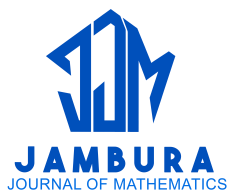


# Deret Maclaurin Turunan Fraksional Fungsi Inverse Trigonometri dan Radius Kekonverganannya

Siti Miftahurrohmah Khoirunisa, Hafiz Iqbal Anshori, dan Eka Mulyawati S. Karim



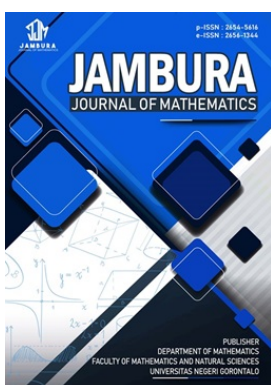
Volume 8, Issue 1, Pages 121–125, February 2026

Diterima 20 Desember 2025, Direvisi 24 Februari 2026, Disetujui 26 Februari 2026, Diterbitkan 28 Februari 2026

To Cite this Article : S. M. Khoirunisa, H. I. Anshori, dan E. M. S. Karim, "Deret Maclaurin Turunan Fraksional Fungsi Inverse Trigonometri dan Radius Kekonverganannya", *Jambura J. Math*, vol. 8, no. 1, pp. 121–125, 2026, <https://doi.org/10.37905/jjom.v8i1.37016>

© 2026 by author(s)

## JOURNAL INFO • JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS

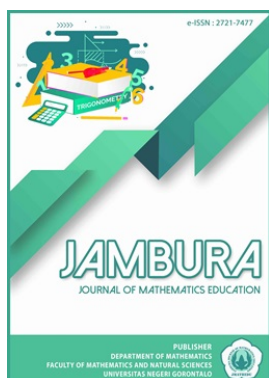


	Homepage	: <a href="http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/index">http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/index</a>
	Journal Abbreviation	: Jambura J. Math.
	Frequency	: Biannual (February and August)
	Publication Language	: English (preferable), Indonesia
	DOI	: <a href="https://doi.org/10.37905/jjom">https://doi.org/10.37905/jjom</a>
	Online ISSN	: 2656-1344
	Editor-in-Chief	: Hasan S. Panigoro
	Publisher	: Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo
	Country	: Indonesia
	OAI Address	: <a href="http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/oai">http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom/oai</a>
	Google Scholar ID	: iWLjgaUAAAAJ
	Email	: <a href="mailto:info.jjom@ung.ac.id">info.jjom@ung.ac.id</a>

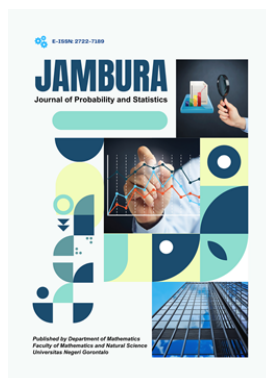
## JAMBURA JOURNAL • FIND OUR OTHER JOURNALS



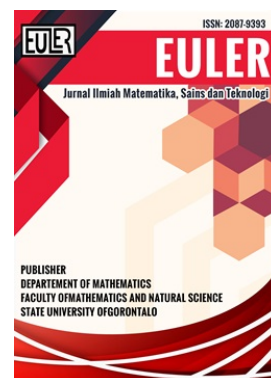
Jambura Journal of Biomathematics



Jambura Journal of Mathematics Education



Jambura Journal of Probability and Statistics



EULER : Jurnal Ilmiah Matematika, Sains, dan Teknologi



# Deret Maclaurin Turunan Fraksional Fungsi Inverse Trigonometri dan Radius Kekonvergenannya

Siti Miftahurrohmah Khoirunisa<sup>1,\*</sup>, Hafiz Iqbal Anshori<sup>1</sup>, Eka Mulyawati S. Karim<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Jurusan Pengajaran Matematika, Institut Teknologi Bandung, Bandung 40116, Indonesia

## ARTICLE HISTORY

Diterima 20 Desember 2025  
 Direvisi 24 Februari 2026  
 Disetujui 26 Februari 2026  
 Diterbitkan 28 Februari 2026

## KATA KUNCI

Turunan Fraksional  
 Invers Trigonometri  
 Maclaurin  
 Konvergen

## KEYWORDS

Fractional Derivative  
 Inverse Trigonometric  
 Maclaurin  
 Convergence

**ABSTRAK.** Turunan fraksional adalah generalisasi dari turunan biasa dengan orde non-integer atau pecahan. Penelitian ini menyajikan turunan fraksional dari fungsi invers trigonometri (arcsin, arccos, dan arctan) dengan batasan orde  $0 < \alpha \leq 1$ . Fungsi invers trigonometri tersebut disajikan dalam bentuk deret Maclaurin. Selanjutnya, turunan fraksionalnya dapat ditentukan dengan menggunakan definisi turunan fraksional menurut Riemann–Liouville. Hasil utama menunjukkan formula eksplisit untuk deret Maclaurin fraksional dan membuktikan bahwa radius kekonvergenan dari fungsi asal sama dengan radius kekonvergenan dari fungsi turunan fraksionalnya.

