LJPA Vol. 1 (2) (2023) 1-12

Journal of Physics and Applied
http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/FAF
e-ISSN: 2985-8224
Department of Physics, Universitas Negeri Gorontalo

Sifat Lubang Hitam Schwarzschild-de Sitter dalam Background Semesta yang Berekspansi Dipercepat

Muh. Fachrul Latief [1*]

[1)] *Physcis Department, Faculty of Mathematics and Natural Science, Universitas Negeri Gorontalo, Indonesia.*
[*)] *Correspondence e-mail : muh.fachrul@ung.ac.id*

ARTICLE INFO

Article History :
Received : 10 January 2023
Accepted : 21 June 2023
Published : 30 July 2023

Keywords :
Schwarzschild-de Sitter black hole ;
Einstein's field equation ;
Ricci's scalar ;
Cosmological constant ;

ABSTRACT

In this paper has reviewed about the physical of Schwarzschild-de Sitter black hole in the background an accelerated expansion of universe. The physical properties. The physical properties discussed are cosmic effects on the Schwarzschild-de Sitter black hole such as its mass, temperature and horizon radius. First, the formulation of the Einstein field equations is carried out by adding the cosmological constant and the cosmic scale factor as the conformal factor of the Schwarzschild-de Sitter metric to investigate local spacetime in asymptotic time periods as a homogeneous and istropic FRW metric. In addition, it has been discussed and investigated specifically for the temperature expression which is a function of the cosmological constant and used in determining the Hawking radiation spectrum. The temperature is approached at the critical point of the cosmological constant Λ [0,1] to determine the characteristics of the temperature in an asymptotic state. The results show that by applying the Ricci scalar, the solution of Einstein's gravitaional which time-dependent and spherical-symmetry can be described against in the background of a unified accelerated expansion of the universe. Likewise, a generalization of the cosmological horizon, particle trajectories, and temperature of the Schwarzschild-de Sitter black hole is obtained which is in harmony with the background of the accelerated expansion of the universe.

1. Pendahuluan

Ruang waktu Schwarzschild dan Robertson-Walker telah menjadi acuan utama dalam melakukan pemodelan alam semesta yang diaplikasikan secara ekstensif dalam bidang astrofisika maupun kosmologi [1,2]. Lubang hitam Schwarzschild merupakan solusi persamaan medan gravitasi Einstein simetri bola dengan kehadiran konstanta kosmologi. Konstanta kosmologi sendiri pertama kali diperkenlkan oleh Einstein pada tahun 1917 yang bertujuan untuk menstabilkan alam semesta terhadap tarikan efek gravitasi sehingga menganggap alam semesta menjadi statis [3]. Namun pada tahun 1931, konstanta kosmologi ini kemudian dihilangkan oleh Einstein sendiri karena tidak sesuai dengan pengamatan yang dilakukan oleh Hubble yang menemukan bahwasanya alam semesta tidak statis dan mengalami ekspansi [4]. Namun gagasan terkait konstanta kosmologi kembali hadir di awal tahun 1990-an berdasarkan pengamatan eksperimental yang menunjukkan bahwa alam semesta sedang mengalami perluasan yang dipercepat disebabkan oleh energi gelap (*dark energy*). Dalam fenomena ini, gagasan terkait energi gelap hadir dengan karakteristik yang terukur dan konsisten dengan konstanta kosmologi [5].

Pada dasarnya, kebanyakan benda-benda kosmik terkhusus lubang hitam memancarkan cahaya yang menjadi salah satu sumber utama data empiris yang dibutuhkan dalam bidang astrofisika dan kosmologi untuk menemukenali karakteristik dari benda kosmik tersebut. Observasi yang dapat diperoleh yakni karakteristik dan sifat termal objek kosmik serta pergeseran merah yang merangkum informasi tentang ekspansi kosmik dan kemungkinan pergerakan dan kecepatan khusus dari sebuah objek yang diamati. Untuk menggabungkan kedua prespektif tersebut, maka diperlukan aturan Lemaitre [6] dan hukum Hubble [7] yang mengatur efek kosmologi [8,9,10]. Salah satu teori yang dapat mendeskripsikan bahwasanya alam semesta mengembang adalah efek Doppler dari teori relativitas khusus [11].

Saat sumber mendekati *horizon*, maka sinyal akan mengalami pergeseran merah yang tak terbatas yang dapat dilihat oleh pengamat yang jauh. *Horizon* peristiwa dari lubang hitam Schwarzschild merupakan sebuah *hyperspace* nol dengan sebuah entropi yang sebanding dengan luas permukaan serta menghasilkan radiasi termal pada temperatur Hawking [12]. Di sisi lain, teori relativitas umum telah memberikan revolusi yang sangat baik dalam memberikan deskripsi yang sangat sukses tentang alam semesta yang mengalami inflasi. Metrik kosmologis yang sesuai dengan keadaan tersebut adalah metrik Friedmann-Robertson-Walker (FRW) yang mengeksploitasi ruang waktu untuk alam semesta yang homogenitas dan istropik pada skala yang lebih besar dari 100 MPc [13,14,15].

