doi.org/10.1007/s10649-024-10344-2).
- [7] B.-H. Xing, N. U. Ozalan, and J.-B. Liu, "The Degree Sequence on Tensor and Cartesian Products of Graphs and Their Omega Index," *MATH*, vol. 8, no. 7, pp. 16618–16632, 2023, doi: [10.3934/math.2023850](https://doi.org/10.3934/math.2023850).
- [8] S. Elsakhawy, "Independence and Domination in Divisor Graph and Mod-Difference Graphs," *J Egypt Math Soc*, vol. 31, no. 1, p. 4, 2023, doi: [10.1186/s42787-023-00159-0](https://doi.org/10.1186/s42787-023-00159-0).

- [9] J. A. Gallian, "A Dynamic Survey of Graph Labeling," *Electron. J. Combin.*, vol. 1000, DS6, Dec. 2022, doi: [10.37236/11668](https://doi.org/10.37236/11668).
- [10] G. Chartrand, C. Egan, and P. Zhang, *How to Label a Graph*, 1st ed., Springer-Briefs in Mathematics. Cham: Springer International Publishing, 2019.
- [11] D. Rahmadani, A. Aldiansyah, D. Pratiwi, and V. Kusumasari, "Prime Labelling of Amalgamation of Flower Graph," *BAREKENG: Journal of Mathematics and Its Applications*, 2025.
- [12] B. Abughazaleh and O. A. Abughneim, "Prime Labeling of Graphs Constructed from Wheel Graph," *Heliyon*, vol. 10, no. 2, p. e23979, 2024, doi: [10.1016/j.heliyon.2024.e23979](https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e23979).
- [13] D. R. Putra, M. Kiftiah, and F. Fran, "Pelabelan Prima pada Graf Simpul Semi Total dari Graf Sikat," *Var.*, vol. 5, no. 2, pp. 117–124, 2022, doi: [10.26737/var.v5i2.2699](https://doi.org/10.26737/var.v5i2.2699).
- [14] A. S. Alfiyani, "Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Terkait Roda," Institut Teknologi Sepuluh Noverber, 2020.
- [15] S. Meena and G. Gajalakshmi, "Odd Prime Labeling of Graphs Related to Circular Ladder," *Comm. Math. Appl.*, vol. 13, no. 4, pp. 1307–1315, Dec. 2022, doi: [10.26713/cma.v13i4.2173](https://doi.org/10.26713/cma.v13i4.2173).
- [16] J. A. Scada and Y. Susanti, "Prime Labeling of Some Web Graphs Without Center," *JFMA*, vol. 7, no. 1, pp. 35–44, Jun. 2024, doi: [10.14710/jfma.v0i0.19862](https://doi.org/10.14710/jfma.v0i0.19862).
- [17] A. Bedi, M. Ollis, and S. Ramesh, "On Prime Labelings of Uniform Cycle Snake Graphs," *PUMP J. Undergrad. Res.*, vol. 6, pp. 151–171, Apr. 2023, doi: [10.46787/pump.v6i0.3633](https://doi.org/10.46787/pump.v6i0.3633).
- [18] S. Meena and G. Gajalakshmi, "Prime Labeling of H-Super Subdivision of Y-tree Related Graphs," *Ratio Mathematica*, vol. 46, Mar. 2023, doi: [10.23755/rm.v46i0.1056](https://doi.org/10.23755/rm.v46i0.1056).
- [19] G. Prabhakaran, S. Vijayaraj, and V. Ganesan, "Odd Prime labeling of Franklin graph," vol. 33, no. 7, 2024.
- [20] A. Ezhil, "Prime Labelling for Some Bipartiate Related Graphs," *ijmcr*, vol. 11, no. 7, Jul. 2023, doi: [10.47191/ijmcr/v11i7.12](https://doi.org/10.47191/ijmcr/v11i7.12).