**ABSTRACT.** Fractional derivatives are a generalization of ordinary derivatives to non-integer or fractional orders. This study presents the fractional derivatives of inverse trigonometric functions (arcsin, arccos, and arctan) with the order constraint  $0 < \alpha \leq 1$ . These inverse trigonometric functions are expressed in the form of Maclaurin series. Furthermore, their fractional derivatives can be determined using the Riemann–Liouville definition of fractional derivatives. The main results show an explicit formula for the fractional Maclaurin series and prove that the radius of convergence of the original function is equal to the radius of convergence of its fractional derivative.



This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License. **Editorial of JJoM:** Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo, Jln. Prof. Dr. Ing. B. J. Habibie, Bone Bolango 96554, Indonesia.

## 1. Pendahuluan

Konsep matematika yang sangat fundamental salah satunya adalah turunan. Turunan sangat diperlukan pada kehidupan sehari-hari. Misalnya turunan pada bidang ekonomi untuk mengetahui biaya minimal dari suatu produk, turunan eksponensial di bidang kedokteran untuk menganalisa efektivitas terapi pada pasien, turunan di bidang teknologi untuk meminimalkan error pada *machine learning*, dan lain-lain.

Penelitian ini lebih fokus membahas turunan dengan orde bilangan pecahan yang disebut turunan fraksional. Turunan fraksional tak kalah pentingnya bagi berbagai bidang ilmu fisika seperti teknik, maupun mekanika [1, 2]. Adapun beberapa jenis turunan fraksional sebagai berikut:

- Riemann–Liouville (RL) [3]:

$$D_{RL}^{\alpha} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left[ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right].$$

- Caputo [4]:

$$D_C^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau.$$

- Caputo-Fabrizio (CF) [5]:

$$D_{CF}^{\alpha} f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(\tau) \exp \left[ -\frac{\alpha}{1-\alpha} (t-\tau) \right] d\tau.$$

\*Penulis Korespondensi.

- Atangana-Baleanu (AB) [6]:

$$D_{ABC}^{\alpha} f(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(\tau) E_{\alpha} \left[ -\frac{\alpha}{1-\alpha} (t-\tau)^{\alpha} \right] d\tau.$$

- Grünwald-Letnikov (GL) [7]:

$$D_{GL}^{\alpha} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^N (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh).$$

Di antara beberapa jenis turunan fraksional di atas, Riemann-Liouville merupakan salah satu turunan fraksional yang paling fundamental dan paling banyak dikaji dalam literatur matematika, karena memberikan landasan konseptual yang paling umum sehingga dapat dikembangkan lebih luas [8, 9]. Di samping itu, perluasan deret Maclaurin ke dalam turunan fraksional Riemann-Liouville menjadi topik yang aktif dikaji karena berpotensi memperluas jangkauan analisis fungsi yang hanya efektif dengan pendekatan metode orde pecahan (*non-integer*) [10, 11].

Penelitian ini mengeksplorasi penggunaan deret Maclaurin pada turunan fraksional dari suatu fungsi berorde  $0 < \alpha \leq 1$  dengan syarat diturunkan sebanyak takhingga kali [12]. Salah satu fungsinya yaitu fungsi invers trigonometri yang sangat penting bagi kalkulus, geometri, juga teknik [13]. Akan tetapi, konstruksi eksplisit deret Maclaurin yang menggunakan turunan fraksional Riemann-Liouville untuk fungsi invers trigonometri seperti arcsin, arccos, dan arctan beserta analisis radius kekonvergenannya belum dibahas secara mendalam.

Beberapa penelitian sebelumnya terkait turunan fraksional diantaranya, Jannan [14] membahas turunan fraksional dari fungsi hiperbolik; Oldham dan Spanier [15] memberikan ekspresi untuk turunan fraksional fungsi pangkat  $x^n$  kecuali fungsi invers trigonometri  $\arccos(t)$ ; Herrmann [12] membahas representasi grafis kekonvergenan deret fraksional untuk fungsi dasar turunan fraksional; El-Ajou dkk. [16] memperkenalkan metode residual power series berbasis ekspansi deret fraksional untuk menyelesaikan persamaan diferensial fraksional nonlinear; Karande dan Khemnar [17] mengkaji perilaku turunan fraksional dari fungsi-fungsi trigonometri secara khusus; Garrappa dkk. [18] mengkaji evaluasi numerik turunan fraksional Riemann-Liouville dari fungsi-fungsi elementer secara komprehensif.