Metrik FRW ini memberikan deskripsi terkait pengamatan alam semesta dengan korelasi antara faktor skala alam semesta $\left(R(t)\right)$, waktu kosmik (t), dan koordinat bergerak (*co-moving*). Metrik FRW ini memberikan 3 model alam semesta yang bergantung pada konstanta kelengkungannya (k), yakni 0 untuk alam semesta yang datar serta ± 1 untuk alam semesta yang tertutup/terbuka. Pengamatan terhadap kosmologi ini mendukung alam semesta yang bentuknya datar dengan $k = 0$ yang mengalami perluasan yang semakin cepat [13,16,17]. Ekspansi ini diakibatkan karena adanya distribusi energi gelap (*dark energy*) yang mendominasi sekitar 68,3% dari distribusi total alam semesta, meskipun terdapat beberapa penjelasan alternatif yang telah dikemukakan [18,19,20]. Selain itu, telah juga ditelaah bahwa hukum pertama termodinamika juga dapat berlaku pada horizon semua komsmik untuk metrik FRW [21,22,23].

Banyak ilmuwan yang telah menyelidiki dan memodelkan ruang-waktu yang datar (*flat*) tanpa adanya gangguan, berbentuk simetris bola dengan latar belakang alam semesta FRW. Seperti Tolman, yang berhasil menjelaskan adanya keruntuhan gravitasi untuk simetris bola, yang merupakan deskripsi sederhana tentang pembentukan struktur alam semesta [24]. Abbassi, dkk. telah menyelidiki ungkapan metrik Kerr untuk ruang waktu asimptotik de Sitter (*dS*) dalam bentuk FRW [25]. Firouzjaee telah menyelidiki keruntuhan gravitas dari lubang hitam yang simetris bola yang berada di alam semesta yang mengembang [26]. Dia telah mempertimbangkan perilaku permukaan tabung yang terperangkap secara marginal dengan kondisi di mana *horizon* yang dinamis terbentuk di sekitar kosmologis lubang hitam Schwarzschild. Selain itu, dia juga menelaah pengaruh konstanta kosmologi pada lubang hitam Schwarzschild serta pergeseran merah (*redshift*) cahaya yang berasal dari permukaan tabung yang terperangkap secara marginal. Einstein dan Strauss telah menelaah efek ekspansi dari bintang yang mempunyai medan gravitasi yang dijelaskan melalui metrik Schwarzschild. Model lubang hitam ini bersifat statis dan memiliki vektor Killing rupa waktu (*time-like*).

2. Definisi Metrik dan Ruang-waktu Schwarzschild-de Sitter

Metrik yang menggambarkan sebuah lubang hitam lokal dan sebuah kosmologi yang berlatar belakang de-Sitter dideskripsikan oleh Kottler, Weyl dan Trefftz [27,28,29] yang diungkapkan dengan formulasi

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}\, dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\ \, d\phi^2) \tag{1}$$

di mana $f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{r^2}{l^2}$ dan $l^2 = \frac{3}{\Lambda}$ merupakan skala panjang alam semesta yang bergantung dengan konstanta kosmologi Λ. Ruang waktu pada persamaan (1) dikenal dengan metrik Schwarzschild-de Sitter yang memiliki 2 cakrawala (*horizon*) apabila memenuhi kondisi $2m < l$, yakni cakrawala kosmologi dan cakrawala peristiwa. Cakrawala kosmologi terletak pada $r_C^2 = \frac{l^2}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4m^2}{l^2}}\right)$ dan cakrawala peristiwa yang terletak pada koordinat radialnya $r_E^2 = \frac{l^2}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4m^2}{l^2}}\right)$. Ruang waktu ini dituliskan dalam koordinat bergerak (*co-moving*) yang mendeskripsikan alam semesta yang dipercepat pada pendekatan $r = 0$ untuk lubang hitam Schwarzschild. Untuk kondisi $l \to \infty$, maka metrik pada persamaan (1) akan tereduksi menjadi metrik Schwarzschild dan metrik McVittie dengan menerapkan syarat khusus [30].

Lubang hitam Schwarzschild pada ruang waku yang berekspansi dapat dimasukkan ke dalam latar belakang kosmologi dengan menuliskan metrik FRW ke dalam bentuk datar konformal [31,32]. Asumsi ini untuk membangun alam semesta yang mengembang di mana ruang waktu yang tidak homogen dengan menghadirkan faktor skala kosmologi $R(t)$ sebagai faktor konformalnya. Dengan cara ini, maka dapat dibangun kombinasi dari ruang waktu Schwarzschild-de Sitter sebagai represntasi lubang hitam Schwarzschild (pada skala yang lebih kecil dan dalam periode waktu yang singkat) dan latar belakang FRW sebagai representasi kosmologi (pada skala yang lebih besar darn pada waktu kosmos).

Selanjutnya ditinjau sebuah metrik konformal diberikan persamaan berikut

$$ds^2 = a^2(t')\left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt'^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\right] \tag{2}$$

dari metrik di atas memiliki tiga singularitas, yakni singularitas pada $a = 0$ yang menandakan terjadinya big bang, pada $r = 2m$ yang menandakan adanya cakrawala lubang hitam (event horizon) dan $r = 0$ yang mendeskripsikan kelengkungan lubang hitam. Untuk menghilangkan singularitas cakrawala, maka dapat dilakukan transformasi koordinat yang bersesuaian, yakni dengan menggunakan koordinat waktu baru (t) yang didefinisikan

$$t' \to t = \int^t a(t')\, dt' \tag{3}$$

Dengan demikian, metrik pada persamaan (2) dapat dituliskan kembali menjadi

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + R^2(t)\left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\right] \tag{4}$$

di mana $R(t) \equiv a\big(t'(t)\big)$. Selanjutnya ditinjau sifat geometris dari metrik persamaan (4), maka diperoleh bentuk skalar Riccinya, yakni

$$\mathcal{R} = -\frac{6r\left(\ddot{R}R(t)+\dot{R}^2\right)}{(2m-r)R^2(t)} \tag{5}$$

