

## Aplikasi Deformasi-Q Statistik Fermi Dirac pada Kapasitas Panas Spesifik Elektron Bebas Logam.

kamirul<sup>1\*</sup>, Irsan Rahman<sup>2</sup>, Iful Amri<sup>3</sup>, Al Barra Harahap<sup>4</sup>

<sup>1)</sup> Pusat Riset Teknologi Satelit, Badan Riset dan Inovasi Nasional, Bogor, Indonesia

<sup>2)</sup> Jurusan Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Gorontalo, Indonesia.

<sup>3)</sup> Teknik Elektronika, Politeknik Jambi, Indonesia

<sup>4)</sup> Teknik Fisika, Institut Teknologi Sumatera, Indonesia

\* Correspondence e-mail : kamirul@brin.go.id.

**Abstract :** In this article, the contribution of free electrons to the specific heat capacity of metals at low temperatures has been studied using Fermi-Dirac statistics with deformed q parameters. The expression of the specific heat capacity of the metal and the value of the deformed parameter q have been obtained. Theoretical calculations of specific heat capacities for several kinds of alkali and transition metals have been carried out and compared with experimental results.

**Keywords:** Q-Deformation, specific heat capacity, Fermi Dirac statistics;

**Abstrak:** Dalam artikel ini, kontribusi elektron bebas terhadap kapasitas panas spesifik logam pada temperatur rendah telah dipelajari dengan menggunakan statistik Fermi-Dirac dengan parameter q terdeformasi. Telah diperoleh ekspresi kapasitas panas spesifik logam dan nilai parameter q terdeformasi. Perhitungan secara teori kapasitas panas spesifik untuk beberapa macam logam alkali dan transisi telah dilakukan dan dibandingkan dengan hasil eksperimen.

**Kata Kunci:** Q-Deformasi, kapasitas panas spesifik, Statistik Fermi Dirac;

### 1. Pendahuluan

Logam adalah sebuah bahan padatan yang mengandung banyak elektron yang bisa bergerak secara bebas melewati kristal. Sehingga, logam memiliki sifat konduktivitas listrik yang baik, yaitu sekitar  $10^6$ - $10^8$  (Ohmm)<sup>-1</sup>. Setiap atom didalam material hanya memiliki satu elektron, atau  $10^{22}$  elektron valensi untuk setiap cm<sup>3</sup>. Keterkaitan fungsi distribusi yang digunakan untuk menentukan elektron bebas gas, teori yang direapkan sedikit berbeda, yaitu jika elektron bebas dianggap sebagai gas ideal klasik yang paling sederhana yang mempunyai energi yang sama, kita menggunakan teori Druds untuk menganalisis persoalan tentang logam. Jika fungsi distribusi Maxwell-Boltzman digunakan untuk menganalisis gas klasik, maka fungsi distribusi yang diterapkan berdasarkan teori Lorentz. Jika fungsi dsitribusi Fermi-Dirac yang diterpakan untuk menyelesaikan masalah ini, fungsi distribusi yang diterapkan berdasarkan teori Sommerfelds. Kapasitas panas spesisifik elektron bebas di dalam logam dipelajari dari beberapa teori [1,2,3]. Dalam makalah ini, kami mengusulkan cara lain penerapan distribusi statitik Fermi-Dirac dengan q-terdefomasi untuk mempelajari kapasitas panas elektron bebas

dalam logam pada temperatur rendah [4,6]. Kami telah mendapatkan ekspresi dari kapasitas panas spesifik logam secara analitik dan nilai parameter deformasi-q. Perhitungan secara teori kapasitas panas spesifik untuk beberapa macam logam alkali dan transisi telah dilakukan dan dibandingkan dengan hasil eksperimen.

## 2. Metodologi

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi analitik dan numerik untuk menentukan kapasitas panas spesifik elektron bebas pada logam. Data yang diperoleh melalui metode ini kemudian dibandingkan dengan data eksperimen.

Pada temperatur rendah, jumlah elektron bebas gas dan kapaitas panas pada volume konstan berbanding lurus dengan temperatur mutlak [2,3].

$$C_v^e = \gamma T \tag{1}$$

Pada operator osilator Fermion terdeformasi-q terpenuhi hubungan komutasi berikut:

$$\hat{b}\hat{b}^+ + q\hat{b}^+\hat{b} = q^{-\hat{N}} \tag{2}$$

dengan N adalah jumlah osilator dan q adalah sebuah parameter deformasi. Deformasi-q untuk Fermion diberikan sebagai berikut :

$$\{n\}_q = \frac{q^{-n} - (-1)^n q^n}{q + q^{-1}} \tag{3}$$

Dalam fisika statistik, ekspresi termal rerata dari sebuah operator F diberikan oleh :

$$\langle \hat{F} \rangle = \frac{Tr(e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} \cdot \hat{F})}{Tr(e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})})} \tag{4}$$