Meskipun teori umum tentang turunan fraksional dari deret pangkat telah diketahui, belum ada yang membahas mengenai: (1) formula eksplisit untuk deret Maclaurin fraksional fungsi  $\arccos(t)$ , (2) analisis radius kekonvergenan deret fraksional yang mencakup ketiga fungsi invers trigonometri belum dilakukan secara komprehensif, (3) visualisasi kekonvergenan deret fraksional untuk berbagai orde  $\alpha$  masih terbatas.

Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk: (1) menurunkan formula eksplisit untuk deret Maclaurin fraksional fungsi  $\arcsin(t)$ ,  $\arccos(t)$ , dan  $\arctan(t)$  menggunakan turunan Riemann-Liouville, (2) membuktikan radius kekonvergenan deret fraksional terhadap turunan fraksional untuk ketiga fungsi invers trigonometri, (3) membuat visualisasi kekonvergenan deret fraksional untuk berbagai orde  $\alpha$ .

## 2. Metode

Penelitian ini menggunakan metode Riemann-Liouville karena metode ini merupakan generalisasi paling natural dari kalkulus klasik ke orde *non-integer* dan berfungsi untuk menyelidiki sifat-sifat analitik fungsi-fungsi yang didefinisikan oleh integral, seperti fungsi invers trigonometri [4]. Selain itu, metode ini menghasilkan ekspansi deret secara langsung dari sifat fundamental yaitu

$$D^{-\nu}t^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\nu+1)}t^{p+\nu}. \tag{1}$$

Penelitian ini dilakukan dengan beberapa tahapan. **Pertama**, ketiga fungsi invers trigonometri dinyatakan dalam deret Maclaurin klasiknya [19, 20], yaitu

$$\arcsin(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2(2k+1)}t^{2k+1}, \quad |t| < 1, \tag{2}$$

$$\arccos(t) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(t), \quad |t| < 1, \tag{3}$$

$$\arctan(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}t^{2k+1}, \quad |t| \leq 1. \tag{4}$$

Representasi ini menjadi titik awal untuk aplikasi operator fraksional.

**Kedua**, operator  $D_{RL}^{\alpha}$  diterapkan pada deret pangkat menggunakan **Teorema 1** dan **Teorema 2**.

**Teorema 1** ([21]). Turunan fraksional dari fungsi kuasa  $f(t) =$

$t^{\lambda}$ , dengan  $t > 0$  dan  $\lambda > -1$  memenuhi

$$D^{\alpha}f(t) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}t^{\lambda-\alpha}. \tag{5}$$

Jika  $\lambda = 2k + 1$ , maka

$$\begin{aligned} D^{\alpha}f(t) &= \frac{\Gamma(2k+1+1)}{\Gamma(2k+1-\alpha+1)}t^{2k+1-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(2k+2)}{\Gamma(2k-\alpha+2)}t^{2k-\alpha+1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Dengan menerapkan turunan fraksional Riemann-Liouville, diperoleh **Teorema 2**.

**Teorema 2** ([4]). Untuk  $\arcsin(t)$ :

$$D_{RL}^{\alpha} \arcsin(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2(2k+1)} \cdot \frac{\Gamma(2k+2)}{\Gamma(2k+2-\alpha)}t^{2k+1-\alpha}, \tag{7}$$

Untuk  $\arccos(t)$ , dengan  $0 < \alpha < 1$ :

$$\begin{aligned} D_{RL}^{\alpha} \arccos(t) &= \frac{\pi}{2\Gamma(1-\alpha)}t^{-\alpha} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2(2k+1)} \cdot \frac{\Gamma(2k+2)}{\Gamma(2k+2-\alpha)}t^{2k+1-\alpha}, \end{aligned} \tag{8}$$

Untuk  $\arctan(t)$ :

$$D_{RL}^{\alpha} \arctan(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot \frac{\Gamma(2k+2)}{\Gamma(2k+2-\alpha)}t^{2k+1-\alpha}. \tag{9}$$

Perhatikan bahwa untuk  $\arccos(t)$  muncul suku singular  $t^{-\alpha}$  yang berasal dari turunan fraksional konstanta  $\frac{\pi}{2}$ . Suku ini menyebabkan singularitas di  $t = 0$  untuk  $0 < \alpha < 1$ .

**Ketiga**, menggunakan uji Cauchy-Hadamard untuk mencari radius kekonvergenan deret hasil seperti **Teorema 3**.

**Teorema 3** ([22]). Jika deret pangkat  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k$ , maka jari-jari kekonvergenan  $R$  diberikan oleh rumus

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \tag{10}$$

dengan catatan

- Jika  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$ , maka  $R = \infty$  (deret konvergen untuk semua  $z$ ).
- Jika  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \infty$ , maka  $R = 0$  (deret konvergen hanya di  $z = c$ ).