Bentuk geometri pada persamaan (5) dapat direduksi ke dalam metrik FRW dan membentuk skalar Ricci dari ruang-waktu FRW pada limit $m = 0$ atau nilai r yang sangat besar. Dengan demikian, diperoleh properti dari ruang-waktu yang merupakan kombinasi dari sebuah lubang hitam yang berada dalam latar belakang kosmik. Berdasarkan model standar kosmologi, faktor skala akan bergantung pada nilai parameter keadaan, yakni $\omega = p/\rho$, di mana p adalah tekanan isotropik alam semesta dan ρ adalah kerapatan materi alam semesta. Parameter keadaan ω ini memiliki 3 nilai, yakni untuk $\omega > -1$ maka skala faktor akan meningkat dalam bentuk pangkat $R(t) = A\, t^{\frac{2}{3(1+\omega)}}$, untuk $\omega = -1$ maka skala faktor dalam bentuk eksponensial $R(t) = A\exp(Ht)$. Sedangkan untuk $\omega < -1$, maka skala faktor adalah $R(t) = A(t_{br} - t)^{\frac{2}{3(1+\omega)}}$, di mana t_{br} merupakan waktu singularitas Big Rip yang akan terjadi apabila alam semesta era phantom. Dalam era phantom ini, alam semesta akan mengalami perluasa sehingga akan berakhir dengan bencana, yang kemudian pada akhirnya semua materi di alam semesta akan terurai menjadi unsur-unsur dasarnya [33].

3. Definisi Metrik dan Ruang-waktu Schwarzschild-de Sitter

Untuk memahami sifat fisis dari lubang hitam Scharzschild-de Sitter, maka ditinjau kembali aksi Hilbert-Einstein dalam empat dimensi dengan mengasumsikan kehadiran konstanta kosmologi positif, maka aksi gravitasi dituliskan

$$S_G = \int d^4x \sqrt{-g}\,\left(\frac{r}{2\kappa^2} - \Lambda\right) \tag{6}$$

di mana R adalah skalar Ricci, $\kappa^2 = 8\pi G$ dan g adalah determinan dari tensor metrik $g_{\mu\nu}$. Dengan melakukan variasi aksi persamaan di atas terhadap $g_{\mu\nu}$, maka diperoleh persamaan medan Einstein yang bentuknya sebagai berikut

$$G^\mu_\nu = 8\pi G T^\mu_\nu$$

$$G^\mu_\nu = R^\mu_\nu - \frac{1}{2}Rg^\mu_\nu + \Lambda g^\mu_\nu$$

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2}Rg^\mu_\nu + \Lambda g^\mu_\nu = 8\pi G T^\mu_\nu \tag{7}$$

di mana R^μ_ν adalah tensor Ricci, G adalah konstanta gravitasi Newton, dan T^μ_ν adalah tensor energi-momentum yang mendeskripsikan kandungan materi alam semesta. Persamaan (7) memberikan gambaran geometri ruang-waktu yang bergantung materi penyusun alam semesta.

Sebelumnya telah dibahas bahwasanya metrik Schwarzschild merupakan solusi vakum untuk persamaan medan Einstein dalam koordinat bola statis dan metrik FRW sebagai representasi koordinat isotropik dan homogen dalam membangun model kosmologi berada pada alam semesta yang mengembang dan dipercepat. Untuk kasus sederhana, FRW dapat diasumsikan sebagai alam semesta dengan distribusi materi fluida sempurna (*Perfect Fluids*) dengan persamaan keadaan $p = w\rho$. Dengan demikian, ruang-waku yang baru dapat memberikan dua batasan, yakni untuk $w \neq -1$ dan $w = -1$. Untuk kasus $w \neq -1$, maka akan diperluas ke dalam distribusi *power law*, sehingga diperoleh

$$T_{\nu}^{\mu}=\frac{1}{8\pi}G_{\nu}^{\mu}=\begin{pmatrix}-\rho & -\frac{m}{6\pi R^2(t)r^2(w+1)t} & 0 & 0\\ \frac{m}{6\pi R^2(t)r^2(w+1)t} & wp & 0 & 0\\ 0 & 0 & wp & 0\\ 0 & 0 & 0 & wp\end{pmatrix} \tag{8}$$

dengan $\rho=\frac{r}{6\pi(r-2m)(w+1)^2t^2}$. Sedangkan untuk kasus $w=-1$, maka akan diperluas untuk kasus eksponensial, maka diperoleh

$$T_{\nu}^{\mu}=\frac{1}{8\pi}G_{\nu}^{\mu}=\begin{pmatrix}-\rho & -\frac{mH}{4\pi(2m-r)^2} & 0 & 0\\ \frac{mH}{4\pi(2m-r)^2} & -\rho & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\rho & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\rho\end{pmatrix} \tag{9}$$

dengan $\rho=\frac{3r\,H^2}{8\pi(r-2m)}$ dan $H\equiv\frac{\dot{R}}{R}$ yang merupakan parameter Hubble. Bentuk tensor energi-momentum di atas memiliki suku non-diagonal yang mendeskripsikan aliran materi secara radial dalam koordinat bergerak.