Dimana  $\mu$  adalah potensial kimia, H adalah operator Hamiltonian sistem,  $\beta=1/KT$ , k konstanta Boltzman, dan T temperatur absolut. Drai persamaan (4) jumlah rata-rata partikel dengan level energi yang sama dapat dihitung dengan:

$$\langle \hat{N} \rangle = \frac{Tr(e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} \cdot \hat{N})}{Tr(e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})})} \tag{5}$$

Hasil perhitungan diatas akan menghasilkan :

$$\begin{aligned} Tr(e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} \cdot \{\hat{N}\}_q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-\beta(\varepsilon-\mu)\hat{N}} \{\hat{N}\}_q | n \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-\beta(\varepsilon-\mu)n} \{n\}_q | n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(\varepsilon-\mu)n} \{n\}_q \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(\varepsilon-\mu)n} \cdot \frac{q^{-n} - (-1)^n q^n}{q + q^{-1}} \\ &= \frac{1}{q + q^{-1}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (q^{-1} \cdot e^{-\beta(\varepsilon-\mu)})^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-q \cdot e^{-\beta(\varepsilon-\mu)})^n \right] \\ &= \left[ \frac{e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}}{1 + (q - q^{-1})e^{-\beta(\varepsilon-\mu)} - e^{-2\beta(\varepsilon-\mu)}} \right] \end{aligned} \tag{6}$$

Sedangkan suku normalisasi:

$$\begin{aligned} Tr(e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-\beta(\varepsilon-\mu)\hat{N}} | n \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-\beta(\varepsilon-\mu)n} | n \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(\varepsilon-\mu)n} \end{aligned} \tag{7}$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-\beta(\varepsilon - \mu)}} \quad (8)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (6) dan (8) ke persamaan (5), maka didapatkan fungsi distribusi deformasi-q dengan distribusi Fermi-Diract berikut :

$$\bar{n}(\varepsilon) = \langle \hat{N} \rangle = \left[ \frac{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}{e^{2\beta(\varepsilon - \mu)} + (q - q^{-1})e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1} \right] \quad (9)$$

Jumlah total (N) dan energi total (E) dari elektron bebas pada temperatur T adalah [1,2].

$$N = \int_0^{\infty} \rho(\varepsilon) \bar{n}(\varepsilon) d\varepsilon \quad (10)$$

$$E = \int_0^{\infty} \varepsilon \cdot \rho(\varepsilon) \bar{n}(\varepsilon) d\varepsilon \quad (11)$$

$$\rho(\varepsilon) = \frac{g(\varepsilon) \cdot V}{4\pi^2 \hbar^3} (2m)^{3/2} \cdot \varepsilon^{1/2} \quad (12)$$

dengan melakukan perhitungan untuk T = 0 maka didapatkan :

$$N = \frac{2}{3} \alpha \mu_0^{3/2} \quad (13)$$

$$E_0 = \frac{2}{5} \alpha \mu_0^{5/2} = \frac{3}{5} \mu_0 N \quad (14)$$

dengan  $\mu_0$  adalah potensial kimia ketika T = 0 K, yang diberikan oleh :

$$\mu_0 = \left( \frac{3N}{2\alpha} \right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{2/3} \quad (15)$$

Pada temperatur rendah tetapi T ≠ 0 , dari persamaan (10), (11), (12), (13), (14) lakukan transformasi dan ketika 0 < q < 1 maka didapatkan total energi.

$$E = E_0 \left[ 1 + 5 \frac{F(q)(kT)^2}{\mu_0^2} \right] \quad (16)$$

Dari persamaan (14) dan persamaan (16) didapatkan:

$$E = \frac{3}{5} N \mu_0 \left[ 1 + 5 \frac{F(q)(kT)^2}{\mu_0^2} \right] \quad (17)$$

dimana

$$F(q) = \frac{-1}{q^2 + 1} \left[ q(q-1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(q)^k}{k^2} + (1+q) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-q)^k}{k^2} - q \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(q)^k}{k^3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-q)^k}{k^3} \right] \quad (18)$$