Analisis pertumbuhan koefisien perlu menggunakan hampiran Stirling dengan  $k \rightarrow \infty$  sehingga

$$\Gamma(k+a) \approx k^a \Gamma(k). \tag{11}$$

Keempat, membuat visualisasi kekonvergenan dari berbagai orde untuk memvalidasi adanya kecocokan antar orde.

### 3. Hasil dan Pembahasan

#### 3.1. Radius Kekonvergenan

Pada bagian ini akan dibuktikan bahwa  $D_{RL}^\alpha f(t)$  dari fungsi invers trigonometri memiliki radius kekonvergenan  $R$ . Hasil penelitian disajikan dalam Teorema 4.

**Teorema 4.** Jika  $f(t) = \sum_{k=0}^\infty a_k t^{2k+1}$  memiliki radius kekonvergenan  $R$ , maka  $D_{RL}^\alpha f(t)$  juga memiliki radius kekonvergenan  $R$ , untuk ketiga fungsi invers trigonometri.

*Bukti.* Misalkan  $f(t) = \sum_{k=0}^\infty a_k t^{2k+1}$ . Dengan menggunakan Teorema 1, Teorema 2, dan Teorema 3, diperoleh

$$\begin{aligned} D_{RL}^\alpha f(t) &= \sum_{k=0}^\infty a_k \frac{\Gamma(2k+2)}{\Gamma(2k+2-\alpha)} t^{2k+1-\alpha} \\ &= \sum_{k=0}^\infty a_k \frac{\Gamma(2(k+1))}{\Gamma(2(k+1)-\alpha)} t^{2k+1-\alpha} \\ &\approx \sum_{k=0}^\infty a_k \frac{(2k)\Gamma(2k)}{(2k)^{1-\alpha}\Gamma(2k)} t^{2k+1-\alpha} \\ &= \sum_{k=0}^\infty a_k \frac{(2k)^1}{(2k)^{1-\alpha}} t^{2k+1-\alpha} \\ &= \sum_{k=0}^\infty a_k (2k)^\alpha t^{2k+1-\alpha}. \end{aligned} \tag{12}$$

Selanjutnya, substitusikan pers. (12) ke Teorema 3 sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} |b_k|^{1/k} &= \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k} \cdot \limsup_{k \rightarrow \infty} |c_k|^{1/k} \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k} \cdot \left( \lim_{k \rightarrow \infty} (2k)^\alpha \right)^{1/k} \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} (2k)^{\alpha/k} \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} e^{(\alpha/k) \ln(2k)} \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k} \cdot e^0 \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k}. \end{aligned} \tag{13}$$

Dari section 3.2.1 kita memperoleh

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}. \tag{14}$$

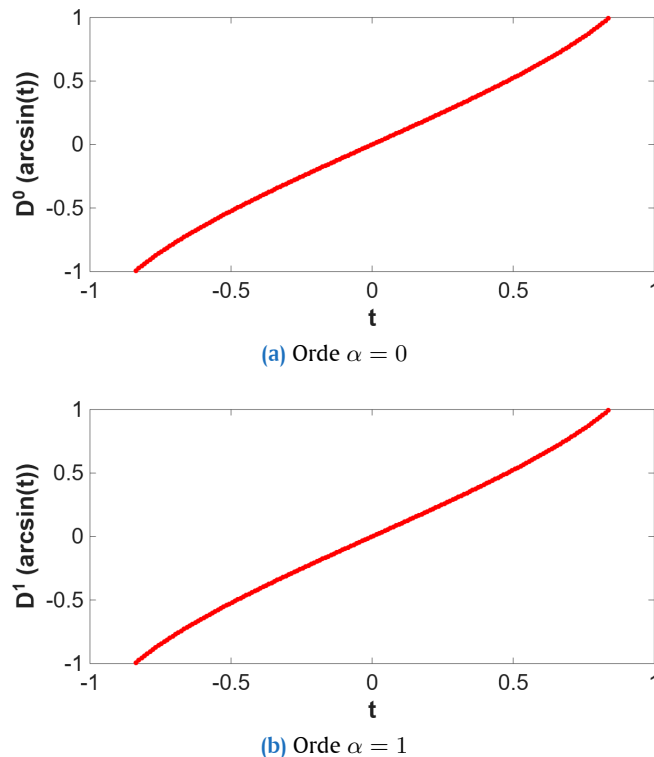
Karena  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup |b_k|^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup |a_k|^{1/k}$ , dapat disimpulkan bahwa  $D_{RL}^\alpha f(t)$  memiliki radius konvergensi yang sama dengan  $f(t) = \sum_{k=0}^\infty a_k t^{2k+1}$ . Lebih lanjut, hal tersebut memberi arti bahwa radius kekonvergenan turunan fraksional fungsi invers trigonometri sama dengan radius fungsi asalnya.  $\square$