Dari persamaan (8) dan (9) diperoleh informasi terkait bentuk dari tensor energi-momentum memiliki suku non-diagonal yang menunjukkan bahwasanya terdapat aliran materi terhadap arah radialnya (dr) dalam koordinat bergerak. Oleh karena itu, untuk pengamat yang bergerak akan memperoleh $dr=d\Omega=0$ dan dengan menggunakan $U^{\alpha}U_{\alpha}=-1$, maka diperoleh

$$U^{\alpha}=\frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{1/2}}\delta_t^{\alpha} \tag{10}$$

Untuk kasus tersebut, hal pertama yang ditinjau adalah kondisi energi lemah (*weak energy*) berada pada $T_0^0\geq 0$, sedangkan untuk kondisi energi kuat (*strong energy*) berada pada $\frac{1}{2}(T_1^1+2T_2^2+T_0^0)\geq 0$. Ungkapan tensor energi-momentum dapat dituliskan kembali dalam bentuk fluida yang anisotropik sehingga kondisi energi kuat berada pada $\frac{1}{2}(p_r+2p_\theta+\rho)\geq 0$. Dengan demikian, kondisi energi dominannya diungkapkan oleh vektor $D^{\alpha}\equiv -T_{\beta}^{\alpha}\,U^{\beta}$ yang bentuknya harus rupa-waktu (*timelike*) atau nol (*null*). Hal ini memberikan implikasi

$$\frac{R^2(t)\left(T_0^1\right)^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^3}-(T_0^0)^2\leq 0 \tag{11}$$

Kondisi energi di atas bersesuaian dengan era alam semesta yang didominasi radiasi dan berekspansi eksponensial. Perlu diperhatikan nilai negatif menunjukkan adanya pelanggaran materi terhadap kondisi energi yang sesuai. Hal ini tidak memberikan makna fisis dengan adanya materi pelanggaran terhadap kondisi energi tersebut dalam sistem klasik. Namun, hal tersebut tetap diperbolehkan dan memenuhi efek kuantum sehingga perlu untuk diperhitungkan [34]. Untuk sekarang, materi eksotis tersebut telah ditelaah lebih dalam karena penemuan adanya percepatan perluasan alam semesta dapat dikaitkan dengan energi gelap dengan persamaan keadaan $p=wp$ dengan nilai $w<-\frac{1}{3}$. Sedangan untuk kasus tertentu $(w=-1)$, maka disebut era phantom [35,36,37,38].

4. Sifat Termodinamika Lubang Hitam Schwarzschild-de Sitter

Pada prinsipnya, suhu dari sebuah lubang hitam dapat didefinisikan berdasarkan gravitasi permukaannya (k_h) yang berlokasi pada cakrawalanya (*horizon*) [39] yang diungkapkan dalam bentuk kovarian

$$k_h^2 = -\frac{1}{2}\lim_{r\to r_h}\left(D_\mu K_\nu\right)\left(D^\mu K^\nu\right) \tag{12}$$

di mana D_μ merupakan turunan kovariant dan $K \equiv \gamma_t \frac{\partial}{\partial t}$ merupakan vektor Killing rupa-waktu dengan γ_t adalah sebuah konstanta normalisasi. Untuk latar belakang gravitasi simetri bola, maka k_h dapat disederhanakan menjadi

$$k_h = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g_{00}\, g_{11}}}\left|g_{00,1}\right|_{r=r_h} \tag{13}$$

Sekarang tinjau kembali ungkapan $f(r)$ persamaan (1) yang bentuknya

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 \tag{14}$$

Persamaan (14) dapat disederhanakan dengan menggunakan kondisi $f(r_h) = 0$ untuk menggantikan ungkapan massa lubang hitam (M) ke dalam ungkapan r_h dan Λ, sehingga temperatur lubang hitam Schwarzschild-de Sitter dituliskan menjadi

$$T_0 = \frac{k_h}{2\pi} = \frac{1-\Lambda\, r_h^2}{4\pi r_h} \tag{15}$$

Namun di sisi lain, ruang waktu Schwarzschild-de Sitter tidak memiliki batas datar yang asimptotik, di mana semua parameter lubang hitam didefinisikan sebagai fungsi metrik $f(r)$ yang menginterpolasi pada radius cakrawala (r_h) dan radius kosmologi (r_c), yang bernilai maksimum pada titik tengah yang diungkapkan oleh persamaan

$$r_0^3 = \frac{3M}{\Lambda} \tag{16}$$

di mana $f(r_0) = 1 - \Lambda\, r_0^2$, yang nilainya akan menyimpang untuk nilai Λ yang lebih besar. Oleh karena itu, perlu diusulkan ungkapan *normalisasi* untuk mengatasi masalah tersebut. Dengan demikian, suhu lubang hitam Schwarzschild-de Sitter dapat dituliskan menjadi

$$T_{BH} = \frac{1}{\sqrt{h(r_0)}}\frac{1-\Lambda r_h^2}{4\pi r_h} \tag{17}$$

Secara matematis, ungkapan faktor $\sqrt{h(r_0)}$ ditentukan oleh konstanta normalisasi non-trivial (γ_t) yang diungkapkan oleh vektor Killing K^μ yang didefinisikan jauh dari ruang-waktu datar. Berdasarkan persamaan (17) memberikan penafsiran bahwasanya pada titik r_0, efek lubang hitam dan cakrawala kosmolgi dapat saling meniadakan, sehingga titik tersebut menghampiri limit datar yang asimptotik.