Maka kapasitas panas elektron bebas pada volume konstan untuk kasus deformasi-q adalah:

$$C_V^{el} = 6 \frac{NF(q)k^2T}{\mu_0} \quad (19)$$

Jadi, pada temperatur rendah disekitar 0 K, kapasitas panas elektron bebas pada logam ketika terdeformasi-q adalah sebanding dengan temperatur itu sendiri. Dari persamaan (1) dan persamaan (19) didapatkan ekspresi :

$$F(q) = \frac{\mu_0 \gamma}{6Nk^2} \tag{20}$$

Atau didapatkan koefisien elektron termal :

$$\gamma = 6 \frac{Nk^2 F(q)}{\mu_0} \tag{21}$$

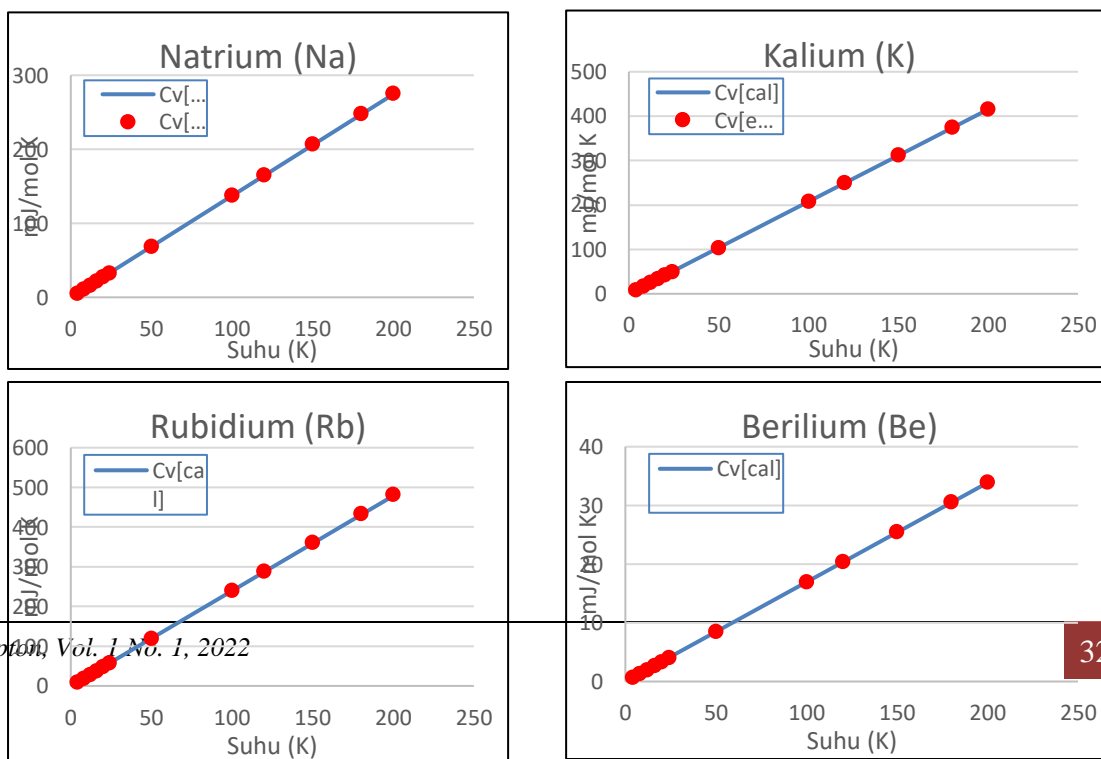
### 3. Hasil Numerik dan Pembahasan

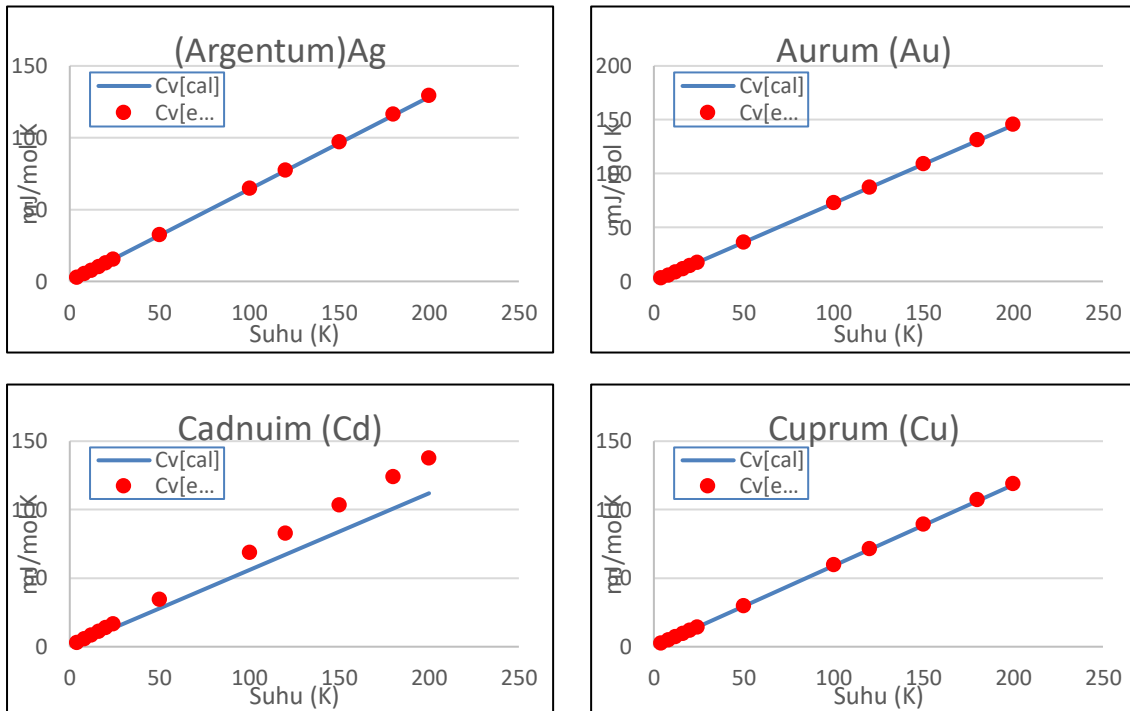
Tahapan numerik dilakukan dengan mencari nilai  $F(q)$  dan parameter- $q$  dengan menggunakan perangkat lunak Maple. Hasilnya disubstitusikan ke persamaan [20] dan [21] untuk mendapatkan nilai konstanta elektron termal ( $\gamma$ ). Hasil perhitungan juga menunjukkan bahwa nilai parameter- $q$  dan fungsi  $F(q)$  berbeda untuk logam alkali (golongan IA) dan alkali tanah (golongan IIA) meskipun memiliki jumlah kulit terluar yang sama. Nilai parameter- $q$  dan fungsi  $F(q)$  logam alkali tanah lebih besar jika dibandingkan dengan logam transisi, akibatnya nilai  $C_V$  pada logam alkali tanah juga bernilai lebih besar. Hal ini dikarenakan Hal tersebut juga berlaku untuk kasus sebaliknya. Hasil perbandingan kalulasi dan eksperimen energi Fermi dan konstanta elektron termal pada logam diperlihatkan pada table berikut:

**Tabel 1.** Perbandingan hasil kalulasi dan eksperimen energi Fermi dan konstanta elektron termal pada logam.

Logam	Densitas elektron bebas ( $\times 10^{28}$ elektron/ $m^3$ )	$\mu_0$ (eV)	q	F(q)	$\gamma_{cal}$ (mJ.mol <sup>-1</sup> K <sup>-2</sup> )	$\gamma_{exp}$ (mJ.mol <sup>-1</sup> K <sup>-2</sup> )
Na	2,65	3,24	0,642	1,036662	1,37	1,38
K	1,40	2,12	0,627	1,025545	2,08	2,08
Rb	1,15	1,86	0,642	1,036954	2,39	2,41
Cs	9,10	1,59	0,835	1,175845	3,17	3,2
Be	2,42	14,18	0,279	0,559054	0,17	0,17
Cu	8,47	7,04	0,563	0,968659	0,59	0,59
Ag	5,86	5,51	0,442	0,82332	0,64	0,65
Au	5,90	5,53	0,531	0,934189	0,72	0,73
Cd	9,27	7,47	0,57	0,975432	0,56	0,68

Berikut ditampilkan hasil plot perbandingan antara eksperimen dan kalulasi menunjukkan bahwa untuk suhu yang rendah, nilai kapasitas panas spesifik beberapa logam alkali dan transisi menunjukkan hasil yang cocok. Hasilnya dapat dilihat at pada gambar 1 dan 2.



**Gambar 1.** Perbandingan hasil eksperimen dan teori logam Alkali**Gambar 2.** Perbandingan hasil eksperimen dan teori logam transisi

#### 4. Kesimpulan

Kapasitas panas elektron bebas gas dalam logam pada temperatur rendah telah diketahui dengan menerapkan distribusi statistik Fermi-Dirac. Telah diperoleh bahwa ekspresi kapasitas panas spesifik dan nilai parameter deformasi- $q$  secara analitik. Perhitungan secara teori kapasitas panas spesifik untuk beberapa macam logam alkali dan transisi telah dilakukan dan dibandingkan dengan hasil eksperimen..

#### Daftar Pustaka

- [1] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, I. E. Dzialoshinskii, *Methods of Quantum Theory in Statistical Physics*, 1962 Fizmatgiz, Moscow.
- [2] Vu Van Hung, *Statistical Physics*, DH (2006).
- [3] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 6th Ed., 1986 J. Wiley-Sons Lac.
- [4] Luu Thi Kim Thanh, *Comm. Phys.* 8 (1998).
- [5] D. V. Duc, Preprint ENSLAPP A 494 (1994) 94 (Annecy France).
- [6] D. V. Duc, L. T. K. Thanh, *Comm. Phys.* TNo 1.2 (1997).
- [7] Dang Mong Lan, Tran Huu Phat, (A translation from the Charles Kittel's book), *Introduction to solid state physics*, NXB KHKT (1984), pp. 40-60.