#### 3.2. Grafik Kekonvergenan Deret

Selanjutnya disajikan visualisasi kekonvergenan deret invers trigonometri untuk memberikan gambaran numerik terhadap hasil analisis teoretis yang telah diperoleh sebelumnya. Visualisasi ini bertujuan untuk menunjukkan perilaku deret fraksional dalam mendekati fungsi aslinya serta untuk mengamati pengaruh perubahan orde fraksional  $\alpha$  terhadap tingkat kekonvergenan deret.

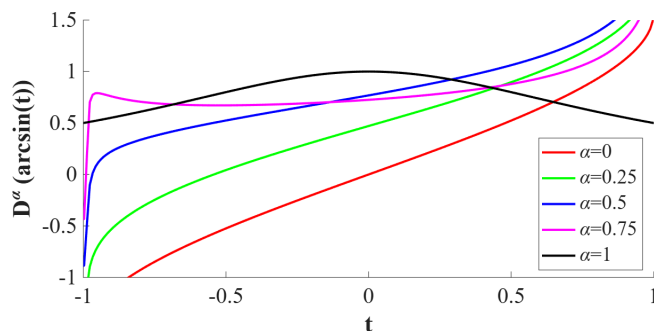
##### 3.2.1. Grafik Kekonvergenan Deret arcsin(t)

Grafik turunan fraksional dari deret Maclaurin fungsi arcsin(t) berorde 0 dan 1 ditampilkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Radius kekonvergenan arcsin(t)

Turunan ke-1 dari fungsi deret Maclaurin arcsin(t) pada Gambar 1b adalah dirinya sendiri yang dapat dilihat pada Gambar 1a. Grafik turunan fraksional dari deret Maclaurin fungsi arcsin(t) berorde 0, 0,25, 0,5, 0,75, dan 1 ditampilkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Radius kekonvergenan arcsin(t) untuk  $0 < \alpha < 1$

Pada Gambar 2 terlihat bahwa grafik turunan fraksional RL

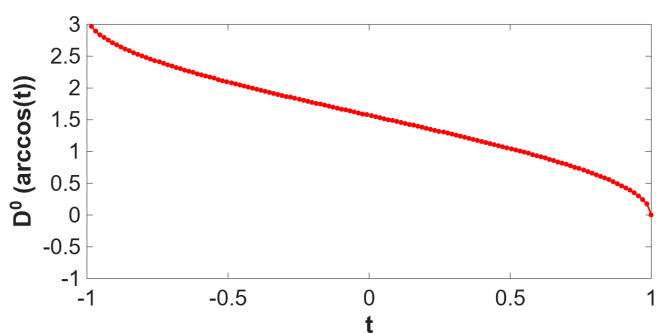
dari fungsi  $\arcsin(t)$  untuk orde  $\alpha = 0$  sama dengan bentuk grafik fungsi  $\arcsin(t)$  yang ditunjukkan pada Gambar 1. Artinya, turunan fraksional dari  $\arcsin(t)$  ialah

$$D_{RL}^\alpha \arcsin(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k+1)} \cdot \frac{\Gamma(2k+2)}{\Gamma(2k+2-\alpha)} t^{2k+1-\alpha}.$$

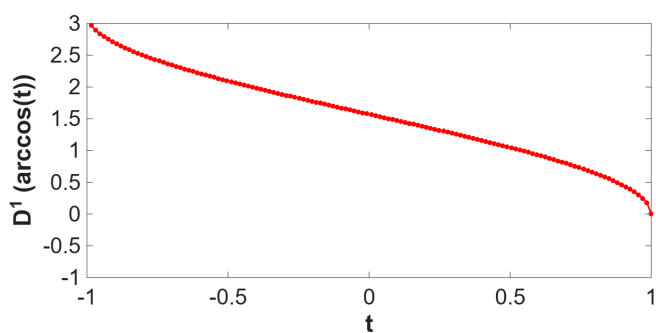
Lebih lanjut, dari Gambar 2 juga terlihat bahwa turunan fraksional RL dari fungsi  $\arcsin(t)$  konvergen pada selang  $(-1, 1)$  dan mengkonfirmasi Teorema 3 bahwa radius kekonvergenan adalah  $R = 1$  untuk semua  $\alpha$ .

### 3.2.2. Grafik Kekonvergenan Deret $\arccos(t)$

Grafik turunan fraksional dari deret Maclaurin fungsi  $\arccos(t)$  berorde 0 dan 1 ditampilkan pada Gambar 3.