Akan tetapi, hal lain yang menjadi perhatian dari sifat termodinamika lubang hitam Schwarzschild-de Sitter adalah gravitasi permukaan (k_c) dari cakrawala kosmologis yang dapat dituliskan kembali dalam bentuk yang bersesuaian dengan temperatur pada persamaan (17), yakni

$$T_c = -\frac{k_c}{2\pi} = -\frac{1-\Lambda r_c^2}{4\pi r_c} \tag{18}$$

Untuk nilai konstanta kosmologis Λ yang kecil, maka kedua horizon terletak saling berjauhan satu dengan yang lainnya, sehingga dapat dikembangkan melalui pendekatan dua termodinamika yang tidak saling berkaitan [39,40,41]. Akan tetapi, saat Λ meningkat sambil menjaga massa lubang hitam M tetap, maka kedua cakrawala akan saling mendekati satu sama lain secara bersamaan hingga sampai pada batas suhu kritis, yakni T_0 dan T_c. Namun pada prinsipnya, kedua suhu tersebut terbedakan. Misalkan seorang pengamat yang terletak pada titik sembarang dari daerah $r_h < r < r_c$ yang berinteraksi dengan kedua horizon tersebut tidak akan pernah berada dalam kesetimbangan termal termodinamika.

Dengan demikian, konsep suhu efektif dalam ruang waktu Schwarzschild-de Sitter yang dalam hal ini melibatkan T_0 dan T_c telah ditelaah dalam beberapa tahun terakhir. Hukum pertama termodinamika untuk ruang waktu Schwarzschild-de Sitter dapat dituliskan dalam formalisme Iyer-Wald [42,43]. Dalam hal ini, massa lubang hitam dapat diasumsikan sebagai energi dalam alam semesta ($M = E$), entropi sebagai penjumlahan dari kedua horizonnya ($S = S_h + S_c$) dan volume merupakan salah satu dari bagian yang dapat diamati ruang waktu ($V = V_c - V_h$). Dengan demikian, koefisien δS pada hukum pertama termodinamika dapat diidentifikasi dengan temperatur efektif sistem yang diungkapkan

$$T_{eff} = \frac{r_h^4 T_c + r_c^4 T_0}{(r_h + r_c)(r_c^3 - r_h^3)} \tag{19}$$

Selain itu, pendekatan lain dengan mengasumsikan massa lubang hitam memiliki peranan sebagai entalpi sistem ($M \equiv -H$) dan konstanta kosmologi berkaitan dengan tekanan $\left(P \equiv \frac{\Lambda}{8\pi}\right)$, sedangkan untuk entropy tetap sama yakni penjumlahan dari kedua horizonnya y$S = S_h + S_c$. Dengan demikian, temperatur efektif untuk sistem ini diungkapkan oleh persamaan

$$T_{eff(-)} = \left(\frac{1}{T_c} - \frac{1}{T_0}\right)^{-1} = \frac{T_0 T_c}{T_0 - T_c} = -\frac{(1-\Lambda r_h^2)(1-\Lambda r_c^2)}{4\pi(r_h + r_c)(1-\Lambda r_h r_c)} \tag{20}$$

dan

$$T_{eff(+)} = \left(\frac{1}{T_c} + \frac{1}{T_0}\right)^{-1} = \frac{T_0 T_c}{T_0 + T_c} = -\frac{(1-\Lambda r_h^2)(1-\Lambda r_c^2)}{4\pi(r_h - r_c)(1+\Lambda r_h r_c)} \tag{21}$$

Persamaan (20) dan (21) mempunyai analisis yang mirip dengan ungkapan T_{eff} pada persamaan (19) dengan asumsi bahwa entropi dari sistem merupakan perbedaan entropi dari dua cakrawala, yakni $S = S_c - S_h$. Namun jika seorang pengamat mengikuti pendekatan yang sama mengarah ke T_{eff} dengan mengganti T_0 yang dinormalisasi T_{BH}, maka akan diperoleh ungkapan suhu efektif ruang waktu Schwarzschild-de Sitter yakni

$$T_{eff_{BH}} = \left(\frac{1}{T_c} - \frac{1}{T_{BH}}\right)^{-1} = \frac{T_{BH} T_c}{T_{BH} + T_c} = -\frac{(1-\Lambda r_h^2)(1-\Lambda r_c^2)}{4\pi(r_h\sqrt{h(r_0)} + r_c)(1-\Lambda r_h r_c)} \tag{22}$$

Ungkapan persamaan (22) memberikan beberapa karakteristik yang sama dengan $T_{eff(+)}$ sehingga pada saat yang sama pula mampu mempertahankan asumsi untuk entropi sistem $S = S_c + S_h$ dengan mempertimbangkan tidak adanya kerataan yang asimptotik.

Sekarang telah diperoleh beberapa ungkapan suhu dalam karakteristik lubang hitam Schwarzschild-de Sitter $\left(T_0, T_{BH}, T_{eff}, T_{eff(-)}, T_{eff(+)}, T_{eff_{BH}}\right)$ yang masing-masing ungkapan suhu tersebut merupakan fungsi dari konstanta kosmologi Λ. Dalam analisis berikut, nilai Λ akan bervariasi dalam daerah yang diperbolehakan $[0, \Lambda_c]$, di mana $\Lambda_c = 1/r_h^2$ yang merupakan nilai kritis maksimum dari konstanta kosmologis di mana kedua cakrawala lubang hitam tersebut berhimpit. Untuk menyederhanakan kasus ini, maka akan dipertahankan cakrawala lubang hitam nilainya tetap pada kondisi $r_h = 1$. Dengan demikian memungkinkan berada dalam rentang nilai