(a) Orde  $\alpha = 0$



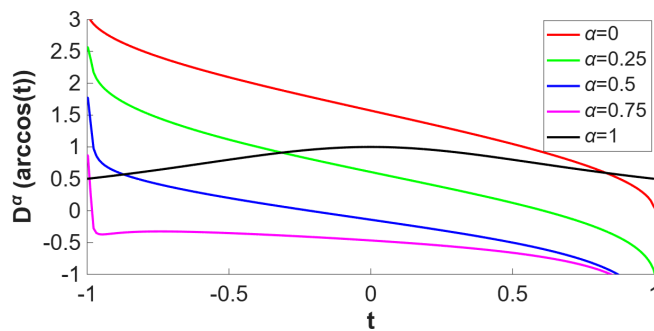
(b) Orde  $\alpha = 1$

Gambar 3. Radius kekonvergenan  $\arccos(t)$

Pada Gambar 3 ditunjukkan bahwa turunan orde pertama dari deret Maclaurin fungsi  $\arccos(t)$  memiliki nilai yang identik dengan turunan orde nol dari deret Maclaurin fungsi yang sama. Hal ini menunjukkan adanya kesesuaian hasil antara kedua orde tersebut dalam representasi deret yang diperoleh. Untuk memberikan gambaran yang lebih komprehensif mengenai perilaku turunan fraksional fungsi  $\arccos(t)$ , selanjutnya disajikan grafik turunan fraksional deret Maclaurin untuk beberapa orde, yaitu 0, 0,25, 0,5, 0,75, dan 1 yang ditampilkan pada Gambar 4.

Pada Gambar 4 ditunjukkan bahwa grafik turunan fraksional Riemann–Liouville dari fungsi  $\arccos(t)$  untuk orde  $\alpha = 0$  memiliki bentuk yang sama dengan grafik fungsi  $\arccos(t)$  yang disajikan sebelumnya. Hal ini menunjukkan bahwa turunan fraksional dari fungsi  $\arccos(t)$  diberikan oleh

$$D_{RL}^\alpha \arccos(t) = \frac{\pi}{2\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k+1)} \cdot$$

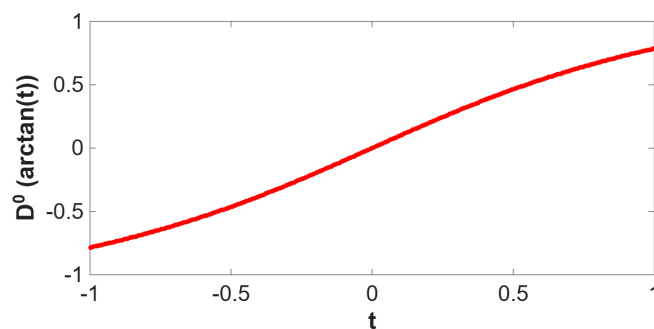


Gambar 4. Radius kekonvergenan  $\arccos(t)$  untuk  $0 < \alpha < 1$

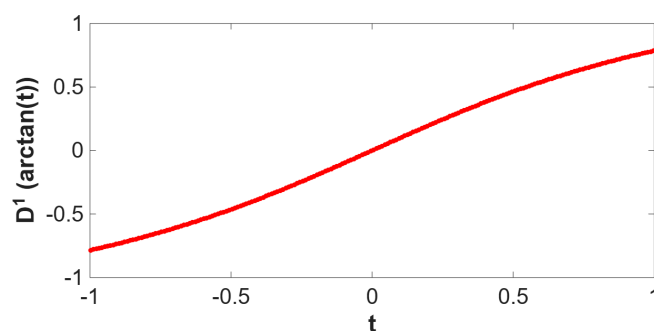
$\frac{\Gamma(2k+2)}{\Gamma(2k+2-\alpha)} t^{2k+1-\alpha}$ . Selain itu, grafik yang diperoleh menunjukkan bahwa turunan fraksional Riemann–Liouville dari fungsi  $\arccos(t)$  konvergen pada selang  $(-1, 1)$ , sehingga menguatkan hasil pada Teorema 3 bahwa radius kekonvergenan deret tersebut adalah  $R = 1$  untuk setiap nilai  $\alpha$ .

### 3.2.3. Grafik Kekonvergenan Deret $\arctan(t)$

Grafik turunan fraksional dari deret Maclaurin fungsi  $\arctan(t)$  berorde 0 dan 1, ditampilkan pada Gambar 5.