[0,1]. Pertama akan ditinjau kondisi di mana nilai titik kritis $[\Lambda \to 0]$, maka keenam suhu ini akan dibagi menjadi dua kelompok yang mengadopsi dua nilai asimptotik berbeda sebagai $\Lambda \to 0$. Kelompok pertama terdiri dari T_0, T_{BH}, dan T_{eff} yang masing-masing merepsentasikan suhu lubang hitam. Suhu T_0 dan T_{BH} secara alami akan direduksi menjadi suhu lubang hitam Schwarzschild pada $T_H = \frac{1}{4}\pi r_h$, kondisi di mana konstanta kosmologi lenyap. Untuk suhu effektif akan memiliki batas pada $r_c \to \infty$. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa T_{eff} telah dibangun dengan asumsi bahwa cakrawala lubang hitam harus tetap eksis meskipun r_c terletak pada jarak yang terhingga (*finity*) atau tidak terhingga (*infinity*). Sebaliknyaa, tiga suhu efektif lainnya $T_{eff(-)}, T_{eff(+)}$, dan $T_{eff_{BH}}$ akan lenyap menuju nol (direduksi menjadi T_c ketika $r_h \to 0$). Hal ini bersesuaian dengan fakta bahwasanya suhu efektif ini diperoleh berdasarkan asumsi nilai Λ bukan nol. Dalam pendekatan ini, cakrawala kosmologislah yang harus tetap eksis sedangkan r_h dapat lenyap atau tidak.

Pendekatan selanjutnya di mana nilai titik kritis $[\Lambda \to 1]$, diperoleh enam suhu yang juga dibagi menjadi 2 kelompok. Kelompok pertama yang terdiri dari suhu $T_{BH}, T_{eff(-)}$, dan T_{eff} yang masing-masing mempertahankan nilai asimptotik, yakni tidak bernilai nol pada batas kritisnya. Hal ini dapat ditinjau langsung dengan melihat persamaan (17), (19), dan (20) di mana pada limit $r_h \to r_c \to \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$, pembilang dan penyebut dari ketiga persamaan tersebut akan menuju nol sedemikian rupa sehingga rasionya tetap konstan. Akan tetapi, tiga suhu lainnya $T_0, T_{eff(+)}$, dan $T_{eff_{BH}}$ semuanya akan lenyap pada batas kritisnya. Namun hanya pembilang akan menjadi nol pada persamaan (15), (21), dan (22) sementara semua penyebutnya tidak lenyap.

Dengan membandingkan analisis dari masing-masing perlikau secara keseluruhan, maka dapat dilihat dominasi suhu normal T_{BH} atas seluruh kondisi Λ yang diberikan. Untuk konstanta kosmologis kecil, maka T_0 dan T_{eff} akan direduksi menjadi suhu Schwrazschild yang nilainysa sama. Ketika dilakuakn pendekatan terhadap titik kritisnya, di mana didominasi T_{BH}, maka $T_{eff(-)}$ akan mempunyai nilai yang sangat besar. Suhu-suhu tersebut yang menentukan spektrum radiasi Hawking yang sesuai dalam telaah lubang hitam Schwarzschild-de Sitter dalam ruang waktu berkesnpansi.

5. Sifat Termodinamika Lubang Hitam Schwarzschild-de Sitter

Lintasan partikel dalam ruang-waktu mengikuti persamaan geodesik yang dapat diturunkan melalui bentuk Lagrangian, yakni

$$2\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{23}$$

di mana τ adalah parameter *affine* di sepanjang geodesik tersebut. Misalkan untuk geodesik rupa-waktu (*time-like*), maka τ dapat didefenisikan sebagai waktu dari elemen garis (s) yang merepresentasikan lintasan partikel di sepanjang geodesik.

Untuk ruang-waktu Schwarzschild-de Sitter, Lagrangian dapat dituliskan menjadi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[-\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right] \tag{24}$$

Ungkapan persamaan (24) dalam bentuk momentum kanonik adalah

$$p_t = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}} = -\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)\dot{t} \tag{25}$$

$$p_r = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1}\dot{r} \tag{26}$$

$$p_\theta = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = r^2 \dot{\theta} \tag{27}$$
$$p_\varphi = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi} \tag{28}$$

Persamaan (25) dapat dituliskan keblai menjadi

$$\dot{t} = E\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2\right)^{-1} \tag{29}$$
$$\dot{\varphi} = L\,(r^2 \sin^2\theta)^{-1} \tag{30}$$

di mana E adalah konstanta yang merepresentasikan batas Newtonian yang berhubungan dengan energi partikel. Sedangkan L adalah konstanta yang merepresentasikan momentum sudut dari sumbu normal terhadap bidang invariannya. Untuk persamaan geraknya adalah

$$\frac{d}{d\tau}\left(r^2\dot{\theta}\right) - (r^2 \sin\theta\cos\theta)\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{31}$$

Untuk menyederhanakan kasus ini, maka dipilih kondisi awal $\theta(\tau_0) = \pi/2$ sehingga $\dot{\theta}(\tau_0) = 0$.