(a) Orde  $\alpha = 0$

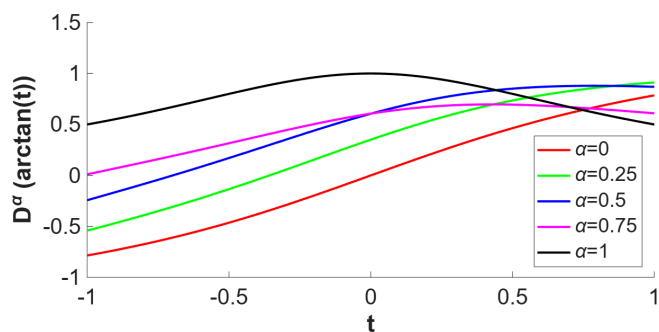


(b) Orde  $\alpha = 1$

Gambar 5. Radius kekonvergenan  $\arctan(t)$

Turunan ke-0 dari fungsi deret Maclaurin  $\arctan(t)$  memiliki bentuk yang sama dengan turunan ke-1 dari fungsi deret Maclaurin  $\arctan(t)$  sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 5a dan Gambar 5b. Selanjutnya disajikan grafik turunan fraksional dari deret Maclaurin fungsi  $\arctan(t)$  untuk orde  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 0,25$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $\alpha = 0,75$ , dan  $\alpha = 1$ , pada Gambar 6.

Terlihat pada Gambar 6 bahwa grafik turunan fraksional Riemann–Liouville dari fungsi  $\arctan(t)$  untuk orde  $\alpha = 0$  me-



**Gambar 6.** Radius kekonvergenan  $\arctan(t)$  untuk  $0 < \alpha < 1$

miliki bentuk yang sama dengan grafik fungsi  $\arctan(t)$  yang ditunjukkan pada Gambar 5. Hal ini menunjukkan bahwa turunan fraksional dari  $\arctan(t)$  dinyatakan oleh

$$D_{RL}^{\alpha} \arctan(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot \frac{\Gamma(2k+2)}{\Gamma(2k+2-\alpha)} t^{2k+1-\alpha}.$$

Namun demikian, pada Gambar 6 terlihat bahwa turunan fraksional Riemann–Liouville dari fungsi  $\arctan(t)$  tidak konvergen pada selang  $(-1, 1)$ . Oleh karena itu, radius kekonvergenan turunan fraksional tersebut adalah  $R = \infty$ .

#### 4. Kesimpulan

Hasil penelitian menunjukkan bahwa radius kekonvergenan deret fraksional untuk ketiga fungsi invers trigonometri yang dikaji memiliki nilai radius kekonvergenan  $R$  yang sama untuk semua  $\alpha$ , sebagaimana dinyatakan pada Teorema 3. Selain itu, berdasarkan visualisasi grafik pada berbagai orde  $\alpha$ , diperoleh bahwa turunan fraksional pertama dari fungsi invers trigonometri mempertahankan bentuk fungsi asalnya. Temuan ini memberikan kontribusi yang komprehensif terhadap pengembangan teori deret fraksional pada fungsi invers trigonometri serta membuka peluang penelitian lanjutan pada fungsi-fungsi transendental lainnya.

**Kontribusi Penulis.** Siti Miftahurrohmah Khoirunisa: Kurasi data, penulisan-persiapan draf asli, administrasi proyek. Hafiz Iqbal Anshori: Konseptualisasi, metodologi, analisis formal, penulisan-tinjauan dan penyuntingan, validasi. Eka Mulyawati S. Karim: Visualisasi. Semua penulis telah membaca dan menyetujui versi manuskrip yang diterbitkan.

**Ucapan Terima Kasih.** Para penulis mengucapkan terimakasih kepada Bapak Oki Neswan, M.Sc., Ph.D. yang telah memberikan saran, dukungan, dan bantuan seluruh pihak yang telah memberikan dukungan dan bantuan sehingga penelitian ini dapat diselesaikan dengan baik. Selain itu, para penulis menghargai masukan dan saran dari editor serta para reviewer yang telah berkontribusi dalam penyempurnaan naskah ini.