Kemudian untuk memperoleh solusi dari kasus ini dalam koordinat radial, maka perlu dipertimbangkan kembali identitas *four-velocities* yakni

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = -k \tag{32}$$

di mana k merupakan sebuah konstanta yang merepresentasikan objek partikel masif ($k = 1$) dan juga merepresentasikan objek cahaya ($k = 0$). Oleh karena itu, persamaan dalam arah radialnya menjadi

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V(r) = \frac{1}{2}p_t^2 \tag{33}$$

dengan

$$V(r) = \frac{1}{2}\left(\frac{p_\varphi^2}{r^2} + k\right)\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) \tag{34}$$

Selanjutnya ditelusuri orbit dari sebuah partikel dengan mengganti variabel r ke dalam variabel u. Di mana hubungan keduanya adalah $u = r^{-1}$, sehingga untuk turunan terhadap waktunya menjadi $\dot{r} = -p_\varphi\, du/d\varphi$. Dengan demikian, persamaan (33) memberikan ungkapan berikut

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{Mk}{p_\varphi^2} + 3Mu^2 - \frac{k\,\Lambda}{3p_\varphi^2 u^3} \tag{35}$$

Persamaan di atas mendeskripsikan lintasan di mana untuk nilai $k = 1$ merupakan lintasan dari partikel masif dan untuk nilai $k = 0$ merupakan lintasan cahaya di dalam ruang-waktu Schwarzschild-de Sitter.

6. Simpulan

Sifat dan karakteristik lubang hitam Schwarzschild-de Sitter dalam semesta yang berekspansi dipercepat telah dikaji dalam beberapa dekade terakhir. Pertama dilakukan perumusan persamaan medan Einstein dengan menambahkan konstanta kosmologi dan faktor skala kosmik sebagai faktor konformal metrik Schwarzschild-de Sitter untuk menyelidiki ruang waktu lokal dalam periode waktu yang asimptotik sebagai metrik FRW yang homogen dan istropik. Dengan mengasumsikan alam semesta dengan distribus materi fluida sempurna yang mempunyai persamaan keadaan $p = w\rho$, maka sampai pada kesimpulan di mana penemuan adanya percepatan perluasan alam semesta dapat dikaitkan dengan energi gelap (*dark energy*) dengnan nilai $w < -\frac{1}{3}$. Untuk kasus lain di mana nilai $w = -1$, maka materi alam di dominasi phantom.

Selain itu juga telah dikaji sistem termodinamikadari lubang hitam Schwarzschild-de Sitter yang mengganggap perilaku ini merupakan dasar manifestasi dari teori gravitasi kuantum [39,44]. Tinjaunnya adalah ungkapan dari suhu yang dapat berkaitan langsung dengan spektrum radiasi Hawking. Diperoleh enam ungkapan suhu yang berbeda dalam latar belakang ruang waktu yang berekspansi dipercepat. Pertama suhu (T_{BH} dan T_c) yang merepresentasikan suhu pada gravitasi permukaan dan telah dinormalisasi untuk mempertimbangkan tidak adanya batas datar-asimptotik. Selain itu, empat suhu ($T_{eff}, T_{eff(-)}, T_{eff(+)}$, dan $T_{eff_{BH}}$) lainnya yang telah ditentukan dalam istilah lubang hitam dan suhu cakrawala kosmologis.

Selanjutnya kami telah menelaah masing-masing profil suhu di atas sebagai fungsi konstanta kosmologis Λ, mulai dari titik kritis $\Lambda \to 0$ sampai titik kritis maksimum. Untuk kondisi titik kritis maksimum, suhu terbagi menjadi dua kelompok yang bergantung pada perilaku masing-masing suhu dalam kondisi asimptotiknya. Sedangkan untuk limit $\Lambda \to 0$, maka suhu yang disebutkan di atas akan berkurang menjadi suhu lubang hitam Schwarzschild atau lenyap, mendekati batas kritis $\Lambda \to 0$. Hal ini mengasumsikan bahwa nilai asimptotik yang tidak hilang atau direduksi kembali menjadi nol.

Hal terakhir yang ditinjau adalah lintasan partikel dalam ruang waktu Schwarzschild-de Sitter. Hasil yang diperoleh pada persamaan (35) mendeskripsikan lintasan partikel masif ($k = 0$) dan lintasan cahaya dalam ruang waktu Schwarzschild-de Sitter ($k = 1$).

Referensi

[1] S. W. Hawking and W. Israel (eds.), Three Hundred Years of Gravitation (Cambridge University Press, 1987).

[2] K. S. Thorne, R. H. Price and A. MacDonald, Black Holes: The Membrane Paradigm (Yale University Press, New Haven, 1976).

[3] Einstein, A. (1923). "Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie". *Das Relativitätsprinzip, : 130–139.*

[4] Rugh, S; Zinkernagel, H. (2001). "The Quantum Vacuum and the Cosmological Constant Problem". *Studies in History and Philosophy of Modern Physics.* **33** (4): 663–705. *arXiv:hep-th/0012253.*

[5] A. I. Lonappan, S. Kumar, Ruchika, A. A. Sen. (2017). "Bayesian Evidences for dark energy models in light of current observational data". *Physical Review D.* 97 (4) : 043524. arXiv:1707.00603.

[6] A. G. Lemaitre, A. S. Eddington. (1931). "The Expanding Universe". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* **91** (5) : 490–501.

[7] E. Hubble. (1929). "A Relation Between Distance and Radial Velocity Among Extra-Galactic Nebulae". *Proc. Nat. Acad. Sci.* **15 :** 168-173

[8] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of relativity (J. Wiley & Sons, New York 1972).

[9] E. Harrison, Cosmology : The Science of Universe *2nd edition* (Cambridge University Press, 2012).

[10] E. Harrison. (1993). "The Redshift-Distance and Velocity-Distance Laws". *Astrophys. J.* **403** : 28-31.

[11] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, The classical theory of fields (Elsevier Sci. Inc., New York 1975).

[12] T. R. Choudhury and T. Padmanbahan. (2007). Concept of temperaure in multi-horizons spacetimes. *Gen. Relativ. Grav.* **39** : 1789-1811.

[13] S. Weinberg, Cosmology. (Oxford University Press Inc., New York, 2008).

[14] T. Padmanabhan. (2002). "Classical and Quantum Thermodynamics of Horizons in Spherical Symmetry Spacetimes". *Class. Quantum Grav.* **9** : 5387-5409

[15] T. Padmanabhan. (2005). "Gravity and the Thermodynamics of Horizons". *Phys. Rep.* **406** : 49.

[16] A. Riess et al., (1998). "Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant". *Astron. J.* **116** : 1009.

[17] S. J. Perlmutter et al., (1999). "Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae". *Astrophys. J.* **517** : 565.

[18] W. Zimdahl, D. J. Schwarz, A. B. Balakin and D. Pavon, .(2001). "Cosmic anti-friction and accelerated expansion". *Phys. Rev. D* **64.** 063501.

[19] G. Bene, V. Czinner and M. Vasth, (2006). "Accelerating expansion of the universe may be caused by inhomogeneities". *Mod. Phys. Lett. A* **21** : 1117.

[20] K. Enqvist, (2008). "Lemaitre–Tolman–Bondi model and accelerating expansion". *Gen. Relativ. Gravit.* **40** : 451–466.

[21] A. Sheykhi, B. Wang and R. G. Cai, (2007). "Thermodynamical properties of apparent horizon in warped DGP braneworld". *Nucl. Phys. B* **779** : 1-12.

[22] A. Sheykhi, B. Wang and R. G. Cai, (2007). "Deep connection between thermodynamics and gravity in Gauss-Bonnet braneworlds". *Phys. Rev. D* **76**, 023515.

[23] A. Sheykhi, J. Cosmol. (2009). "Thermodynamical interpretation of gravity in braneworld scenarios". *Astropart. Phys.* **05** : 019.

[24] R. C. Tolman, (1934). "On Thermodynamics Equilibrium in a Static Einstein Universe". *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **20** : 410.

[25] A. H. Abbassi, and S. Khosravi, (2010). "On Kerr-de Sitter Metric". *Int. J. Mod. Phys. A* **25** : 837.

[26] J. T. Firouzjaee, (2012). "The Sperical Symmetry Black Hole Collapse in Expanding Universe". *Int. J. Mod. Phys. D* **21,** 1250039.

[27] F. Kottler, (1918). "Uber die Physikalischen Grundlagen der Eisntenchen Gravitationstheorie". *Ann. Phys.* **56** : 401.

[28] H. Weyl, (1919). "Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie". *Phys. Z.* **20** : 31.

[29] E. Trefftz, (1922). "Das statische Gravitationsfeld zweier Massenpunkte in der Einsteinschen Theorie". *Math. Ann.* **86** : 317.

[30] B. C. Nolan, (1999). "A point mass in an isotropic universe: III. The region R ≤ 2 m". *Class. Quantum Grav.* **16** : 1227.

[31] M. Iihoshi, S. V. Ketov and A. Morishita, (2007). "CONFORMALLY FLAT FRW METRICS". *Prog. Theor. Phys.* **118** : 475.

[32] N. Riazi, H. Moradpour and A. Amiri, (2011). "Physical and Mathematical Properties of Conformally RW Spacetimes". *Prog. Theor. Phys.* **126** : 1145

[33] V. Mukhanov, Physical Foundations of Cosmology (Cambridge University Press, Cambridge, 2005).

[34] M. Visser, Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking (American Institute of Physics, New York, 1995).

[35] J. L. Tonry et al., (2003) . “Cosmological Results From High-Z Supernovae”. *Astrophys. J.* **594** : 1.

[36] U. Alam, V. Sahni, T. D. Saini and A. A. Starobinsky, (2004). “Is There Supernova evidence for dark energy metamorphosis?” *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **354** : 275.

[37] T. R. Choudhury and T. Padmanabhan, (2005). “Cosmological parameters from supernova observations: A critical comparison of three data sets”. *Astron. Astrophys.* **429** : 807

[38] J. S. Alcaniz, (2004). “Testing dark energy beyond the cosmological constant barrier”. *Phys. Rev. D* **69**, 083521.

[39] G.W. Gibbons, S.W. Hawking, (1977). “Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation”. *Phys. Rev. D* **15** : 2738.

[40] R. Bousso, S.W. Hawking, (1996). “Pair Creation of Black Hole during inflation”. *Phys. Rev. D* **54** : 6312

[41] Y. Sekiwa, (2006). “Thermodynamics of de SItter black holes - Thermal Cosmological Constant”. *Phys. Rev. D* **73,** 084009.

[42] M. Urano, A. Tomimatsu, H. Saida, (2009). Mechanical First Law of Black Hole Spacetimes with Cosmological Constant and Its Application to Schwarzschild-de Sitter Spacetime”. *Class. Quantum Gravity* **26**, 105010.

[43] V. Iyer, R.M. Wald, (1994). “Some properties of the Noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy”. *Phys. Rev. D* **50** : 846.

[44] J. Labbe, A. Barrau, J. Grain, (2006). ” Phenomenology of black hole evaporation with a cosmological constant”. *PoS HEP 2005* : 013.