**Pembiayaan.** Penelitian ini tidak menerima pendanaan eksternal.

**Konflik Kepentingan.** Para penulis menyatakan tidak ada konflik kepentingan yang terkait dengan artikel ini.

**Ketersediaan Data.** Tidak tersedia.

#### Referensi

- [1] H. Sun, Y. Zhang, D. Baleanu, W. Chen, and Y. Q. Chen, "A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering," *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 64, pp. 213–231, Nov. 2018, doi: [10.1016/j.cnsns.2018.04.019](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.04.019).
- [2] T. M. Atanacković, S. Pilipović, B. Stanković, and D. Zorica, *Fractional Calculus with Applications in Mechanics: Vibrations and Diffusion Processes*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2014, doi: [10.1002/9781118577530](https://doi.org/10.1002/9781118577530).
- [3] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, vol. 198. San Diego, CA, USA: Academic Press, 1998.
- [4] K. S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1993.
- [5] C. Liu, X. Yi, Z. Gong, and M. Han, "The control parametrization technique for numerically solving fractal–fractional optimal control problems involving Caputo–Fabrizio derivatives," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 472, Art. no. 116814, 2026, doi: [10.1016/j.cam.2025.116814](https://doi.org/10.1016/j.cam.2025.116814).
- [6] Z. U. A. Zafar, S. Younas, M. T. Hussain, and C. Tuñç, "Fractional aspects of coupled mass-spring system," *Chaos Solitons Fractals*, vol. 144, Art. no. 110677, 2021, doi: [10.1016/j.chaos.2021.110677](https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.110677).
- [7] X. Zhou, C. Zhao, and Y. Huang, "A deep learning optimizer based on Grünwald–Letnikov fractional order definition," *Mathematics*, vol. 11, no. 2, Art. no. 316, 2023, doi: [10.3390/math11020316](https://doi.org/10.3390/math11020316).
- [8] D. Baleanu, A. Fernandez, and A. Akgül, "On a fractional operator combining proportional and classical differintegrals," *Mathematics*, vol. 8, no. 3, Art. no. 360, 2022, doi: [10.3390/math8030360](https://doi.org/10.3390/math8030360).
- [9] R. Hilfer and Y. Luchko, "Desiderata for fractional derivatives and integrals," *Mathematics*, vol. 7, no. 2, Art. no. 149, 2021, doi: [10.3390/math7020149](https://doi.org/10.3390/math7020149).
- [10] K. Sahu, P. K. Pattnaik, and S. K. Padhan, "Fractional order Taylor series expansion for the function of several variables and applications," *Comput. Appl. Math.*, vol. 45, no. 1, 2026, doi: [10.1007/s40314-025-03480-9](https://doi.org/10.1007/s40314-025-03480-9).
- [11] Y. Mahatekar and A. S. Deshpande, "A novel method for solving Riemann–Liouville fractional differential equations," *Math. Methods Appl. Sci.*, vol. 48, no. 6, pp. 6952–6973, 2025, doi: [10.1002/mma.70071](https://doi.org/10.1002/mma.70071).
- [12] R. Hilfer, Y. Luchko, and Ž. Tomovski, "Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann–Liouville fractional derivatives," *Fract. Calc. Appl. Anal.*, vol. 12, no. 3, pp. 299–318, 2009.
- [13] M. A. Kudratovich and C. S. Tojiyevna, "Relationships between inverse trigonometric functions," *Int. Multidiscip. J. Res. Dev. (IJMRD)*, vol. 11, no. 5, 2024.
- [14] S. Janan and T. Janan, "Fractional derivative of hyperbolic function," *J. Mat. Stat. Komput.*, vol. 21, no. 1, pp. 267–284, Sep. 2024, doi: [10.20956/j.v21i1.35860](https://doi.org/10.20956/j.v21i1.35860).
- [15] K. B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*. New York, NY, USA: Academic Press, 1974, ch. 3.
- [16] A. El-Ajou, O. Abu Arqub, and S. Momani, "Approximate analytical solution of the nonlinear fractional KdV–Burgers equation: A new iterative algorithm," *J. Comput. Phys.*, vol. 293, pp. 81–95, Jul. 2015, doi: [10.1016/j.jcp.2014.08.004](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.08.004).
- [17] B. D. Karande and S. K. Khemnar, "On fractional derivatives of some functions of trigonometric type and its applications," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 507, no. 1, Art. no. 125782, 2022.
- [18] R. Garrappa, E. Kaslik, and M. Popolizio, "Evaluation of fractional integrals and derivatives of elementary functions: Overview and tutorial," *Mathematics*, vol. 7, no. 5, Art. no. 407, 2019, doi: [10.3390/math7050407](https://doi.org/10.3390/math7050407).
- [19] B.-N. Guo, D. Lim, and F. Qi, "Maclaurin's series expansions for positive integer powers of inverse (hyperbolic) sine and tangent functions and for incomplete gamma functions, with applications," *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, vol. 16, no. 2, pp. 427–466, 2022, doi: [10.2298/AA-DM210401017G](https://doi.org/10.2298/AA-DM210401017G).
- [20] R. M. Howard, "Radial based approximations for arcsine, arccosine, arctangent and applications," *AppliedMath*, vol. 3, no. 2, pp. 343–394, 2023, doi: [10.3390/appliedmath3020019](https://doi.org/10.3390/appliedmath3020019).
- [21] G. Strang and E. J. Herman, *Calculus Volume 2*. Houston, TX, USA: OpenStax, Rice University, 2023.
- [22] J. Hadamard, "Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor," *J. Math. Pures Appl.*, vol. 8, no. 4, pp. 101–186, 1892.